LAGRANGE-ANALYSIS

V.P.Palamodov
Independent University of Moscow
Winter Semester 1996, MO, DO 13-15, SR4

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Fouriertransformation

Inhaltsverzeichnis

1.1 Fourier-Lebesguesches Integral

Wir versehen die Gruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit dem Lebesguesche Mass dx. Sei f eine meßbare Funktion auf $\mathbb{R}$ mit reellen oder komplexen Werten. Der *Träger* f ist die kleinste abgeschlossene Menge $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}$ so, daß $f = 0$ fast überall außerhalb $\operatorname{supp} f$.
Es sei $L_p = L_p(\mathbb{R}), p \geq 1$ der Raum der meßbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ so daß die Funktion $|f|^p$ summierbar gegen das Lebesguesche Mass dx ist:

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx < \infty.$$

Die Menge L_p ist ein vollständiger normierter Raum mit der Norm

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx \right)^{1/p}.$$

Der Raum $L_2(\mathbb{R})$ ist ein Hilbertscher Raum der quadrat-integrierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int f\bar{g} dx.$$

Für eine beschränkte Funktion f benutzen wir auch die Norm

$$\|f\|_\infty = \sup |f(x)|.$$

Fouriertransformierte einer Funktion $f \in L_1$ ist das Integral

$$F(f) \equiv \tilde{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi\imath\xi x) f(x) dx, \quad \imath = \sqrt{-1} \tag{1.1}$$

mit einem Parameter $\xi \in \mathbb{R}^*$, wobei die Linie $\mathbb{R}^*$ der Dualraum zu $\mathbb{R}$ betrachtet wird (d.h. der Raum der linearen Funktionalen)

Satz 1.1.1 (Riemann-Lebesgue) *Für eine beliebige $f \in L_1(\mathbb{R})$ ist die Fouriertransformierte $\tilde{f}$ eine stetige Funktion auf die duale Linie $\mathbb{R}^*$. Sie erfüllt die Ungleichung*

$$|\tilde{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 \tag{1.2}$$

und $\tilde{f}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$ gilt.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus den Lebesguesche Satz über dominierte Konvergenz. Die Ungleichung (1.2) ist offenbar. Die letzte Behauptung ist offenbar für jede stückweise konstante Funktion $f \in L_1$. Man kann für eine beliebige Funktion $f \in L_1$ und ein beliebiges positives ϵ eine stückweise konstante Funktion g finden, die Ungleichung $\|f - g\|_1 \leq \epsilon$ erfüllt. Daraus ergibt sich mit Hilfe von (1.2), daß $\limsup_{|\xi|\to\infty} |f| \leq \epsilon$. Das impliziert die Gleichung $\lim \tilde{f} = 0$. $\boxdot$

Satz 1.1.2 (Parseval) *Man hat*

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = \langle f, g \rangle \tag{1.3}$$

für jedes $f, g \in L_1 \cap L_2$. *Insbesondere gehört die Funktion* $\tilde{f}$ *zum Raum* $L_2(\mathbb{R}^*)$ *und gilt*

$$\int |f|^2 dx = \int |\tilde{f}|^2 d\xi. \tag{1.4}$$

Beweis. Wir berechnen das Integral

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \exp(-2\pi\imath x\xi) d\xi = \frac{\sin(2\pi\alpha x)}{\pi x}. \tag{1.5}$$

Die Dichte $D(x) := \frac{\sin(\lambda x)}{\pi x} dx$ heißt der Dirichletsche Kern.

Hilfsatz 1 *Für eine beliebige stetige Funktion* h *auf* $\mathbb{R}$ *mit kompaktem Träger strebt das Integral*

$$\int \frac{\sin(\lambda y)}{\pi y} h(x-y) dy \tag{1.6}$$

gleichmäßig gegen $h(x)$ *für* $\lambda \to \infty$.

Beweis. Der Dirichletsche Kern strebt gleichmäßig gegen Null außerhalb einer beliebigen Umgebung vom Ursprungpunkt $y = 0$ für $\lambda \to \infty$, und erfüllt immer die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}} D(x) = 1.$$

Deswegen ist das Integral (1.6) gleich

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} D(y)h(x-y) + o(1) = h(x)\int_{-\epsilon}^{\epsilon} D(y) + o(1) = h(y) + o(1)$$

für $\lambda \to \infty$, wobei $o(1) \to 0$ gleichmäßig.$\boxdot$
Die rechte Seite von (1.3) ist gleich dem Grenzwert von der Folge der Integralen

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \tilde{f}\bar{\tilde{g}} d\xi = \int\int\int_{-\alpha}^{\alpha} \exp(-2\pi\imath\xi(x-y)) d\xi f(y) dy \bar{g}(x) dx. \tag{1.7}$$

Wir haben die Ordnung der Integralen mit Hilfe von Fubinischem Satz umgetauscht. Wir setzen $g = f$ und nehmen an, daß f stetig ist und außerhalb eines Intervall verschwindet. Dann strebt das Integral $\int(\cdot)d\xi$ gleichmäßig gegen f nach dem Lemma 1. Es folgt, daß das Integral (1.7) gegen $\int|f|^2dx$ konvergiert. Für eine beliebige Funktion $f \in L_1 \cap L_2$ wählen wir eine Folge der stetigen Funktionen h_n so, daß $h_n(x) = 0$ für $|x| > n$ und gleichzeitig

$$\|f - h_n\|_2 \to 0, \quad \|f - h_n\|_1 \to 0. \tag{1.8}$$

gelten. Dazu wählen wir h_n so nah zu f, daß $\|f - h_n\| = o(n^{-1/2})$. Dann gilt der zweite Teil von (1.8) nach dem Schwarzschen Ungleichung. Die Parsevalsche Gleichung erfüllt für $h_n - h_m$. Das impliziert, daß die Folge $\tilde{h}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ im Raum $L_2(\mathbb{R}^*)$ fundamental ist. Deshalb besitzt die Folge $\tilde{h}_n$ eines Limeselement $\varphi \in L_2$. Außerdem folgt aus dem ersten Teil von (1.8) und aus dem Satz 1.1 eine gleichmäßige Konvergenz $\tilde{h}_n \to \tilde{f}$. Wir schließen daraus, daß $\varphi = \tilde{f}$. Ein Übergang zu Grenze in der Gleichung $\|\tilde{h}_n\| = \|h_n\|$ gibt

$$\|\tilde{f}\|^2 = \|\varphi\|^2 = \|f\|^2$$

Dieselbe Gleichungen gelten auch für g und $f + g$,die zusammen implizieren (1.3). $\boxdot$

1.2 Plancherel-Fouriertransformation

Satz 1.2.1 (Plancherel) *Für eine beliebige Funktion $f \in L_2$ strebt die Folge*

$$\tilde{f}_\alpha(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \exp(-2\pi\imath\xi x)f(x)dx$$

im Mittel zu einem Element $\tilde{f} \in L_2$, die die Plancherelsche Gleichung (1.4) erfüllt. Falls $f \in L_1 \cap L_2$ stimmt die Plancherel-Fouriertransformierte mit dem Integral (1.1) überein.

Beweis. Die folgende Ungleichung

$$\int |f|dx \le \sqrt{b-a}\left(\int |f|^2dx\right)^{1/2} \tag{2.1}$$

für eine beliebige Funktion $f \in L_2$ mit $\operatorname{supp} f \subset [a, b]$ werden wir oft benutzen. Dies folgt aus der Schwarzsche Ungleichung. Wir setzen $f_\alpha(x) =$

$f(x)$ falls $|x| \leq \alpha$ und sonst $f_\alpha(x) = 0$. Dann erhalten wir $\tilde{f}_\alpha = F(f_\alpha)$. Die Folge f_α strebt in Mittel gegen f für $\alpha \to \infty$, außerdem ist diese Folge fundamental in L_2. Es folgt aus (2.1), daß $f_\alpha \in L_1$ gilt. Deswegen dürfen wir die Parsevalsche Gleichung anwenden: $\|\tilde{f}_\alpha\| = \|f_\alpha\|$, somit ist die Folge $\tilde{f}_\alpha$ fundamental in L_2. Dies hat ein eindeutiges Grenzelement φ. ⊡
Bemerkung. Wir nennen das Element φ die Plancherel-Fouriertransformierte von f. Die Folge $\tilde{f}_\alpha$ strebt nicht notwendig in jedem Punkt x zur Plancherel-Fouriertransformierte $\tilde{f} := \varphi$. Zum Beispiel, für $f(x) = 1/\sqrt{x^2+1}$ haben wir $\tilde{f}_\alpha(0) \to \infty$. Gemäß dem Satz von Carleson (1966) für beliebiger $f \in L_2$ strebt die Folge $\tilde{f}_\alpha$ zu $\tilde{f}$ fast überall. Nach einem Beispiel von Kolmogorov (1926) gibt es eine Funktion $f \in L_1$ so, daß die Folge $\tilde{f}_\alpha$ in jedem Punkt keine Grenze hat.

1.3 Inversion

Die Transformation

$$F^*(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^*} \exp(2\pi\imath x\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

ist formal konjungierte zur Fouriertransformation F. Wir nennen diese Transformation die *konjungierte* Fouriertransformation. Offenbar gilt die Gleichung $F^*(\varphi)(x) = F(\varphi)(-x)$. Nach der Plancherelschen Theorie für eine beliebige $\varphi \in L_2$ konvergiert die Folge der Integrale

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(\xi)\exp(2\pi\imath x\xi)d\xi$$

im Mittel zu einer Funktion $F^*(\varphi) \in L_2$ (und also fast überall nach dem Satz von Carleson). Ebenso ist der Operator F^* unitär.

Satz 1.3.1 *Die Operatoren F, F^* sind zueinander inverse, d.h.*

$$F^*F = Id, \quad FF^* = Id$$

wobei Id der identische Operator in $L_2(\mathbb{R})$ oder in $L_2(\mathbb{R}^*)$ bedeutet.

Beweis. Die zweite Gleichung ist ganz änlich zu der ersten. Um die erste zu prüfen, bemerken wir, daß der Operator F^*F eine Isometrie ist. Deshalb ist es hinreichend die erste Gleichung nur auf einer Untermenge $A \subset L_2$

zu beweisen, die eine dichte Untermenge von L_2 ist. Sei A die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Dann ist $F(a)$ die gewöhnliche Fouriertransformierte für beliebige $a \in A$, somit $F^*F(a)$ stimmt mit der Grenze im Mittel der Folge der Integrale

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \exp(2\pi\imath x\xi) \int \exp(-2\pi\imath\xi y)a(y)dyd\xi = \int \frac{\sin(2\pi\alpha(x-y))}{\pi(x-y)}a(y)dy$$

überein (siehe (1.5)). Nach Lemma strebt die rechte Seite gegen $a(x)$. Dies bestätigt die Gleichung $F^*F(a) = a$. $\boxdot$

1.4 Eigenschaften der Fouriertransformation

Für ein $y \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit T_y der Translationoperator

$$T_y f(x) = f(x+y)$$

Das ist eine Isometrie in L_2.

Satz 1.4.1 *Für eine beliebige $f \in L_2$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$F(T_z f)(\xi) = \exp(2\pi\imath\xi z)F(f)(\xi)$$

Beweis ist offenbar.

Satz 1.4.2 *Wenn eine Funktion $f \in L_1$ absolut stetig ist und die Ableitung $f' = df/dx$ gleichfalls zu L_1 gehört, gilt die Gleichung*

$$\tilde{f}'(\xi) = 2\pi\imath\xi\tilde{f}(\xi)$$

Beweis. Die Bedingungen implizieren, daß f stetig ist und $f \to 0$ für $|x| \to \infty$ gilt. Wir integrieren teilweise das Integral $\int_{-r}^{r} \exp(-2\pi\imath\xi x)f'(x)dx$ und lassen r zu ∞ streben. $\boxdot$

Folglich gilt $\tilde{f}(\xi) = o(|\xi|^{-1})$. Auch gilt $\tilde{f}(\xi) = o(|\xi|^{-k})$ für eine natürliche Zahl k, falls die Funktionen $f, f', ..., f^{(k)}$ zu L_1 gehören. Je glatter eine Funktion f ist, desto schneller nimmt ihre Fouriertransformierte $\tilde{f}$ im Unendlichen ab.

Beispiel 1. Sei $f(x) = \exp(-|x|)$. Die Fouriertransformierte ist leicht zu berechnen: $\tilde{f}(\xi) = 2/(1+4\pi^2\xi^2)$. Wir bemerken, daß $f' \in L_1$ gilt, aber die zweite Ableitung von f existiert nicht.

Eine symmetrische Behauptung sieht folgendermaßen aus:

Satz 1.4.3 *Seien f, $xf \in L_1$. Dann hat die Fouriertransformierte von f eine stetige Ableitung*

$$\frac{dF(f)}{d\xi} = -2\pi\imath F(xf)$$

Beweis ist offenbar.
Beispiel 2. Die Funktion $f_\lambda(x) = (1+x^2)^\lambda$ gehört zu L_1 für $\lambda < -1/2$ und gehört zu L_2, falls $\lambda < -1/4$. Die Fouriertransformierte ist gleich

$$\tilde{f}_\lambda(\xi) = \frac{2(\pi|\xi|)^{-\lambda-1/2}}{\Gamma(-\lambda)} K_{-\lambda-1/2}(2\pi|\xi|)$$

wobei K_ν eine Besselische Funktion von imagienere Verändliche ist. Diese Funktion verschwindet sehr schnell $K_\nu(\xi) = O(\exp(-a|\xi|))$ für $\xi \to \infty$ und ein beliebiges $a < 1$. Darum ist die Funktion $\tilde{f}_\lambda$ summierbar außerhalb einer beliebigen Umgebung vom Punkt $\xi = 0$, wo besizt sie eine Asymptotik $\tilde{f}_\lambda(\xi) = (c + o(1))|\xi|^{-\lambda-1/2}$.
Für eine beliebige Konstante $a \neq 0$ betrachten wir die Homothetietransformation der Funktionen $\Gamma_a f(x) = f(ax)$. Das schafft einen Operator Γ_a in L_2 mit der Norm $\|\Gamma_a\| = |a|^{-1/2}$.

Satz 1.4.4 *Es gilt für eine beliebige $f \in L_2$*

$$F(\Gamma_a f) = |a|^{-1}\Gamma_{1/a}F(f).$$

Beweis ist unmittelbar.
Beispiel 3. Für die Gaußsche Funktion $f(x) = \exp(-a\pi x^2)$, $a > 0$ finden wir die Transformierte $\tilde{f}(\xi) = a^{-1/2}\exp(-\pi/a\xi^2)$.
Faltung. Es seien $f, g \in L_2$. Das Integral

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \tag{4.1}$$

heißt *Faltung* von f und g. Das ist gut bestimmt für jedes $x \in \mathbb{R}$ gemäß die folgende Abschätzung:

$$|f * g| \leq \|f\|_2\|g\|_2 \qquad (4.2).$$

wo benutzen wir die Schwarzsche Ungleichung. Falls $f, g \in L_1$ gilt, konvergiert (4.1) fast überall auf $x \in \mathbb{R}$ und gilt

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1. \tag{4.3}$$

Die Abschätzung (4.3) folgt einfach aus dem Fubinische Satz.

Satz 1.4.5 (Faltungssatz) *Für beliebige* $f, g \in L_2$ *gilt die Gleichung*

$$F(f * g) = F(f)F(g). \tag{4.4}$$

Falls die Funktionen $F(f), F(g)$ *zum Raum* L_1 *gehören, gilt darüberhinaus*

$$F(fg) = F(f) * F(g) \tag{4.5}$$

Diese Gleichungen gelten ebenso für die Transformation F^* *statt* F.

Beweis. Die Gleichung (4.4) ist einfachere:

$$F(f * g)(\xi) = \int \exp(-2\pi\imath\xi x) \int f(x-y)g(y)dydx =$$

$$\int \exp(-2\pi\imath\xi z) \int \exp(-2\pi\imath\xi y) f(z)g(y)dydz.$$

Die Koordinatentransformation $z = x - y$ ist möglich, weil der Integrand summierbar gegen das Lebesguesche Mass $dydx$ auf Ebene $\mathbb{R}^2$ ist. Die rechte Seite stimmt offenbar mit $F(f)F(g)$ überein. Um (4.5) zu prüfen, wenden wir (4.4) mit F^* statt F auf die Funktionen $F(f), F(g)$ an:

$$F^*(F(f) * F(g)) = F^*(F(f))F^*(F(g)) = fg.$$

Die rechte Seite gehört zu L_1, schließlich darf man die Plancherelsche Transformation anwenden:

$$F(fg) = FF^*(F(f) * F(g)). \tag{4.6}$$

Die Faltung $F(f) * F(g)$ ist nach (4.3) eine summierbare Funktion, die beschränkte wegen (4.2) ist. Deshalb liegt die Funktion $F(f) * F(g)$ in L_2 und stimmt mit die rechte Seite von (4.6) überein.

Bemerkung. Die Gleichung (4.5) gilt ebenso ohne der Voraussetzung $F(f), F(g) \in L_1$.

1.5 Fouriertransformation der Funktionen mit kompaktem Träger

Satz 1.5.1 (Paley-Wiener) *Verschwindet eine Funktion* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *außerhalb eines Intervall* $[-a, a]$, *so hat ihre Fouriertransformierte eine analytische Fortsetzung* $\tilde{f}(\zeta)$ *auf die komplexen Ebene* $\mathbb{C}$, *so daß*

$$|\tilde{f}(\zeta)| \leq C \exp(2\pi|\eta|), \quad \zeta = \xi + \eta\imath. \tag{5.1}$$

Umgekehrt, gibt es eine ganze analytische Funktion φ auf $\mathbb{C}$, die die Bedingung (5.1) erfüllt und zum Raum L_2 auf der reellen Achse gehört, so ist $\varphi = \tilde{f}$, wobei f zum Raum L_2 gehört und für $|x| > a$ verschwindet.

Beispiel 4. Wir benzeichnen

$$(1 - x^2)_+ := \max\{1 - x^2, 0\}$$

und betrachten die Funktion $f_\lambda := (1 - x^2)_+^\lambda$ für reelle λ. Sie hat einen kompakter Träger: $\operatorname{supp} f_\lambda = [-1, 1]$ und gehört zu L_2, falls $\lambda > -1/2$. Die Plancherelsche Fouriertransformation lautet

$$\tilde{f}_\lambda = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^\lambda \exp[-2\pi\imath\xi x)dx = \Gamma(\lambda + 1)\pi^{-\lambda}|\xi|^{-\lambda-1/2} J_{\lambda+1/2}(\xi)$$

wobei J_ν die Besselsche Funktion von Ordnung ν ist. Das Produkt $|\xi|^{-\nu} J_\nu(\xi)$ hat für beliebige Ordnung ν eine ganze analytische Fortsetzung als eine Funktion von ξ.

Beweis. Wir setzen

$$\tilde{f}(\zeta) = \int \exp(-2\pi\imath\zeta x) f(x)dx. \tag{5.2}$$

Die erste Behauptung folgt aus der folgende Abschätzung:

$$|\tilde{f}(\zeta)| \leq \int_{-a}^{a} |\exp(-2\pi\imath\zeta x)||f(x)|dx \leq \exp(2\pi a|\eta|) \int |f|dx$$

Zusammen mit (2.1) impliziert dieses (5.1).

Um den zweite Teil zu beweisen, setzen wir zuerst voraus, daß die folgende stärkere Abschätzung

$$|\varphi(\zeta)| \leq \frac{C \exp(2\pi a|\eta|)}{\xi^2 + 1} \tag{5.3}$$

erfüllt wird. Dann gehört φ zu L_1 auf jeder waagerechten Linie $\eta = c$ und gilt die Gleichung

$$f(x) = \int \exp(2\pi\imath x\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int \exp(2\pi\imath x\zeta)\varphi(\zeta)d\xi,$$

wo $f = F^*(\varphi)$ und $\zeta = \xi + \imath c$ für beliebiger reeller c gemäß des Cauchysche Satzes gelten. Zusammen mit (5.3) impliziert es, die Abschätzung

$$|f(x)| \leq C \exp(2\pi(a|c| - xc) \tag{5.4}$$

für jedes c. Im Falle $x > a$ wählen wir $c \to \infty$. Wir schließen aus (5.4), daß $f(x) = 0$. Im Falle $x < -a$ betrachten wir eine Folge $c \to -\infty$.
Im allgemeinem Fall benutzen wir eine Hilfsfunktion h_ϵ, die der Graph eines gleichseitiges Dreieck mit der Grundseite $[-\epsilon, \epsilon]$ ist und Inhalt 1 hat. Wir berechnen die Fouriertransformierte

$$\tilde{h}_\epsilon(\xi) = \left(\frac{\sin(\pi\epsilon\xi)}{\pi\epsilon\xi}\right)^2 \tag{5.5}$$

(Diese heißt der Fejersche Kern.) Es ist offenbar, daß

$$|\tilde{h}_\epsilon(\xi)| \leq C\frac{\exp(2\pi\epsilon|\eta|)}{\xi^2+1},$$

folglich erfüllt das Produkt $\psi := \varphi\tilde{h}_\epsilon$ die Abschätzung (5.3) mit $a+\epsilon$ statt a. Nach dem Obengesagt verschwindet die Funktion $F^*(\psi) = f * h$ außerhalb des Intervalls $[-a-\epsilon, a+\epsilon]$. Wir vermuten, daß

$$\|f - f * h_\epsilon\|_2 \to 0 \qquad (5.6).$$

für $\epsilon \to 0$. Dieses impliziert, daß die Grenzfunktion f außerhalb $[-a-\epsilon, a+\epsilon]$ für beliebiges positives ϵ fast überall verschwindet, q.e.d. So müssen wir nur (5.6) nachweisen. Wir schreiben

$$\|f - f * h_\epsilon\|_2 = \|\varphi - \varphi\tilde{h}_\epsilon\|_2$$

auf Grund der Parsevalschen Gleichung (1.4). Die rechte Seite strebt gegen Null. Das folgt aus dem Lebesgueschen Satz über dominierte Konvergenz, weil die Folge der Funktionen $\tilde{h}_\epsilon$ beschränkt ist und gleichmäßig gegen 1 auf jedem endlichen Intervall konvergiert. $\boxdot$

1.6 Der Schwartzsche Raum

Laurent Schwartz fürt den Raum S in seiner Distributiontheorie ein. Dies ist nützbar für Anwendungen. S ist der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen φ auf $\mathbb{R}$, die nebst ihren Ableitungen beliebiger Ordnung stärker als jede beliebige Potenz von $1/|x|$ gegen Null streben. Somit genügt jede Funktion $\varphi \in S$ Abschätzungen der Gestalt

$$|x^k\varphi^{(q)}(x)| \leq C(k,q)$$

für beliebige $k, q = 0, 1, 2, \ldots$. Die Konvergenz fürt man in Raum S auf die folgende Weise ein. Man nennt die Folge φ_m konvergent gegen eine Funktion, wenn die Ableitungen beliebiger Ordnung der Funktionen φ_m in jedem Intervall gleichmäßig gegen die entsprechende Ableitung der Funktion φ konvergiert und man in der Abschätzungen

$$|x^k \varphi_m^{(q)}(x)| \leq C(k, q)$$

die Konstanten $C(k, q)$ unabhängig von m wählen kann. Die Grenzfunktion φ gehört auch zum Raum S, was aus (6.1) für $m \to \infty$ folgt.
Beispiel 1. Die Funktion $\varphi(x) = x^k \exp(-ax^2)$ gehört zu S für beliebige k und $a > 0$.
Beispiel 2. Sei

$$\varphi(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) \quad \text{für } -1 < x < 1$$

und $\varphi(x) = 0$ sonst. Die Funktion φ hat kompakten Träger $\operatorname{supp}\varphi = [-1, 1]$ und besitzt die stetige Ableitung beliebiger Ordnung, folglich $\varphi \in S$ gilt.

Satz 1.6.1 *Die Fouriertransformation und ebenso die konjungierte Transformation definieren stetigen Operatoren*

$$F : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R}^*), \quad F^* : S(\mathbb{R}^*) \to S(\mathbb{R}),$$

die zueinander inverse sind.

Beweis. Die beiden Operatoren sind gut bestimmt, weil S ein Teil des Raumes L_1 ist. Wir wollen die Inklusion $F(S) \subset S$ beweisen. Für eine beliebige Funktion $\varphi \in S$ liegt jede Ableitung $\varphi^{(q)}$ auch in S und folglich in L_1. So kann man Satz 1.4.1 anwenden. Es folgt daraus, daß $\tilde{\varphi} = o(|\xi|^{-q})$ für ein beliebiges q gilt. Auch gehört die Funktion $x^k\varphi$ zu S, so ergibt sich mit dem Satz 1.4.1, daß $\tilde{\varphi}^{(k)}(\xi) = o(|\xi|^{-q})$ für beliebigen k, q. Das bedeutet, daß die Funktion $\tilde{\varphi}$ in S liegt. Man kann leicht mit Hilfe der Ungleichung (1.2) prüfen, daß der Operator $F : S \to S$ stetig ist.
Analog überlegt man für den Operator F^*. Er ist zu F inverse gemäß der Inversionsatz.⊡

1.7 Der Fall mehrerer Veränderlicher

Die bisheringen Konstruktionen und Ergebnisse können ohne Einschränkungen auf den Fall von n unabhängigen Verändlichen übertragen werden. Die Fouriertransformierte der summierbaren Funktion $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ wird durch das Lebesguesche Integral

$$\tilde{f}(\xi_1, ..., \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, ..., x_n) \exp(-2\pi\imath(\xi_1 x_1 + ... + \xi_n x_n))dx$$

oder kurzer durch die Formel

$$\tilde{f}(\xi) = \int f(x) \exp(-2\pi\imath\xi x)dx$$

definiert, wobei wir mit ξx die Größe $\xi_1 x_1 + ... + \xi_n x_n$ bezeichnen. Der Vektor $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ ist eines Element des Dualraums $\mathbb{R}^{n*}$.
Insbesondere hat der Satz 1.4.2 die folgende Verallgemeinerung

Satz 1.7.1 *Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ absolut stetig in Bezug auf einer Verändlichen x_k, $1 \leq k \leq n$ und $\partial f/\partial x_k \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt die Gleichung*

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(\xi) = 2\pi\imath\xi_k F(f)(\xi).$$

Sei K ein konvexes Kompaktum in $\mathbb{R}^n$. Man betrachtet die Funktion

$$H_K(\xi) = \max\{\xi x,\ x \in K\}$$

auf den Dualraum $\mathbb{R}^{n*}$. Sie heißt die Stützfunktion von K.

Satz 1.7.2 (Paley-Wiener für den n-dimensionalen Raum) *Verschwindet eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ außerhalb eines konvexes Kompaktums K, so hat ihre Fouriertransformierte eine analytische Fortsetzung $\tilde{f}(\zeta)$ auf den ganzen komplexen Raum $\mathbb{C}^n$, so daß die Abschätzung*

$$|\tilde{f}(\zeta)| \leq C \exp(2\pi H_K(\eta)) \tag{7.1}$$

gilt, wobei $\zeta = \xi + \eta\imath$ gilt.
Umgekehrt, gabe es eine analytische Funktion φ auf $\mathbb{C}^n$ die die Bedingung (7.1) erfüllt und zum Raum $L_2(\mathbb{R}^n)$ auf dem reellen Unterraum von $\mathbb{C}^n$ gehört, so ist $\varphi = \tilde{f}$, wobei f zum Raum L_2 gehört und für $x \in \mathbb{R}^n \backslash K$ verschwindet.

Kapitel 2

Integralen der oszillierenden Dichten

Inhaltsverzeichnis

2.1 Sattelpunkt Methode für Fresnelsche Integral

Betrachten ein Integral von der Gestalt

$$I(\varphi, a; k) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\imath k \varphi(x)) a(x) dx, \tag{1.1}$$

wobei φ eine reelle glatte Funktion ist (*Phase*) und a eine glatte summierbare Funktion ist (*Amplitude*). Die Dichte $\exp(k\varphi\imath)adx$ mit großem Parameter k heißt *oszillierende* Dichte. Das Problem besteht dabei, eine asymptotische Entwicklung von (1.1) für $k \to \infty$ zu finden.
Falls $\varphi(x) = x$ ist, stimmt das Integral (1.1) mit der Fouriertransformation

aus Kapitel 1 überein. Nach Satz 1.4.1 gilt $I(x,a;k) = o(k^{-q})$ falls die Funktion a summierbare Ableitungen $a',...,a^{(q)}$ hat. Falls φ eine nichtlineare aber monotone Funktion ist und φ' nirgends verschwindet, kann man neue Koordinaten $y = \varphi(x)$ benutzen, wobei $x = \psi(y)$ sei. Dann gilt

$$I(\varphi, a; k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\imath ky) a(\psi(y)) |\psi'(y)| dy = I(y, a|\psi'|; k)$$

nach dem Jacobischen Satz. Somit wird das Problem auf dem Fall der linearen Phase reduziert.

Im allgemeinen hat die Phase kritische Punkte. Ein Punkt y, in dem die Ableitung φ' verschwindet, heißt *kritischer* oder *Sattelpunkt*. Der Punkt y wird kritisch der Ordnung $m \geq 1$ bennent, falls die Gleichungen $\varphi'(y) = ... = \varphi^{(m)}(y) = 0$ bestehen, aber $\varphi^{(m+1)} \neq 0$ gilt.

Manche Methoden sind bekannt um eine Asymptotik des Integrals des oszillierende Dichte mit kritischn Punkten zu entwickeln, insbesondere die Laplacesche Methode und die Methode von Kelvin-Debye.

Wir studieren zuerst das *Fresnelsche* Integral

$$I(x^2, a; k) = \int \exp(\imath kx^2) a(x) dx \tag{1.1}$$

Die Phase hat einen kritischen Punkt $x = 0$ der Ordnung 1.

Satz 2.1.1 *Ist die Amplitude a $2q$-oft differenzierbar für ein $q > 0$ und sind ihr Ableitungen summierbar und beschränkt auf $\mathbb{R}$, so gilt*

$$I(x^2, a; k) = \sqrt{\frac{\pi\imath}{k}} \sum_{0}^{q-1} \frac{a^{(2j)}(0)}{j} \left(\frac{\imath}{4k}\right)^j + k^{-q} R_q(k), \tag{1.2}$$

wobei das Restglied gleichmaßig beschränkt ist:

$$|R_q(k)| \leq C_q \sum_{1}^{2q-1} \|a^{(j)}\|_1 + 4^{-q} \|a^{(2q)}\|_\infty. \tag{1.3}$$

Beweis. Wir führen in (1.1) die fallenden Faktoren $\exp(-\epsilon x^2)$ ein und bemerken, daß

$$I(x^2, a; k) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int \exp((-\epsilon + \imath k) x^2) a(x) dx$$

gilt. Das folgt aus dem Lebesguesche Satz, weil die Amplitude summierbar ist. Wir schreiben das Integral der rechte Seite von (1.3) in der folgende Form:

$$\int \exp(\lambda x^2)a(x)dx = \int \exp(\lambda x^2)a(0)dx + \int \exp(\lambda x^2)xb(x)dx \tag{1.4}$$

wobei muß man $\lambda = -\epsilon + \imath k$ und $b(x) = [a(x) - a(0)]/x$ substituieren. Alle Integrale konvergieren dank des Faktors $\exp(-\epsilon x^2)$. Wir berechnen das erste Glied der rechte Seite (siehe Ab.1.4, Beispiel 3):

$$\int \exp(\lambda x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon - \imath k}}$$

wobei der zur obenen Halbebene gehörende Zweig der Wurzel gewählt wird. Die komplexe Zahl $\sqrt{\pi\imath/k}$ ist der Limes der rechte Seite für $\epsilon \to 0$, wobei $\sqrt{\imath} = \exp(\pi\imath/4) = (1+\imath)/\sqrt{2}$. gilt. Wir integrieren das zweite Glied von (1.4) partiell:

$$\int \exp(\lambda x^2)xb(x)dx = -(2\lambda)^{-1}\int \exp(\lambda x^2)a_1(x)dx, \tag{1.5}$$

wobei ein neues Fresnelsches Integral mit der Amplitude $a_1 = b'$ aufkommt. Wir widerholen diese Transformation und bekommen die Amplituden $a_2, ..., a_q$ so, daß

$$I(x^2, a; k) = \sqrt{\frac{\pi\imath}{k}}\left(a(0) + \frac{a_1(0)}{-2\imath k} + \frac{a_2(0)}{(-2\imath k)^2} + ... + \frac{a_{q-1}(0)}{(-2\imath k)^{q-1}}\right) + $$
$$+\frac{I(x^2, a_q; k)}{(-2\imath k)^q}.$$

Man kann leicht prüfen, daß $a_j'(0) = a^{(2j)}/(2j)!!$ für beliebig $j > 0$. Schließlich bekommen wir die Entwicklung (1.2) mit $R_q = (-4\imath)^{-q} I(x^2, a_q; k)$.

Hilfsatz 1 *Die Amplitude a_q erfü llt die Ungleichungen*

$$\|a_q\|_\infty \leq \|a^{(2q)}\|_\infty \tag{1.6}$$

$$\|a_q\|_1 \leq C_q \sum_1^{2q} \|a^{(j)}\|_1 + \|a^{(2q)}\|_\infty \tag{1.7}$$

wobei die Konstante C_q nur von q abhängt.

Die Abschätzung (1.7) impliziert (1.3). $\boxdot$
Schließlich bekommen wir die Entwicklung (1.2) mit $R_q = (-4\imath)^{-q} I(x^2, a'_q; k)$.
Beweis des Hilfsatzes. Wir haben

$$a(x) = a(0) + a'(0)x + \int_0^x a''(y)(x-y)dy$$

nach dem Taylor-Cauchysche Satz. Deswegen gilt

$$a_1(x) = (x^{-1}\int_0^x a''(y)(x-y)dy)' = \int_0^1 a''(tx)tdt.$$

Damit folgt die Abschätzung (1.6) für $q = 1$. Gleichartig prüft man (1.6) im allgemeinen Fall.
Die Ungleichung (1.6) impliziert die Abschätzung für das Integral

$$\int_{-1}^1 |a_q|dx \le \|a_q\|_\infty \le \|a^{(2q)}\|_\infty \tag{1.8}$$

Wir haben $a_1(x) = x^{-1}a'(x) - x^{-2}(a(x) - a(0))$ außerhalb der Punkt $x = 0$, deshalb

$$\int_0^\infty |a_1(x)|dx \le \int_1^\infty |a'(x)|dx + \int_1^\infty x^{-2}dx \int_1^\infty |a'(x)|dx.$$

Eine änliche Gleichung gilt für die Halbgerade $\infty < x < -1$, damit

$$\int_{\mathbb{R}} |a_1(x)|dx \le \|a''\|_\infty + 2\|a'\|_1.$$

Das prüft die Behauptung für $q = 1$.
Wir schreiben im allgemeinen Fall

$$a_q(x) = \sum_0^q c_j \frac{a^{(j)}(x)}{x^{2q-j}} + \sum_0^q d_j \frac{a^{(j)}(0)}{x^{2(q+1-j)}},$$

wobei c_j, d_j gewissere rationelle Zahlen sind. Daraus folgt die Ungleichung

$$\int_{|x|>1} |a_q|dx \le \|a^{(2q)}\|_\infty + \sum_0^q c_j\|a^{(j)}\|_1 + \sum_0^q d_j(2q+1-j)^{-1}|a^{(j)}(0)|$$

Das impliziert zusammen mit (1.8) die Abschätzung (1.7) kraft der Ungleichung

$$|f(0)| \leq \frac{1}{2}\|f'\|_1 \tag{1.9}$$

wobei $f, f' \in L_1$ gelten. Jetzt haben wir nur (1.9) zu prüfen. Die Funktion f ist stetig und eine Folge $x_n \to \infty$ existiert so, daß $f(x_n) \to 0$. Wir haben

$$|f(0) - f(x_n)| \leq \int_0^{x_n} |f'(y)|dy \leq \int_0^{\infty} |f'|dy$$

Wir lassen n gegen ∞ streben und ergeben (1.9), falls

$$\int_0^{\infty} |f'|dy \leq \frac{1}{2}\|f'\|_1 \tag{1.10}$$

gilt. Falls erfüllt (1.9) nicht, diese Ungleichung für die Funktion $\hat{f}(x) = f(-x)$ vollzieht. Das impliziert (1.9) gleichfalls. ⊡

Bemerkung. Man erhä lt auch für das Integral $I(-x^2, a, k)$ eine ä hnliche Entwicklung durch die Gleichung $I(-x^2, a, k) = I(x^2, a, -k)$.

2.2 Mehrere kritische Punkte

Wir nehmen jetzt an, daß die Phase φ nur einfache kritische Punkte $x_1, ..., x_p, ...$ auf der Menge $\operatorname{supp} a$ hat. Wir wählen eine endliche Zerlegung der Einheit $1 = \sum h_\nu$ auf $\operatorname{supp} a$ so, daß für jedes ν die Funktion h_ν unendlich oft differenzierbar ist und der Träger $\operatorname{supp} h_\nu$ entweder keinen kritischen Punkt oder nur einen kritischen Punkt x_p enthält. Damit erhalten wir

$$I(\varphi, a; k) = \sum I(\varphi, h_\nu a; k)$$

Falls $\operatorname{supp} h_\nu$ keinen kritischen Punkt enthält, gibt das zugehörige Glied eine triviale Asymptotik. Sei x_p ein Punkt in $\operatorname{supp} h_\nu$. Dann kann man neue Koordinaten $y = \pm\sqrt{|\varphi(x) - \varphi(x_p)|}$ ein füren. Das ist eine glatte Funktion in x und es gilt $dy/dx \neq 0$ (siehe Abt.2.4). Folglich ergibt sich

$$I(\varphi, h_\nu a; k) = \exp(\imath k \varphi(x_p)) I(\pm y^2, b_p; k),$$

wobei $b_p = h_\nu a |dx/dy|$ ist. Wir wenden Staz 2.1.1 auf jeden kritischen Punkt x_p mit z.B. $q = 1$ an und bekommen die Entwicklung

$$I(\varphi, a; k) = \sqrt{\frac{\pi \imath}{k}} \sum_p \exp(\imath k \varphi(x_p))[a(x_p) + ... + k - qR_q(k)].$$

2.3 Entarteter kritisch Punkt

Ein kritisch Punkt x_0 der Phase φ heißt *entarteter*, falls die Ordnung des Punktes grösser 1 ist. Wir studieren hier ein Integral in der Gestalt

$$I_0(x^m, a; k) = \int_0^\infty \exp(\imath k x^m) a(x) dx, \tag{3.1}$$

bei dem die Phase $\varphi(x) = x^m$ einen kritischen Punkt der Ordnung $m-1$ am Anfang des Intervall hat.

Satz 2.3.1 *Seien $m > 2, q$ natürliche Zahlen. Sind die Amplitude nebst ihrer Ableitungen $a^{(j)}$ bis zur Ordnung mq summierbar, so gilt*

$$I_0(\pm x^m, a; k) = \frac{1}{m} \sum_0^{mq-1} \Gamma\left(\frac{j+1}{m}\right) \left(\frac{\pm\imath}{k}\right)^{(j+1)/m} \frac{a^{(j)}(0)}{j!} + k^{-q} R_q(k) \tag{3.2}$$

wobei $(\pm\imath)^{(j+1)/m} = \exp(\frac{\pm(j+1)\pi\imath}{2m})$ gilt und die Restglied R_q gleichmäßig beschränkt ist:

$$|R_q(k)| \leq C_{m,q} \max_{0 \leq j \leq mq} \|a^{(j)}\|_1$$

Beweis. Nach dem Lebesguesche Satz haben wir

$$I_0(x^m, a; k) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_0^\infty I_0(z^m, a; k),$$

wobei $z = \theta x$, $\theta = \exp(\epsilon\imath)$ gesetzt wurde und der Integrand auf der rechte Seite einen schnell fallenden Faktor $\exp(\imath k z^m)$ hat. Aus der Taylor Entwicklung folgt, daß

$$a(x) = \sum_0^{m-2} \frac{a^{(j)}}{j!}(0) x^j + x^{m-1} a_1(x)$$

gilt, wobei die Funktion a_1 $m(q-1)$-mal differenzierbar ist und alle Ableitungen $a_1^{(j)}$, $j > 0$ summierbar sind. Danach schreiben wir

$$I_0(z^m, a; k) = \sum_0^{m-2} \frac{a^{(j)}(0)}{j!} I_0(z^m, x^j; k) + I_0(z^m, x^{m-1} a_1; k) \tag{3.3}$$

Wir stellen das erste Glied in folgender Gestalt

$$\theta^{j+1} I_0(z^m, x^j; k) = \int_0^\infty \exp(\imath z^m) z^j dz = \int_{\arg z = \epsilon} \exp(\imath k z^m) z^j dz \tag{3.4}$$

dar. Der Integrand $\exp(\imath k z^m) z^j$ nimmt schnell im Sektor $0 < \arg z < \pi/m$ ab, darum stimmen die Integralen entlang der Strahlen $\arg z = \epsilon$ und $\arg z = \delta$ für $\delta = \pi/2m$ nach Cauchyschen Satz überein. Wir berechnen

$$\int_{\arg z=\delta} \exp(\imath k z^m) z^j dz = \eta^{j+1} \int_0^\infty \exp(-kt^m) t^j dt = \Gamma\left(\frac{j+1}{m}\right) \eta^{j+1} k^{-\frac{j+1}{m}}$$

wobei $\eta = \exp(\pi\imath/2m) = \imath^{1/m}$ gilt. Das Integral auf der rechte Seite von (3.4) ist gleich

$$\theta^{j+1} \int \exp(-kt^m) t^j dt = \theta^{j+1} \Gamma\left(\frac{j+1}{m}\right) k^{-(j+1)/m}$$

nachdem der Limes der Summe in der rechte Seite von (3.3) für $\epsilon \to 0$ gleich

$$\sum_{j=0}^{m-2} \Gamma\left(\frac{j+1}{m}\right) \frac{a^{(j)}(0)}{j!} \left(\frac{i}{k}\right)^{\frac{j+1}{m}}$$

Dann integrieren wir das zweite Glied in (3.3) partiell:

$$I_0(z^m, x^{m-1}a_1; k) = \frac{-\theta^{-m}}{\imath km} I_0(z^m, a_1'; k) \tag{3.5}$$

wobei die Amplitude a_1' die summierbare Ableitungen bis zur Ordnung $m(q-1)$ hat. Falls $q = 1$ gilt passieren wir zum Limes für $\epsilon \to 0$. So ergeben wir (3.2), wobei $R_1(k) = I_0(x^m, a_1'; k)$ gilt. Sonst wenden wir dasselbe Verfahren für das rechte Seite von (3.5) an und erhalten so die Behauptung des Satzes. $\boxdot$

Eines Integral entlang ganze Linie ist gleich die Summe

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(\imath k x^m) a(x) dx = \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^\infty\right) \exp(\imath k x^m) a(x) dx =$$

$$= I_0(x^m, a; k) + I_0((-x)^m, \hat{a}; k)$$

wobei $\hat{a}(x) = a(-x)$ gilt. Wir wenden die asymptotische Entwicklungen von der Gestalt (3.2) für beide Integralen an und bekommen für jede gerade $m = 2\mu$ die Entwicklung

$$I(x^m, a; k) = \frac{2}{m} \sum_0^{\mu q-1} \Gamma\left(\frac{2j+1}{m}\right) \frac{a^{(2j)}(0)}{2j!} \frac{e(m,j)}{k^{(j+1)/m}} + k^{-q} R_q(k) \tag{3.6}$$

wobei $e(m,j) = \exp(\frac{(2j+1)\pi\imath}{2m})$ gilt und nur die Ableitungen der Phase von gerade Ordnung eintretten.
Für ungerade m bekommen wir die Gleichung

$$I(x^m, a; k) = \frac{2}{m} \sum_0^{mq-1} \Gamma\left(\frac{j+1}{m}\right) \frac{a^{(j)}(0)}{j!} \frac{e(m,j)}{k^{(j+1)/m}} + k^{-q} R_q(k) \tag{3.7}$$

wobei $e(m,j) = \cos((j+1)\pi/2m)$ für gerade j und $e(m,j) = \imath \sin((j+1)\pi/2m)$ für ungerade j gilt. Insbesondere, jede Glied ck^{-r} mit ganzer Zahl r abwesend ist. Es folgt aus der Gleichung

$$I(-x^m, a; k) = \overline{I(x^m, \overline{a}; k)}$$

daß das Integral $I(-x^m, a; k)$ eine Entwiklung in der Gastalt (3.6) oder (3.7) hat.
Sei φ eine Phase mit einem kritischen Punkt x_o der Ordnung $m \geq 1$. Dann kann man neue Koordinate y so wählen, daß $\varphi(x) - \varphi(x_o) = \pm y^{m+1}$ gilt, wobei die Funktion $y = y(x)$ beliebig oft differenzierbar ist und $y' > 0$ gilt. (siehe Abt.2.4). Wir betrachten ein Integral $I(\varphi, a; k)$ mit eine hinreiched oft differenzierbaren Amplitude a welche einen kompakten Träger hat. Dann tauschen wir die Koordinate $x \to y$ und erhalten

$$I(\varphi, a; k) = \exp(\imath k \varphi(x_o)) \int \exp(\pm \imath k y^{m+1}) a(x(y)) x'(y) dy.$$

Nach (3.6), (3.7) hat man eine asymptotische Entwicklung für dieses Integral schreiben, wo die Ableitungen der Funktion $b(y) = a(x(y))x'(y)$ auftreten. Man kann diese Ableitungen durch die Ableitungen von $a(x)$ mit Hilfe des Lagrange-Bürmann Satz berechnen.

Satz 2.3.2 (Lagrange-Bürmann) *Es gilt*

$$\frac{d^n}{dy^n}\{a(x(y))x'(y)\}|_{y=y_o} = \frac{d^n}{dx^n}\left\{a(x)\left(\frac{x-x_o}{y(x)-y_o}\right)^n\right\}|_{x=x_o}$$

für jedes n, wobei $y_o = y(x_o)$ ist.

Beweis. Eine Ableitung der Ordnung $n > 0$ der Funktion $a(x(y))x'(y)$ im Punkt y_o hängt nur von den Ableitungen von a im Punkt x_o und von den Ableitungen von $x(y)$ in Punkt y_o der Ordnung $\leq n$ ab. Deshalb kann man alle höheren Glieder der Taylor Entwiklungen von x und a ausschneiden ohne die n-te Ableitung zu tauschen. Deswegen kann man annehmen, daß diese Funktionen Polynomen sind. Es folgt daraus, daß $y(x)$ eine analytische Funktion in einer Umgebung von x_o ist. Es folgt aus der Complexen Analysis, daß

$$\frac{d^n}{dy^n}(a(x(y))x'(y)) = n! \operatorname{res}_{y_o} \frac{a(x(y))x'(y)dy}{(y-y_o)^{n+1}}$$

gilt. Das Residuum hängt nicht von einer besondere Wähl der komplexen Koordinate ab. Deswegen kann man das Residuum mit Hilfe der Koordinate x berechnen:

$$\operatorname{res}_{y_o} \frac{a(x(y))x'(y)dy}{(y-y_o)^{n+1}} = \operatorname{res}_{x_o} \frac{a(x)dx}{(y-y_o)^{n+1}} = \operatorname{res} \frac{b(x)dx}{(x-x_o)^{n+1}}, \tag{3.8}$$

wobei

$$b(x) = a(x)\frac{(x-x_o)^{n+1}}{(y-y_o)^{n+1}}$$

ist. Die rechte Seite von (3.8) ist gleich

$$n!\frac{d^n}{dx^n}b(x)|_{x=x_o} \square$$

2.4 Airysche Funktion

Die Airysche Funktion ist durch das folgenden divergente Integral definiert:

$$\operatorname{Ai}(s) = \int_0^\infty \cos(\frac{x^3}{3} - sx)dx,$$

so daß

$$2\operatorname{Ai}(s) = \Re \int_0^\infty \exp(\imath\varphi(x))dx.$$

Die rechte Seite ist ein Integral der oszillierende Dichte mit Phase $\pm\varphi$, $\varphi(x) = x^3/3 - sx$. Es gibt kein groß Faktor k, wie in Abt. 2.1, aber es gibt einen Parameter s. Wir wollen eine Asymptotik der Airysche Funktion für großes s finden.
Man kann die Ayrische Funktion mittels eines konvergenten Integrals

$$\operatorname{Ai}(s) = \Re \int_\gamma \exp\left(\imath\left[\frac{z^3}{3} - sz\right]\right) dz \tag{4.1}$$

gut bestimmen, wobei $\gamma = \{z = x + y(x)\imath,\ 0 \leq x < \infty\}$ gilt und $y(x) \geq 0$ eine glatte Funktion ist. Falls $y(x) = y_0 > 0$ für $x >> 0$ ist, konvergiert das Integral (4.1).
Falls $s < 0$ gilt, gibt es kein kritisch Punkt der Phase in einer Umgebung der positiven Halbgerade der komplexen Ebene $\mathbb{C}$. Falls $s > 0$ ist, gibt es nur ein kritischer Punkt $x = \sqrt{s}$ auf dem Strahl $[0, \infty)$. Dabei setzen wir voraus, daß $y(x) = 0$ in einer Umgebung des kritischen Punktes ist, da sonst der Integrand auf γ zu schnell wächt.
Man kann das Integral (4.1) entweder mit dem Verfahren aus Abt 2.1 oder mit der Laplaceschen Methode untersuchen. Nach der Laplaceschen Methode tauscht man γ mit einer Kurve Γ in komplexe Ebene $\mathbb{C}$, welche den kritischen Punkt enthält, so daß der Integrand entlang Γ schnell abnimmt (Kurve der schnellesten Abstieg). Sei $s > 1$ und Γ die Vereinigung des Intervalls $[0, \sqrt{s} - 1]$, eines senkrechten Intervalls, eines Stücks W der ersten Winkelhalbierende $\arg(z - \sqrt{s}) = \pi/4$, noch eines senkrechten Intervalls bis dem Punkt $\sqrt{s}+1$ auf reellen Linie und des unendlichen Stück von γ (siehe Fig.1).

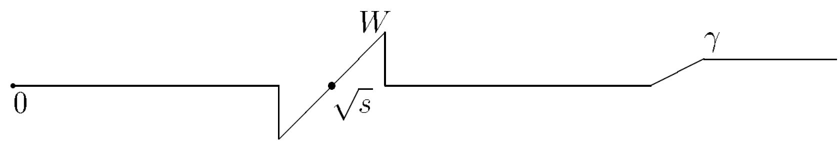

Fig.1

Das Integral

$$\int_W \exp(\imath\varphi(z))dz \tag{4.2}$$

bringt ein Hauptglied in der Entwicklung, deswegen enthält die Restteil von Γ kein kritischen Punkt. Wir haben

$$\varphi(z) = \varphi(s) + \sqrt{s}(z - \sqrt{s})^2 + \frac{1}{3}(z - \sqrt{s})^3.$$

Darum folgt

$$\exp(\imath\varphi(z)) = \exp(\imath\varphi(\sqrt{s}))\exp(-\sqrt{s}t^2)b(t),$$

wobei

$$z - \sqrt{s} = t\theta,\ \theta = \exp\left(\frac{\pi \imath}{4}\right),\ b(t) = \exp\left(\frac{(t\theta)^3}{3}\right)$$

gilt. Deswegen ist das Integral (4.2) gleich dem Produkt des Faktors $\exp\left(-\frac{2\imath}{3}s^{3/2}\right)$ und des Integrals

$$\theta \int_{-1}^{1} \exp(-\sqrt{s}t^2)b(t)dt.$$

Das Integral ist ein Gaußsche Integral, wobei b mit einer Reihe von t^3 dargestellbar werden kann. Wir berechnen mit Hilfe von Beispiel 3, Abt.1.4

$$\int_{-1}^{1} \exp(-\sqrt{s}t^2)b(t)dt = \frac{\pi^{1/2}}{s^{1/4}} + O(s^{-7/4}).$$

Schließlich bekommen wir die folgende Asymptotik

$$\mathrm{Ai}(s) = \frac{\pi^{1/2}}{s^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}s^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(s^{-7/4})$$

für positive s. Dies zeigt, daß die Airy-Funktion häufig entlang der positiven Halbachse (Lichtseite) oszilliert . Eine ähnliche Asymptotik

$$\mathrm{Ai}(s) = \frac{\pi^{1/2}}{2^{1/2}s^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}s^{3/2}\right) + O(s^{-7/4})$$

gilt für negative s. Das bedeutet, daß $\mathrm{Ai}(s)$ auf negative Halbachse (Schattenseite) sehr schnell verschwindet .

2.5 Sattelpunkt mit mehrerer Veränderlichen

Wir betrachten ein Integral in einem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ in der Gestalt:

$$I(\varphi, a; k) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(2\pi\imath k\varphi)a(x)dx,$$

wobei dx ein verschiebungsinvariant Lebesguesche Mass in $\mathbb{R}^n$ ist. Die Phase φ ist eine glatte reelle Funktion und die Amplitude a ist eine glatte summierbare Funktion. Man nennt $x_o \in \mathbb{R}^n$ *kritischer* Punkt, falls die Gleichung $d\varphi = 0$ oder die equivalente System $\partial\varphi/\partial x_1 = ... = \partial\varphi/\partial x_n = 0$ im Punkt x_o

erfüllt. Der kritische Punkt x_o heißt *nichtentartete* (nichtausgeartete), falls die Hessische Matrix

$$\operatorname{Hess}_x \varphi = \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_{j,k=1}^{n}$$

nichtsinguläre im Punkt x_o ist, d.h. $\det \operatorname{Hess} \varphi(x_o) \neq 0$. Diese Bedingung ist invariant in Bezug auf Koordinatwahl. Sei $y = (y_1, ..., y_n)$ andere glatte Koordinatsystem in Umgebung von x_o. Dann gilt die Gleichung

$$\operatorname{Hess}_x \varphi(x_o) = J'(x_o) \operatorname{Hess}_y \varphi(y_o) J(x_o),\ J = \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1}^{n},\ y_o = y(x_o),$$

wobei J die Jacobische Matrix und J' die transponierte Matrix sind, schließlich

$$\det \operatorname{Hess}_x \varphi = \det J^2 \det \operatorname{Hess}_y \varphi \qquad (5.1).$$

Wir studieren zuerst den Fall der quadratische Phase:

$$\varphi(x) = \beta(x) = \frac{1}{2} \sum_{ij} q^{ij} x_i x_j.$$

Dann ist der Ursprungpunkt ein kritischer Punkt der Phase und gilt $\operatorname{Hess}_x \beta = 2\beta$. Wir setzen daß die quadratische Form β nichtsinguläre ist voraus, d.h. $\det \operatorname{Hess} = \det \|q^{ij}\| \neq 0$ gilt. Man kennzeichnet mit $\sigma(\beta)$ die Signature und mit

$$\beta^*(D) = \frac{1}{2} \sum q_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

der dual Operator der Form β, wobei $\|q_{ij}\| = \|q^{jk}\|^{-1}$ gilt.

Satz 2.5.1 *Sei β eine nichtsinguläre quadratische Form, und a eine summierbare Amplitude, die die summierbare Ableitungen bis zur Ordnung $2q$ hat. Dann gilt die Entwicklung*

$$\int \exp(2\pi \imath k \beta(x)) a(x) dx = \frac{\exp\left(\frac{\pi \sigma(\beta) \imath}{4}\right)}{\sqrt{k^n |\det \operatorname{Hess} \beta|}} \sum_{0 \leq j < q} \frac{\beta^*(D)^j a(0)}{j!} \left(\frac{\imath}{k}\right)^j + \frac{R_q(k)}{k^q} \qquad (5.2)$$

Eine Abschätzung wie (1.3) erfüllt für der Restglied R_q.

Bemerkung. Man kann der Summe in (5.2) in der folgenden Form darstellen:

$$\frac{\exp\left(\frac{\pi\sigma(\beta)\imath}{4}\right)}{\sqrt{k|\det \operatorname{Hess}\beta|}}\exp\left(\frac{\imath\beta^*(D)}{k}\right)_q \tag{5.3}$$

wobei $(\cdot)_q$ bedeutet, daß die Glider der Ordnung $\geq q$ fortlassen werden.
Beweis. Der Satz 2.1.1 enthält den spezieller Fall $n = 1$. Im allgemeinen Fall kann man mit Hilfe von einer linearen Transformation $A(x) = y$ in $\mathbb{R}^n$ die Form zu einer normalen Gestalt bringen:

$$\beta(y) = \frac{1}{2}[y_1^2 + ... + y_p^2 - y_{p+1}^2 - ... - y_n^2].$$

Die Differenz $\sigma(\beta) = 2p - n$ ist die Signature der Form β. Man kann die Transformation A zur Dichte $\exp(\imath k\varphi)adx$ verwenden, wobei $dx = |\det A|^{-1}dy$ gilt. Here meinen wir $dx = dx_1...dx_n$, $dy = dy_1...dy_n$ und $\det A$ die Determinante der Matrix der Abbildung A in Bezug auf die entprechende Koordinatensystemen. Jetzt brauchen wir den Cauchy-Taylor Satz

$$a(y) = \sum_{0\leq|i|<2q}\frac{D^i a(0)}{i!}y^i + S_q(y)$$

wobei D^i, $i = (i_1, ..., i_n)$ eine partielle Ableitung bedeutet:

$$D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial y_1^{i_1}...\partial y_n^{i_n}},\ |i| = i_1 + ... + i_n,\ i! = i_1!\cdot ...\cdot i_n!.$$

Wir einführen ein fallenden Faktor und schreiben:

$$I(2\pi\beta(y) + \epsilon\imath y^2, a; k) = \sum_{0\leq||i|<2q}\frac{D^i a(0)}{i!}\int \exp((2\pi\imath\beta(y) - \epsilon y^2)k)y^i dy +$$

$$+\int \exp((2\pi\imath\beta(y) - \epsilon y^2)k)S_q(y)dy \tag{5.4}$$

Jede Integral der Summe spaltet gemäß dem Fubinische Satz:

$$\int \exp((2\imath\beta(y) - \epsilon y^2)k)y^i dy = \prod_{j=1}^{n}\int \exp((\pm 2\imath y_j^2 - \epsilon y_j^2)k)y_j^{i_j}dy_j$$

wobei das Zeichen $\pm$ gleich $+$ für $j = 1, ..., p$ und gleich $-$ für $j = p+1, ..., n$ ist. Jeder Faktor hat einen Limes für $\epsilon \to 0$ nach dem Satz 2.1.1. Man kann die Summe in (5.4) in der Form $(P(D)a)(0)$ schreiben, wobei

$$P(D) := \prod_1^n \frac{\exp(\frac{\pi\sigma(\beta_j)\imath}{4})}{\sqrt{k|\det \mathrm{Hess}\, \beta_j|}} \exp\left(\frac{\imath\beta_j^*(d/dy_j)}{k}\right)_q$$

wo $\beta_j = \pm\frac{1}{2}y_j^2$ gilt. Man kann den Produkt einfach berechnen:

$$\prod \exp\left(\frac{\pi\sigma(\beta_j)\imath}{4}\right) = \exp\left(\frac{\pi\sigma(\beta)\imath}{4}\right), \prod k|\det \mathrm{Hess}\, \beta_j| = k^n|\det \mathrm{Hess}\, \beta|,$$

$$\prod \exp\left(\frac{\imath\beta_j^*(d/dy_j)}{k}\right) = \exp\left(\sum_j \frac{\imath\beta_j^*(D)}{k}\right) = \exp\left(\frac{\imath\beta^*(D)}{k}\right)$$

Zum Schluß mussen wir der Jaobian $|\det A|^{-1}$ in Betracht ziehen. Wir finden $|\det \mathrm{Hess}_x\, \beta| = |\det A|^2|\det \mathrm{Hess}_y\, \beta|$ gemäß (5.1) und $|\det \mathrm{Hess}_y\, \beta| = 1$. Schließlich gilt $|\det A|^{-1} = |\det \mathrm{Hess}_x\, \beta|^{-1/2}$. Das liefert das erste Glied in (5.2). Man studiert des zweite Glied wie in Satz 2.1.1. ⊡

Im allgemeinen Fall kann man beliebige Phase in Umgebung eines nichtentarteten kritischen Punkts x_o zu einer quadratischen Form mit Hilfe von einer Koordinatstransformation umgestalten und dann der Satz 1.5 verwenden. Die Existenze der entprechende Koordinatstransformation folgt aus Morse Lemma (siehe Anhang).

2.6 Anhang Mosre Lemma

Der folgende Satz ist ein technisches Mittel.

Satz 2.6.1 (Hadamard Lemma) *Sei a eine glatte Funktion in einer konvexen Umgebung U von Ursprungpunkt in $\mathbb{R}^n$, so daß*

$$D^i a(0) = 0 \quad \textit{für} \quad |i| \leq q$$

für ein $q \geq 0$ gilt. Die Gleichung

$$a(x) = x_1 a_1(x) + ... + x_n a_n(x)$$

gilt, wobei $a_1, ..., a_n$ glatte Funktionen in U sind, so daß

$$D^i a_j(0) = 0, \quad \textit{für} \quad |i| \leq q-1. \tag{6.1}$$

Beweis. Für jeden Punkt $x \in U$ gilt die Gleichung

$$a(x) = \int_0^1 \frac{da(tx)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_1^n x_i \frac{\partial a(tx)}{\partial x_i} dt = \sum x_i a_i(x),$$

wobei

$$a_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial a(tx)}{\partial x_i} dt.$$

Die Eigenschaft (6.1) ist offenbar. $\boxdot$

Satz 2.6.2 (Morse Lemma) *Sei φ eine Phase mit nichtentartetem kritischem Punkt x_o. Es gibt eine glatte Koordinatsystem $y(x)$ in einer Umgebung der x_o, so daß $y(x_o) = 0$ und*

$$\beta(y(x)) = \varphi(x),\ \beta = \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_x \varphi \tag{6.2}$$

gelten.

Beweis. Sei $x_o = 0$ und $\psi = \beta - \varphi$. Die Funktion ψ erfü llt die Bedingung des Hadamardschen Lemmas in einer konvexen Umgebung U_o der $x = 0$ für $q = 3$. Wir wenden das dreimal zu ψ an und bekommen

$$\psi(x) = \sum_{ijk} x_i x_j x_k \psi_{ijk}(x), \tag{6.3}$$

wobei ψ_{ijk} glatte Funktionen in U_o sind. Wir betrachten ein Hilfsraum $\mathbb{R}^N$, $N = n^3$ mit Koordinaten $z = \{z_i^{jk},\ i, j, k = 1, ..., n\}$ und setzen

$$X_i(x, z) = x_i + \sum_{jk} z_i^{jk} x_j x_k,\ i = 1, ..., n$$

$$\Phi(x, z) = \varphi(X(x, z)), \quad \text{wobei} \quad X(x, z) = (X_1(x, z), ..., X_n(x, z)).$$

Die Funktion Φ is bestimmt und glatt in $\{0\} \times \mathbb{R}^N$. Dabei gilt

$$\operatorname{Hess}_x \Phi(x, z) = \frac{\partial X'}{\partial x} \operatorname{Hess}_x \varphi(X) \frac{\partial X}{\partial x} + \operatorname{Hess}_x X \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

wobei A' die transponierte Matrix bedeutet. Für $x = 0$ veschwindet das zweite Glied und ist $\partial X / \partial x$ gleich die einheit Matrix. Darum erhalten wir

$\mathrm{Hess}_x\,\Phi(0,z) = \mathrm{Hess}_x\,\varphi(0)$. Wir verwenden das Hadamardsche Lemma für Kooordinaten des Vektors $\partial\Phi/\partial x = (\partial\Phi/\partial x_1, ..., \partial\Phi/\partial x_n)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \sum_j x_j a_{ji}(x),\ i = 1, ..., n.$$

Dabei ist die Matrix $\|a_{ji}\|$ glatt und nichtsingulär, weil $\det\partial/\partial x\partial\Phi/\partial x = \det\mathrm{Hess}_x\,\Phi \neq 0$ in einer Umgebung W der Menge $\{0\}\times\mathbb{R}^N$ gilt. Das folgt aus der Voraussetzung des Satzes. Deswegen gelten die Gleichungen

$$x_i = \sum b_{ij}(x,z)\frac{\partial\Phi(x,z)}{\partial x_j}$$

für gewissere glatte Funktionen b_{ij} in W. Wir untersetzen dies in (6.3) und erhalten

$$\psi = \sum_{ijk} x_j x_k \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} Z^i_{jk}, \tag{6.4}$$

wobei Z^i_{jk} glatte Funktionen in W sind. Jetzt betrachten wir die folgende System der gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = 0;\ \frac{dz_i^{jk}}{dt} = Z_i^{jk}(x,z),\ i,j,k = 1, ..., n \tag{6.5}$$

mit Anfangswertaufgabe

$$x(0) = x;\ z_i^{jk}(0) = 0,\ i,j,k = 1, ..., n$$

Das Vektorfeld Z_i^{jk} ist glatt, folglich existiert eine Lösung $x(t) \equiv x$; $z = z(t,x)$ für $0 \leq t \leq 1$ und beliebig x aus einer kleinen Umgebung U des Punktes $x = 0$. Wir setzen

$$y_i(t,x) = x_i \sum_{jk} x_j x_k z_i^{jk}(t,x)$$

und prüfen, daß (6.2) für $y_i(x) = y_i(1,x)$, $i = 1, ..., n$ gilt. Wir haben

$$\frac{d}{dt}\varphi(y(t,x)) = \sum_i \frac{\partial\varphi(y(t,x))}{\partial x_i}\frac{dy_i(t,x)}{dt} = \sum_i \frac{\partial\Phi(x,z(t,x))}{\partial x_i}\sum_{jk} x_j x_k \frac{dz_i^{jk}}{dt} = \psi$$

wegen (6.4) und (6.5). Schließlich

$$\varphi(y(x)) - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{d\varphi(y(t,x))}{dt}dt = \int_0^1 \psi(x)dt = \psi(x)$$

und $\varphi(y(x)) = \varphi(x) + \psi(x) = \beta(x)$. $\boxdot$

Kapitel 3

Elemente der Distributionstheorie

23.03.1997

Inhaltsverzeichnis

3.1 Grundfunktionen und Distributionen

Wir nennen *Grundfunktion* eine beliebige Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}\varphi$ die beliebig oft differenzierbar ist. Der Raum $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ der Grundfunktionen heißt der *Grundraum*. Man kann die Grundfunktionen punktweise addieren und mit beliebigen Konstanten $c \in \ C$ multiplizieren, so daß $\mathcal{D}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

Konvergenz Eine Folge der Grundfunktionen φ_k, $k = 1, 2, ...$ heißt konvergent gegen ein Element $\varphi \in \mathcal{D}$, falls
I. $\varphi_k^{(i)} \Rightarrow \varphi^{(i)}$, $k \to \infty$ gleichmäßig für beliebig i.
II. $\cup \operatorname{supp} \varphi_k$ gehört zu eine kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}$ gelten. Der Begriff der Konvergenz ist vereinbar mit den linearen Operationen in $\mathcal{D}$:
Andere Operationen:
1. Die affine Gruppe $\mathcal{A}$ besteht aus den Transformationen $A(x) = ax + b$ auf $\mathbb{R}$, wobei $a \neq 0$, b beliebige reelle Zahlen sind. Diese Gruppe enthält die Untergruppe $\mathcal{T}$ der Schiebungen ($a = 1$) und die Untergruppe der homogenen Transformationen $\Gamma_a : x \to ax$. Ein Element A operiert auf beliebigen Funktionen in der folgende Weise:

$$A^*(f)(x) = f(A(x)) = f(ax + b)$$

Die ganze Gruppe $\mathcal{A}$ operiert auf $\mathcal{D}$.
2. Die Ableitung $d\varphi/dx$ einer Grundfunktion φ ist auch eine Grundfunktion.
3. Faltung $\varphi \mapsto \varphi * h$ mit einer beschränkten Funktion h mit kompaktem Träger.
4. Die Primitive

$$\varphi \mapsto \psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy$$

ist beliebig oft differenzierbar aber im allgemeinen hat sie keinen kompakten Träger. Dies bestimmt einen linearen Operator $\mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ auf dem Unterraum $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, welcher mit der Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy = 0$$

gegeben ist.
5. Die Multiplikation mit einer beliebig oft differenzierbaren Funktion h : $\varphi \mapsto h\varphi$.
6. Die Division durch x: $\varphi \mapsto \psi(x) = \varphi(x)/x$ ist gut bestimmt auf dem Unterraum

$$\mathcal{D}^0 = \{\varphi \in \mathcal{D}, \varphi(0) = 0\}.$$

Satz 3.1.1 *Die Operatoren* **1, 2, 3, 4, 5, 6** *sind stetig.*

Definition. Der Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ aller linearen stetigen Funktionale $u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ heißt der Dualraum. Ein Element $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ heißt *Distribution* auf der Linie $\mathbb{R}$.

Beispiel 1. Wir nennen fdx eine gewöhnliche Dichte, falls f eine lokal summierbare Funktion auf der Linie $\mathbb{R}$ mit Lebesgueschem Maß dx ist. Man kann jede gewöhnliche Dichte als eine Distribution betrachten:

$$[fdx](\varphi) = \int \varphi f dx.$$

Wir bennenen mit L_{loc} der Raum der gewöhnlichen Dichten.
Beispiel 2. Die Delta-Distribution: $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$ ist ein stetiges Funktional auf $\mathcal{D}$.
Beispiel 3. Der Hauptwert des Cauchyschen Integrals:

$$(H) \int \frac{\varphi(x)dx}{x} \equiv \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\varphi(x)dx}{x}. \tag{1.1}$$

Definition. Eine Folge von Distributionen u_k *konvergiert schwach* gegen $u \in \mathcal{D}'$, falls $u_k(\varphi) \to u(\varphi)$ für $k \to \infty$ und jegliche $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt.
Beispiel 4 Die Folge der Dirichletschen Dichten $D_\lambda = \frac{\sin \lambda x dx}{\pi x}$ konvergiert für $\lambda \to \infty$ schwach gegen die Delta-Distribution $\delta_0 dx$ (siehe Kap.1). Auch konvergiert die Folge der Dichten $G_k = kg(kx)dx$, $k = 1, 2, ...$, wo $g \in L_1(\mathbb{R})$ beliebige Funktion ist, so daß $\int gdx = 1$, schwach gegen Delta-Distribution.

Satz 3.1.2 *Das Bild der Abbildung*

$$L_{loc} \to \mathcal{D} \tag{1.2}$$

ist dicht, d.h. jede Distribution u *ist gleich dem Limes einer Folge gewöhnlicher Dichten:* $f_k dx \to u$.

Operationen über Distributionen:
I. Affine Transformationen: für eine beliebige Transformation $A(x) = ax + b$ und eine beliebige Distribution u nimmt man

$$A^*(u)(\varphi) = u(A^{-1*}(\varphi)) \tag{1.3}$$

an.
II. Ableitung einer Distribution:

$$\frac{du}{dx}(\varphi) = -u\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$$

III. Multiplikation mit einer beliebig oft differenzierbaren Funktion h, wobei $hu(\varphi) = u(h\varphi)$ gilt.
Diese Formeln sind mit der Abbildung (1.2) vereinbar.
Eine allgemeine Distribution u hat keinen Wert $u(x_o)$ in einem Punkt x_o, aber man kann sagen, daß die Distributionen v, w in einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}$ übereinstimmen, falls $v(\varphi) = w(\varphi)$ für jede Grundfunktion $\varphi, \operatorname{supp} \varphi \subset U$ gilt. Insbesondere verschwindet eine Distribution v in U, falls v mit der Nulldistribution in U übereinstimmt.
Definition. Der *Träger* $\operatorname{supp} u$ einer Distribution u ist die Ergänzung der Vereinigung aller Gebiete U, so daß u in U verschwindet.

Aussage 3.1.1 *Jede Distribution v verschwindet in $\mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} v$.*

Beweis. Wir haben $\mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} u = \cup U_\alpha$, wobei jede U_α ein Interval ist, wo die Distribution v verschwindet. Wir konstruieren eine Zerlegung der Einheit $1 = \sum h_\alpha$, so daß

$$h_\alpha \in \mathcal{D}, \quad \operatorname{supp} h_\alpha \subset U_\alpha$$

für jede α gilt und die Bedeckung der Menge $\mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} v$ mit den Mengen $\operatorname{supp} h_\alpha$ lokal endlich ist. Die letzte Bedingung bedeutet, daß für jede Kompaktum $K \subset \mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} v$ der Durchschnitt $K \cap \operatorname{supp} h_\alpha$ für alles α außer eine endliche Zahl leer ist. Zuerst wählen wir für jede α ein abgeschlossenes Interval $V_\alpha \subset U_\alpha$, so daß die Familie V_α eine lokal endlich Bedeckung ist. Für jedes α konstruieren wir eine Funktion $g_\alpha \in \mathcal{D}$, so daß $\operatorname{supp} g_\alpha = V_\alpha$ und $g_\alpha(x) \geq 0$ immer gilt (siehe Ab.1.6, Beispiel 2). Wir setzen

$$h_\alpha = \frac{g_\alpha}{\sum_\beta g_\beta}$$

für jedes α. Das ist geeignete Zerlegung der Einheit. Wir haben

$$v(\varphi) = v(\sum h_\alpha \varphi) = \sum v(h_\alpha \varphi) = 0$$

für beliebige $\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} v = \emptyset$, weil $h_\alpha \varphi \not\equiv 0$ nur für eine endliche Zahl der Glieder der Summe gilt und v verschwindet auf die Grundfunktion $h_\alpha \varphi$, darum gehört ihr Träger zu U_α. $\boxdot$
Es folgt aus der Aussage 3.1.1, daß $u(\varphi) = u(\psi)$ für beliebige $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ welche in einer Umgebung der Menge $\operatorname{supp} u$ übereinstimmen.
Beispiel 5. Der Träger der Delta-Distribution δ_0 ist gleich der Menge $\{0\}$. Für eine beliebige gewöhnliche Dichte $f dx$ gilt die Gleichung $\mathbb{R} \setminus \operatorname{supp}[f dx] =$

die größte Menge, wo $f = 0$ fast überall.
In allgemeinen gelten die Gleichungen

$$\operatorname{supp}\frac{du}{dx} \subset \operatorname{supp} u; \quad \operatorname{supp} A^*(u) = A(\operatorname{supp} u),\ A \in \mathcal{A}$$

für beliebige $u \in \mathcal{D}'$.
IV. Faltung der Distributionen. Nach Kapitel 1 ist die klassische Faltung der summierbaren Dichten auf $\mathbb{R}$

$$fdx * gdx = \left(\int f(y)dyg(x-y)\right)dx$$

auch eine summierbare Dichte. Falls man das Ergebnis als eine Distribution betrachtet, erhält man

$$[fdx * gdx](\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(z)\varphi(y+z)dydz$$

Für Distributionen u, v möchten wir daher mit Hilfe der Formel

$$u * v(\varphi) = u(x) \otimes v(y)(\varphi(x+y)) \tag{1.4}$$

die Faltung definieren, wobei das Symbol $\otimes$ das tensor Produkt der Distributionen bezeichnet (siehe Ab.3.6). Aber im allgemeinen kann man nicht die Distribution $u(x) \otimes v(y)$ auf die Funktion $\psi(x,y) = \varphi(x+y)$ auswerten, weil diese keine Grundfunktion ist. Daher müssen wir voraussetzen, daß der Durchschnitt der Menge $\operatorname{supp} u \otimes \operatorname{supp} v \equiv \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v \subset \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{supp}\psi$ kompakt ist. Das gilt in den folgenden zwei Fällen:
E. Eine der Mengen $\operatorname{supp} u$, $\operatorname{supp} v$ ist kompakt.
B. Beide Mengen $\operatorname{supp} u$, $\operatorname{supp} v$ sind von links oder von rechts beschränkt. Die letzte Bedingung bedeutet, daß $\operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} v$ eine Untermenge eines Strahls $[a, \infty)$ oder eines Strahl $(-\infty, b]$ ist. In beiden Fällen ist die Faltung (1.4) gut bestimmt und sie besitzt die Eigenschaften der

$$\frac{d}{dx}(u * v) = \frac{d}{dx}u * v = u * \frac{d}{dx}v \tag{1.5}$$

$$u * \delta_0 dx = \delta_0 dx * u = u, \quad u \in \mathcal{D}' \tag{1.6}$$

folgen unmittelbar aus (1.4).

3.2 Mäßige Distributionen

Die Definition des Schwartzschen Raumes S ist in Ab.1.6 gegeben. Eine Folge $\psi_k \in S$, $k = 1, 2, ...$ konvergiert gegen ψ in dem Raum S falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:
I. $\psi_k^{(i)} \Rightarrow \psi^{(i)}$, $k \to \infty$ gleichmäßig für beliebiges i.
II. Die Ungleichung $|x^j \psi_k^{(i)}(x)| \leq C_{i,j}$ gilt für beliebige i, j, wobei die Konstante $C_{i,j}$ nicht von k abhängen.
Der Raum $\mathcal{D}$ ist ein Unterraum des Schwartzschen Raumes S. Konvergiert eine Folge $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{D}$, so konvergiert sie auch in S. Daraus folgt, daß es eine stetige Abbildung $e : S' \to \mathcal{D}'$ gibt.

Aussage 3.2.1 *Sei h_ϵ, $\epsilon \to 0$ eine Folge beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ so daß die Ableitungen der Ordnung j gleichmäßig beschränkt sind: $|d^j h_\epsilon / dx^j| \leq C_j$ und die Folge*

$$\frac{d^j(1 - h_\epsilon)}{dx^j} \to 0, \quad \epsilon \to 0,\ j = 0, 1, ...$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge in $\mathbb{R}$ konvergieren. Dann gilt $h_\epsilon \varphi \to \varphi$ in S für beliebige $\varphi \in S$.

Beweis. Wir haben

$$\frac{d^k}{dx^k}((1 - h_\epsilon)\varphi) = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} \frac{d^i}{dx^i}(1 - h_\epsilon) \frac{d^j}{dx^j}\varphi$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit x^{m+1} für eine beliebige Konstante m. Das Produkt mit beliebigem Glied der rechte Seite ist gleichmäßig beschränkt und strebt gegen Null auf jeder kompakten Menge. Es folgt, daß das Produkt mit x^m gleichmäßig auf der ganzen Linie $\mathbb{R}$ gegen Null strebt. Das bedeutet, daß die Folge $(1 - h_\epsilon)\varphi$ in S gegen Null strebt.$\boxdot$

Aussage 3.2.2 *Der Unterraum $\mathcal{D}$ ist im Raum S dicht, d.h. es gibt für jede Funktion $\varphi \in S$ eine Folge $\varphi_k \in \mathcal{D}$, so daß $\varphi_k \to \varphi$ im Raum S.*

Es folgt daraus, daß die Abbildung $e : S' \to \mathcal{D}'$ eine Injektion ist. Das bedeutet, daß jedes stetige Funktional v auf S welches auf $\mathcal{D}$ verschwindet, immer gleich Null ist. So kann man den Raum S' als eine Unterraum des

Raums $\mathcal{D}'$ betrachten. Ein beliebiges Element $v \in S'$ heißt *mäßig* Distribution.

Beispiel 6. Jede meßbare Funktion f welche eine Abschätzung

$$|f(x)| = O(|x|^b) \tag{2.1}$$

mit einer Konstanten b zulässt, definiert durch das Integral $\varphi \mapsto \int \varphi f dx$ eine mäßige Distribution.

Das singuläre Integral von Beispiel 2 ist tätsachlich eine mäßige Distribution.

Die Hadamardschen Distributionen. Für eine beliebige komplexe Zahl λ, $\Re\lambda > 0$ ist das Produkt $x_+^{\lambda-1}dx$ eine gewöhnliche Dichte auf $\mathbb{R}$, wobei $x_+ = \max(x,0)$ gilt. So definiert die Dichte eine mäßige Distribution

$$[x_+^{\lambda-1}dx](\varphi) = \int_0^\infty x^{\lambda-1}\varphi(x)dx, \tag{2.2}$$

so daß der Wert auf jeder Grundfunktion eine analytische Funktion in der Halbebene $\Re\lambda > 0$ ist. Wir sagen, daß (2.2) eine analytische Familie der Distributionen ist.

Aussage 3.2.3 *Die Familie* (2.2) *hat eine meromorphe Fortsetzung H_λ^+ auf $\mathbb{C}$ mit den Polen $\lambda = 0, -1, -2, ...,$ so daß H_λ^+ für $\lambda \neq 0, -1, -2, ...$ H_λ^+ eine mäßige Distribution ist. Dabei gilt die Gleichung*

$$\mathrm{Res}_{-q}\, H_\lambda^+ d\lambda = (-1)^q \frac{\delta_0^{(q)}}{q!}.$$

Beweis Wir stellen das Integral (2.2) in die folgende Form :

$$\int_0^1 x^{\lambda-1}\varphi(0)dx + \int_0^1 x^{\lambda-1}(\varphi(x) - \varphi(0))dx + \int_1^\infty x^{\lambda-1}\varphi dx$$

wobei das erste Integral gleich

$$\frac{\varphi(0)}{\lambda} \tag{2.3}$$

ist, das zweite eine analytische Fortsetzung auf weitere Halbebene $\Re\lambda > -1$ hat und das dritte eine ganze analytische Fortsetzung zuläßt. Die Summe hat eine meromorphe Fortsetzung auf $\Re\lambda > -1$ mit dem Pol $\lambda = 0$, wobei das Residuum infolge (2.3) gleich $\delta_0 dx$ ist. Für einen weiteren Schritt benutzen wir die Taylorsche Entwicklung

$$\varphi(x) = \sum_0^{q-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} x^j + \psi(x),$$

wobei $\psi(x) = O(x^q)$, $q = 2, 3, ...$ gilt. Wir setzen dies im Integral $\int_0^1$ ein und wiederholen die obige Überlegung. $\boxdot$
Insbesondere ist das Eulersche Integral

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-x)x^{\lambda-1}dx$$

gleich $H_\lambda^+(e)$, wobei $e \in S$ eine beliebige Funktion ist, so daß $e(x) = \exp(-x)$ für $x > -1$ gilt. Das ist eine meromorphe Funktion mit denselben Polen und es gilt $\mathrm{Res}_{-q}\,\Gamma(\lambda)d\lambda = (-1)^q/q!$ für $q = 0, 1, ...$ Wir betrachten den Bruch

$$N_\lambda^+ = \frac{H_\lambda^+}{\Gamma(\lambda)}$$

und nennen diese die *normierte Hadamardsche* Familie.

Folgerung 3.2.1 *Die normierte Hadamardsche Familie hat eine ganze analytische Fortsetzung, wobei*

$$N_{-q}^+ = \delta_0^{(q)}dx,\ q = 0, 1, 2, ...$$

gilt.

Falls wir mit dem Integral

$$\int_{-\infty}^0 (-x)^{\lambda-1}\varphi dx,$$

beginnen, dann bekommen wir die Hadamardsche Familien H_λ^-, N_λ^- welche ebenso eine ganze Fortsetzung hat, wobei die Beziehung $\Gamma_{-1}^*(N_\lambda^-) = N_\lambda^+$ gilt.

3.3 Der Grenzwert einer holomorphen Funktion

Sei $f(z)$, $z = x+y\imath$ eine holomorphe Funktion in einem Streifen $0 < y < y_o$, in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ wobei $0 < y_0 \leq \infty$ gilt. Für ein beliebiges positives ϵ ist $f(x+\epsilon\imath)dx$ eine gewöhnliche Dichte. Wir betrachten den Limes

$$[f(x+0\imath)dx](\varphi) = \lim_{\epsilon\searrow 0}\int \varphi(x)f(x+\epsilon\imath)dx \tag{3.1}$$

Falls der Limes (3.1) für ein beliebiges $\varphi \in \mathcal{D}$ (oder $\varphi \in S$) existiert, heißt das Funktional $[f(x+0\imath)dx]$ der Grenzwert von oben der Holomorphen Form fdz (oder der Funktion f). Mit Hilfe einer ähnlichen Konstruktion

$$[f(x-0\imath)dx](\varphi) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int \varphi(x) f(x - \epsilon\imath)dx \tag{3.2}$$

definiert man den Grenzwert $[f(x-0\imath)dx]$ von unten für eine holomorphe Form fdz im Streifen $0 > y > y_o$.

Satz 3.3.1 *Existiert der Limes* (3.1) *oder* (3.2) *für jegliches* $\varphi \in \mathcal{D}$ *so ist das ein stetiges Funktional über* $\mathcal{D}$. *Dasselbe gilt für den Raum* S.

Satz 3.3.2 *Der Limes* (3.1) *oder* (3.2) *gilt für beliebige Funktionen* f, *so daß die Abschätzung*

$$|f(z)| \leq C\frac{|z|^r}{|y|^q}, \quad z = x + y\imath, \ \pm y > 0 \tag{3.3}$$

mit gewissen Konstanten $q, C > 0$ *erfüllt.*

Beweis. Wir betrachten eine holomorphe Form fdz im Streifen $0 < y < y_o$ und finden die konsekutiven Primitiven

$$F_1(z) = \int_\imath^z f(w)dw, \ F_2(z) = \int_\imath^z F_1(w)dw, ...$$

Die Integrale hängen nicht vom Weg γ, welcher die Punkte 0 und z verbindet. Wir können als γ die Vereinigung der Strecken $[\imath, y\imath], [y\imath, z]$ benutzen. Daher kann man die folgende Abschätzung einfach prüfen

$$|F_1(z)| \leq C'\frac{|z|^{r+1}}{y^{q-1}}$$

falls $q > 1$ gilt. Im Falle $q = 1$ bekommen wir eine Abschätzung wie (3.3) mit dem Faktor $\log(y_0/y) + 1$ statt y^{-q}. Es folgt, daß die Primitive $F_{q+1}(z)$ eine stetige Funktion im abgeschloßenen Streifen $0 \leq y \leq y_o$ ist, welche die Ungleichung (3.3) mit $q = 0$ erfüllt. Der Limes (3.1) existiert offensichtlich für die Form $F_{q+1}dz$, sondern wir haben

$$\int f(x + \epsilon\imath)\varphi(x)dx = (-1)^{q+1} \int F_{q+1}(x + \epsilon\imath)\varphi^{(q+1)}(x)dx$$

Die rechte Seite hat eine Grenze für $\epsilon \to 0$ und jegliche $\varphi \in S$. $\boxdot$
Wir sagen, daß die Funktion f ein mäßiges Wachstum hat, falls die Ungleichung (3.3) gilt.

Satz 3.3.3 *Die Ableitung einer holomorphen Funktion von mäßigem Wachstum hat selbst mäßiges Wachstum und*

$$\frac{d}{dx}[f(x \pm 0\imath)dx] = \left[\frac{d}{dz}f(x \pm 0\imath)dx\right].$$

Beweis. Die Abschätzung (3.3) impliziert eine ähnliche Unglecihung für df/dz mit $q+1$ statt q. Das folgt aus die Cauchysche Ungleichung für der Ableitung. Wir integrieren partiell

$$\frac{d}{dx}[f(x \pm \epsilon\imath)dx](\varphi) = -\int f(x \pm \epsilon\imath)\varphi'(x)dx = [f'(x \pm \epsilon\imath)\varphi(x)dx]$$

wobei die Ableitung $f' = df/dx$ gleich der komplexen Ableitung df/dz ist. Dann gehen wir zum Limes über und bekommen die Behauptung. ⊡

Beispiel 7. Die Form dz/z hat die Grenzwerte $dx/(x \pm 0\imath) \in S'$ von oben und von unten. Dabei gelten die Formeln

$$\left[\frac{dx}{x - 0\imath}\right] - \left[\frac{dx}{x + 0\imath}\right] = 2\pi\imath\delta_0 dx, \quad \left[\frac{dx}{x - 0\imath}\right] + \left[\frac{dx}{x + 0\imath}\right] = 2\left[\frac{dx}{x}\right] \tag{3.4}$$

wobei die Distribution $[dx/x]$ in Beispiel 3 definiert ist. Als Folgerung bekommen wir ebenso

$$\left[\frac{dx}{(x - 0\imath)^{k+1}}\right] - \left[\frac{dx}{(x + 0\imath)^{k+1}}\right] = (-1)^k 2\pi\imath\delta_0^{(k)}dx$$

für beliebige $k > 0$.

Sei $\log z$ der Zweig des Logarithmus, welcher für $z > 0$ reell und im Gebiet $G = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ holomorph ist. Für eine beliebige komplexe Zahl λ betrachten wir die folgende Potenzfunktion

$$z^\lambda = \exp(\lambda \log z)$$

welche die Bedingung des Satzes 2.2 erfüllt. So existieren die Grenzwerte $(x \pm 0\imath)^\lambda dx \in S'$.

Aussage 3.3.1 *Die Familien $(x \pm 0\imath)^\lambda$ sind ganze analytische Funktionen vom Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Werten im Raum S'.*

Beweis. Für beliebige $\varphi \in S$ und $\epsilon > 0$ ist das Integral

$$I(\lambda, \epsilon) = \int (x \pm \epsilon\imath)^\lambda \varphi(x) dx$$

eine ganze analytische Funktion von λ. Es strebt gegen die Funktion $(x \pm 0\imath)^\lambda(\varphi)$ für $\epsilon \to 0$, wobei diese Folge gleichmäßig für $\lambda \in K$ konvergiert, wobei K ein beliebiges Kompaktum in $\mathbb{C}$ ist. Die letzte Behauptung kann man mit der Verfahren des Satzes 3.3.2 prüfen. Deswegen ist die Grenzfunktion auch ganz analytisch. $\boxdot$

3.4 Fouriertransformation der mäßigen Distributionen

Wir erinnern daran, daß die klassische Fouriertransformation F abbildet den Raum $S(\mathbb{R})$ auf den Raum $S(\mathbb{R}^*)$, wobei $\mathbb{R}^*$ die duale Linie ist. Die konjungierte Transformation F^* ist zu F invers. Beide Transformationen vertauschen aber nicht mit der affinen Gruppe $\mathcal{A}$, insbesondere nicht mit der Gruppe der Homothetien. Um die Fouriertransformation mit der Gruppe $\mathcal{A}$ besser verbinden, müss man F als die Transformationen, welche eine Dichte in Funktion abbildet und F^* als die Transformationen welche eine Funktion in eine Dichte verwandelt betrachten. Wir folgen weiter diesem Standpunkt So operieren die Transformationen natürlicherweise:

$$F : Dichte\, \rho = \varphi dx \quad \mapsto \quad Funktion\, F(\rho) = \int \exp(-2\pi\imath\xi x)\rho(x)$$

und

$$F^* : Funktion\, \varphi \quad \mapsto \quad Dichte\, F(\varphi) = \left(\int \exp(2\pi\imath\xi x)\varphi(x)dx\right) d\xi$$

Beide Formeln hängen nicht von der besondere Wahl der Koordinate x in $\mathbb{R}$ und der Wahl von Koordinate ξ in $\mathbb{R}^*$ ab. Tatsächlich entstehen nicht diese Koordinaten in der erste Formel und entstehen diese nur im Produkt $dxd\xi$ in der zweite. Falls wir x durch $y = cx$ ersetzen, dann müssen wir ξ für $\eta = \xi/c$ schreiben und der Produkt $dyd\eta = dxd\xi$ bleibt fest. Die konjungierte Transformation F^* wirkt in derselben Art mit $-\imath$ statt $\imath$.

Wir müss en dabei die zwei Grundräume unterscheiden: den Raum $\mathcal{D}$ der glatte Funktionen φ mit kompaktem Träger wie in Ab.3.1 und den Raum $\mathcal{D}$ der Dichten $\rho = \varphi dx$, wo $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt. Offenbar sind diese Räume isomorph, falls ein Lebesguesche Maßdx fixiert ist.

Definition. Ein lineares stetiges Funktional $v : \mathcal{D}(Dichten) \to \mathbb{C}$ heißt *verallgemeinerte Funktion* auf $\mathbb{R}$. Man heißt ein Element der Raum $\mathcal{D}'$ auch eine *singulare* Funktion. Es gibt eine natürliche Abbildung $L_{loc} \to \mathcal{D}'$, welche jegliche gewöhnliche lokal summierbare Funktion f in das Funktional $[f](\rho) = \int f\rho$ umwandelt. Wir betrachten parallel die Räume $S(Funktionen)$ und $S(Dichten)$. Der duale Raum von den zweiten ist der Raum S' der mäßigen verallgemeneinerten Funktionen.

Wir definieren die Darstellung der Affine Gruppe $\mathcal{A}$ auf die Räume $\mathcal{D}', S'$ verallgemeinerten Funktion wie in (1.1), wobei ein Element $a \in \mathcal{A}$ die Grunddichten folgenderweise

$$A^*(\rho) = A^*(\varphi dx) = \varphi(ax+b)|a|dx$$

verwandelt.

Definition. Die Fouriertransformation der mäßige Distributionen ist der duale Operator

$$F' : Raum\ S'\ der\ Distributionen \implies Raum\ S'\ der\ verallg.\ Funktionen.$$

Die konjungierte Fouriertransformationen ist der duale Operator

$$(F^*)' : S'(verallgemeinerte\ Funktionen) \implies S'\ (Distributionen)$$

Das bedeutet, daß die Fouriertransformierte $F(u)$ einer beliebigen mäßigen Distribution u gleich der verallgemeinerten Funktion

$$F'(u)(\rho) = u(F(\rho)),\ \rho = \varphi dx \in S(Dichten)$$

ist. Die Fouriertransformierte einer verallgemeinerten Funktion v ist gleich der Distribution

$$(F^*)'(v)(\varphi) = v(F(\varphi)),\ \varphi \in S(Funktionen).$$

Die Eigenschaften der Fouriertransformation

I. Die Operatoren $F', (F^*)'$ sind linear und schwach stetig. Das letztere bedeutet, daß für eine beliebige Folge von Distributionen $u_k \in S'$, $k = 1, 2, ...$

welche schwach gegen u strebt die Beziehung $F'(u_k) \to F'(u)$ (schwach) gilt, und ebenfalls für $(F^*)'$.
II. Der Operator F' ist mit der klassischen Fouriertransformation vereinbar. Das sieht man ander Gleichung

$$F'[fdx] = [F(fdx)]$$

für eine beliebige gewöhnliche Dichte fdx, $f \in L_1$.
Für einen Beweis schreiben wir

$$F'([fdx])(\rho) = [fdx](F(\rho)) = \int f(x)dx \int \exp(-2\pi\imath x\xi)\varphi d\xi,$$

wobei $\rho = \varphi d\xi \in S$ gilt. Der Integrand ist summierbar gegen das Lebesguesche Maß $dxd\xi$, folglich kann man die Ordnung der Integrale vertauschen:

$$\mathcal{F}'[fdx](\rho) = intf(x)dx \int \exp(-2\pi\imath x\xi)\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \int \left(\int f(x) \exp(-2\pi\imath\xi x)dx \right) \varphi(\xi)d\xi = [F(fdx)](\rho).$$

Dasselbe gilt für Operator (F^*).
III. Die Operatoren F', $(F^*)'$ sind zueinander inverse. Das folgt aus dem Satz 1.6.1.
IV.

$$F'\left(\frac{du}{dx}\right) = 2\pi\imath\xi F'(u), \quad F'(-\imath 2\pi x u) = \frac{d}{d\xi}F'(u),$$

wobei die Ableitung einer verallgemeinerten Funktion v wie in Ab.3.1 definiert wird:

$$\frac{dv}{dx}(\varphi d\xi) = -v\left(\frac{d\varphi}{dx}d\xi\right),$$

i.e. die Ableitung des Lebesguesche Maß gleich Null gilt. **V**. Es gelten die Gleichungen

$$F'(T_y(u)) = \exp(2\pi\imath y\xi)F'(u), \quad F'(\exp(-2\pi\imath\eta x)u) = T_\eta F'(u)$$

Ähnliche Gleichungen gelten für die konjungierte Fouriertransformation $(F^*)'$. Diese Gleichungen folgen direkt aus den Definitionen.
VI. Sei $\mathcal{G}$ die Gruppe der linearen homogenen Transformationen auf $\mathbb{R}$. Jede Transformation $\Gamma_a : x \mapsto ax$, $a \neq 0$ erzeugt eine lineare Transformation

$\Gamma_{a^{-1}} : \xi \mapsto a^{-1}\xi$ auf duale Raum $\mathbb{R}^*$, so daß die bilineare Form $(x, \xi) \mapsto \xi x$ fest ist. Immer gilt die Gleichung

$$F'(\Gamma_a^*(u)) = \Gamma_{a^{-1}}^*(F'(u)). \tag{4.1}$$

Für einen Beweis bemerken wir, daß die Gleichung (4.1) immer für Grunddichten gilt:

$$F(\Gamma_a(\rho)(\xi) = \int \exp(-2\pi\imath\xi x)\varphi(ax)|a|dx = \int \exp(-2\pi\imath a^{-1}\xi y)\varphi(y)dy,$$

wobei wir die Ersetzung $y = ax$ benutzen. Folglich ist die rechte Seite gleich $F(\rho)(a^{-1}\xi)$.
Insbesondere gilt die Gleichung

$$(F^*)'(v) = \Gamma_{-1}^*(F'(vdx))d\xi,$$

Eine Distribution u heißt *homogene* des Grades $\lambda \in \mathbb{C}$, falls die Gleichung $\Gamma_a(u) = a^\lambda u$ für jedes $a > 0$ gilt. Die homogene verallgemeinerten Funktionen werden in ähnliche Weise definiert.
Es folgt aus V, daß die Fouriertransformation einer homogene Distribution (verallgemeinerten Funktion) des Grades λ eine homogene verallgemeinerte Funktion (Distribution) des Grades $-\lambda$ ist.
VII. Die Fouriertransformation der Faltung ist gleich dem Produkt der Fouriertransformationen:

$$F(u * v) = F(u)F(v).$$

Das gilt für beliebige mäßige Distributionen u, v, welche mindestens eine der Bedingung **E** oder **B** der Ab.3.2 erfüllen.
Schließlich ist der Operator F' eine echte Fortsetzung der klassische Fouriertransformation auf den Raum der mäßigen Distributionen und er besitzt dieselben Eigenschaften. Wir werden diese Fortsetzung auch mit F bezeichnen und schreiben ebenfalls F^* statt $(F^*)'$.
VIII. Fouriertransformation der Distribution mit kompaktem Träger.
Sei u eine Distribution mit kompakten Träger. Man kann u auf den Raum $\mathcal{E}$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ folgendermaßen fortsetzen $u(\gamma) := u(\varphi)$, wobei $\varphi \in \mathcal{D}$ eine Funktion welche mit $\gamma \in \mathcal{E}$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} u$ übereinstimmt. Die Fortsetzung ist gut bestimmt, weil der Wert $u(\varphi)$ nicht von der Wahl der Grundfunktion φ abhängt. Für eine andere Grundfunktion ψ gilt die Gleichung $u(\varphi) = u(\psi)$, deswegen stimmen

die Funktionen φ, ψ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} u$ überein. Man bestimmt die Fouriertransformierte schlicht:

$$F(u)(\xi) = u(\exp(-2\pi\imath\xi x)),$$

wobei die Funktion $\exp(-2\pi\imath\xi x)$ beliebig oft differenzierbar ist. Man kann die rechte seite für beliebig komplex $\xi \in \mathbb{C}$ bestimmen. Man nennt $F(u)$ die Fourier-Laplace Transformation von u.

Satz 3.4.1 (Paley-Wiener-Schwartz) *Die Fourier-Laplace Transformation der beliebigen Distribution u mit* $\operatorname{supp} \subset [-a, a]$ *ist eine ganze Funktion $\tilde{u}$, so daß die Ungleichung*

$$|\tilde{u}(\zeta)| \leq C(|z| + 1)^q \exp(2\pi a|\eta|) \tag{4.2}$$

für eine $q \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.
Umgekehrt ist eine ganze Funktion $g(\zeta)$ gleich der Fourier-Laplace Transformation einer Distribution u mit Träger $\operatorname{supp} u \subset [-a, a]$ *falls diese Funktion eine Abschätzung* (4.2) *zulässt.*

Hilfsatz 1 *Jede Distribution u mit Träger* $\operatorname{supp} u \subset [-a, a]$ *hat eine Darstellung*

$$u = \sum_0^q \frac{d^j u_j}{dx^j} dx, \tag{4.3}$$

wobei $u_j \in L_2$ und $\operatorname{supp} u_j \subset [-a, a]$ *gelten.*

Beweis des Hilfsatzes ist auf der folgenden Behauptung begründet: das Funktional u ist stetig in Bezug auf eine Hilbertische Norm

$$\|\varphi\|^{(q)} = \sum_0^q \|\varphi^{(j)}\|_2.$$

Jetzt benutzt man der Satz über der allgemeine Form des Funktionals. □
Beweis des Satzes. Wir rechnen die Fouriertransformierte jedes Gliedes der Gleichung (4.3):

$$F\left(\frac{d^j u_j}{dx^j} u_j dx\right) = (2\pi\xi\imath)^j F(u_j dx)$$

und wenden den Paley-Wiener Satz für u_j an. Der erst Teil des Satzes folgt daraus. Für den zweiten Teil des Satzes wir bemerken, daß eine ganze Funktion g mit Abschätzung (4.2) definiert ein Funktional $[g] \in S'$. Dank III gibt es eine Distribution $u \in S'$, so daß $F(u) = g$. Man prüft die Inklusion $\operatorname{supp} u \subset [-a, a]$ wie im Paley-Wiener Satz (1.5.1).□

3.5 Berechnung der Fouriertransformation

Beispiel 8. Fouriertransformation der Delta-Distribution:

$$F(\delta_0 dx)(\rho) = \delta_0 dx(F(\rho)) = F(\rho)|_{x=0} = \int \rho = [1](\rho)$$

wobei [1] die Funktion $f \equiv 1$ als eine verallgemeinerte Funktion bezeichnet. Danach gilt die Gleichung $F(\delta_0 dx) = [1]$. Es folgt daraus, daß

$$F(\delta_0^{(j)} dx) = [(2\pi\imath\xi)^j]$$

für $j = 1, 2, \ldots$ gilt.

Beispiel 9. Wir berechnen die Fouriertransformation der Distibution $[dx/x]$ mit Hilfe der Gleichung (1.1):

$$F\left(\left[\frac{dx}{x}\right]\right) = \lim_{\epsilon\to 0} F\left(\left[\frac{dx}{x}\right]_\epsilon\right) \tag{5.1}$$

wobei

$$\left[\frac{dx}{x}\right]_\epsilon(\varphi) = \int_{\epsilon\le|x|\le E} \frac{\varphi dx}{x},\ E = \epsilon^{-1}$$

eine gewöhnliche Dichte ist. Wir haben

$$F\left(\left[\frac{dx}{x}\right]_\epsilon\right) = \int_{\epsilon\le|x|\le E} \exp(-2\pi\imath\xi x)\frac{dx}{x}.$$

Wir ergänzen den Weg des Integrals mit Halbkreisen $|z| = E, |z| = \epsilon$, $\Im z \le O$ falls $\xi > 0$ gilt. Dann bekommen wir einen abgeschlossenen Weg γ so,daß $\int_\gamma = 0$ gilt. Das Integral über den großen Kreis strebt gegen Null für $E \to \infty$ und das über den kleinen Halbkreis strebt gegen $\pi\imath$ mal das Residuum des Integranden im Punkt $x = 0$. Das Residuum ist gleich 1, folglich ist der Limes (5.1) gleich $-\pi\imath$. Im Falle $\xi < 0$ ergänzen wir den Weg mit oberen Halbkreisen. Der Limes (5.1) ist gleich $\pi\imath$. So erhalten wir die Gleichung

$$F\left(\left[\frac{dx}{x}\right]\right) = -\pi\imath\,\mathrm{sgn}(\xi).$$

Im allgemeinen Fall kann man das folgende Verfahren benutzen. Wir wählen eine Folge von Funktionen h_ϵ welche die Bedingungen der Aussage 3.2.1

erfüllt. Dann konvergiert die Folge $h_\epsilon u$, $\epsilon \to 0$ schwach in S' gegen eine beliebige mäßige Distribution u. Die Fouriertransformation $F : S' \to S'$ ist ein schwach stetiges Operator. Daher gilt die Gleichung

$$F(u) = \lim F(h_\epsilon u)$$

wobei die rechte Seite als ein schwacher Limes gemeint wird. Die Fouriertransformierte $F(h_\epsilon u)$ ist nach dem Paley-Wiener-Schwartz Satz eine ganze Funktion.

Beispiel 10. Wir berechnen die Fouriertransformation des Hadamardschen Kernes N_λ. Das ist eine gewöhnliche Dichte

$$N_\lambda^+ = \frac{x_+^{\lambda-1} dx}{\Gamma(\lambda)} \quad \text{für} \quad \Re\lambda > 0$$

Dies ist keine summierbare Dichte auf der ganzen Linie, aber das Produkt $\exp(\epsilon x) N_\lambda$ ist summierbar für beliebiges positives ϵ. Wir wählen eine beliebig oft differenzierbare Funktion h, so daß $h(x) = \exp(-x)$ für $x \geq 0$ und $h(x) = 1$ für $x < -1$ und setzen $h_\epsilon(x) = h(\epsilon x)$. Die Folge h_ϵ erfüllt die Bedingungen der Aussage 3.2.1. Das gibt die Gleichung

$$F(N_\lambda^+) = \lim F(h_\epsilon N_\lambda^+). \tag{5.2}$$

Wir setzen $\Re\lambda > 0$ voraus und berechnen das Integral

$$F(h_\epsilon N_\lambda^+)(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \exp((-2\pi\imath\xi - \epsilon)x) x^{\lambda-1} dx.$$

Die rechte Seite hat eine analytische Fortsetzung als eine Funktion von ξ auf die untene Halbebene $\zeta = \xi + \eta\imath$, $\eta \leq 0$, weil $|\exp((-2\pi\imath\zeta - \epsilon)x)| = \exp((2\pi\eta - \epsilon)x) < 1$ für $\eta \leq 0$ gilt. Wir rechnen diese Fortseztung für $\xi = 0$ mit Hilfe des Eulerschen Integrals:

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \exp((2\pi\eta - \epsilon)x) x^{\lambda-1} dx = (2\pi\eta - \epsilon)^{-\lambda}.$$

Das stimmt mit der Funktion $(-2\pi\imath\zeta - \epsilon)^{-\lambda}$ auf der negative imaginären Achse überein. Folglich sind die beiden analytische Funktionen in unteren Halbebene gleich und die Gleichung

$$F(h_\epsilon N_\lambda^+)(\xi) = (-2\pi\imath\xi - \epsilon)^{-\lambda} = (-2\pi\imath)^{-\lambda}(\xi - \epsilon\imath)^{-\lambda}$$

gilt. Diese Familie von gewöhnlichen Funktionen hat einen schwachen Limes für $\epsilon \to 0$ in Raum S' nach Ab.3.3. Der Limes ist gleich $(2\pi\imath)^{-\lambda}(\xi - 0\imath)^{-\lambda}$. Eine Folge von verallgemeinerten Funktionen kann nicht zwei Limeten haben. Deswegen folgt aus (5.2), daß

$$F(N_\lambda^+) = (-2\pi\imath)^{-\lambda}(\xi - 0\imath)^{-\lambda}. \tag{5.3}$$

wobei $(-\imath)^{-\lambda} = \exp(-\lambda\pi\imath/2)$ gilt. Beide Seiten sind ganze analytische Funktionen von λ, schließlich gilt (5.3) auch für beliebige λ.
Für die Hadamardsche Familie $N_\lambda^- = x_-^{\lambda-1}dx/\Gamma(\lambda)$ haben wir die Beziehung $\Gamma_{-1}^*(N_\lambda^-) = N_\lambda^+$, wobei $\Gamma_{-1}(x) = -x$ eine Transformation in $\mathbb{R}$ ist. Aus diesem Grund gilt die Formel

$$F(N_\lambda^-) = (2\pi\imath)^{-\lambda}(\xi + 0\imath)^{-\lambda}. \tag{5.4}$$

nach Ab.3.1.I.
Bemerkung. Die Hadamarsche Distribution $H_\lambda^\pm$ ist homogene des Grades λ. In der Tat ist die Distribution eine homogene gewöhnliche Dichte des Grades λ für $\Re\lambda > 0$. Folglich gilt die Gleichung

$$\Gamma_a^*(H_\lambda^\pm) = a^\lambda H_\lambda^\pm$$

für jedes $a > 0$. Die beiden Seiten haben analytische Fortsetzungen in Bezug auf λ, also gilt diese Gleichung immer für beliebiges λ. Wir schließen daraus, daß die verallgemeinerte Funktion $(\xi \pm 0\imath)^\lambda$ ist homogene des Grades λ (siehe die Eigenschaft V) ist.

3.6 Distributionen mehreren Veränderlichen

Die vorigen Definitionen, Konstruktionen und Sätze werden mit natürlichen Modifikationen auf den Fall der mehreren Veränderlichen übertragen. Wir nennen nur einige Punkte.
Wir definieren die Räume der Distributionen und verallgemeinerte Funktionen auf den Raum $\mathbb{R}^n$ für eine beliebige Zahl n. Es gibt die Gruppe $\mathcal{A}$ der affinen Transformationen auf $\mathbb{R}^n$. Sie enthält die Untergruppe $\mathcal{T}$ der Schiebungen: $T_b : x \mapsto x + b$ und die Untergruppe $\mathcal{G}$ der linearen homogenen Transformationen: $\Gamma_a : x \mapsto ax$. Eine affine Transformation wird in einem Raum der Funktionen und der Dichten mit den Formeln

$$A^*(f) = f(ax + b),\ A^*(fdx) = f(ax + b)|\det a|dx$$

dargestellt. Wir definieren die Darstellung der Gruppe $\mathcal{A}$ auf Distributionen und verallgemeinerten Funktionen gemäß (1.3).
Sei q eine positive quadratische Form $q(x) = 1/2\sum_1^n q^{ij}x_ix_j$ auf $\mathbb{R}^n$. Sie definiert eine Euklidische Norm $\|x\| = \sqrt{2q(x)}$ in $\mathbb{R}^n$. Sei $O(q)$ die Gruppe der Transformationen $A \in Gl(n,\mathbb{R})$, die die quadratische Form q erhalten, d.h. $q(Ax) = q(x)$. Die Dichte

$$R_\lambda(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^{\lambda-n}\varphi(x)dx \tag{6.1}$$

ist lokal summierbar für $\Re\lambda > 0$. Im Falle $n = 1$ ist das gleich die Summe $H_\lambda^+ + H_\lambda^-$.

Satz 3.6.1 *Die Familie der Distributionen* (6.1) *hat eine meromorphe Fortsetzung* R_λ *auf* $\mathbb{C}$ *mit den einfachen Polen in den Punkten* $\lambda = 0, -2, -4, ...$ *und es gilt*

$$\operatorname{Res}_{-2k} R_\lambda d\lambda = \frac{2\pi^{n/2}q^*(D)^k\delta_0 dx}{k!\Gamma(n/2+k)}, \tag{6.2}$$

wobei

$$q^*(D) = \frac{1}{2}\sum q_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

das Dualoperator ist (siehe Ab.2.5). *Auch ist* R_λ *eine* $O(q)$*-invariant homogene mäßige Distribution des Grades* λ *und gilt die folgende differentielle Gleichung*

$$4q^*(D)R_\lambda = (\lambda-2)(\lambda-n)R_{\lambda-2}. \tag{6.3}$$

Beweis. Wir wahlen eine orthonormales Koordinatensystem $x_1, ..., x_n$ im Euklidraum $\mathbb{R}^n$. Wir haben $\|x\|^2 = \sum x_i^2$ und $q^* = 1/4\Delta$, wo Δ das Laplacesche Operator ist. Für $\Re\lambda > 2$ gilt es

$$\Delta\|x\|^\lambda = \lambda(\lambda+n-2)\|x\|^{\lambda-2}.$$

Daraus folgt die Gleichung (6.3) für $\Re\lambda > n+2$. Die Familie der Distributionen ΔR_λ ist gut bestimmt und holomorphe für $\Re\lambda > 0$. Deswegen kann man die Familie $\Delta R_{\lambda+2}$ in Halbebene $\Re\lambda > -2$ holomorph fortsetzen. Die Gleichung

$$R_\lambda = \frac{\Delta R_{\lambda+2}}{\lambda(\lambda-n+2)} \tag{6.4}$$

folgt aus (6.3) und die rechte Seite eine meromorphe Funktion in der Halbebene $\Re\lambda > -2$ mit dem einfachen Pol $\lambda = 0$. Falls $n > 2$ gilt, ist der Punkt $\lambda = n - 2$ kein Pol, weil der Zähler $\Delta R_n = \Delta dx$ verschwindet. Wir schließen aus derselbem Grund, daß $\lambda = 0$ ist ein einfach Pol in dem Fall $n = 2$. Also hat die linke Seite von (6.4) auch eine meromorphe Fortsezung in $\Re\lambda > -2$. mit dem einfachen Pol $\lambda = 0$. Deshalb hat die Familie $\Delta R_{\lambda+2}$ eine meromorphe Fortsetzung in der Halbebene $\Re\lambda > -4$ mit dem einfachen Pol $\lambda = -2$, schlißlich kann man die linke Seite auch in $\Re\lambda > -4$ mit den einfachen Polen $\lambda = 0, -2$ meromorph fortsetzen und so weiter. Die Gleichung (6.3) ist zu (6.4) equivalent. Die gewöhnliche Dichte R_λ ist für $\Re\lambda > 0$ homogene des Grades λ, deswegen gilt die Gleichung $\Gamma_c^*(R_\lambda) = c^\lambda R_\lambda$ für beliebige $c > 0$ und die Gleichung $\Gamma_A^*(R_\lambda) = R_\lambda$ für beliebige $A \in O(q)$. Dank meromorphischer Fortseztung behalten auch diese Gleichungen für alle λ bei. ⊡
Man kann eine normalisierte Familie bestimmen $NR_\lambda = \Gamma(\lambda/2)^{-1} R_\lambda$ (vergleiche mit der Familie N_λ). Die normalisierte Familie hat eine ganz analytische Fortsetzung, wobei

$$NR_{-2k} = \frac{\pi^{n/2} q^*(D)^k \delta_0 dx}{\Gamma(\frac{n}{2} + k)} \tag{6.5}$$

.

Satz 3.6.2 *Für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$ eine beliebige $O(q)$-invariante homogene Distribution des Grades λ ist gleich NR_λ mal eines Faktor $C \in \mathbb{C}$*

Tensorprodukt der Distributionen Sei $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ ein Produkt des Raums. Wir bennenen die Koordinaten mit $y = (y_1, ..., y_m)$ und $z = (z_1, ..., z_k)$ im entsprechende Faktoren. Man kann für jedes $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ und jedes $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$ ein Tensorprodukt bestimmen:

$$u \otimes v(\varphi) = u_y(v_z(\varphi)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \tag{6.8}$$

wobei $v_z(\varphi) = v(\varphi_y)$ der Wert der v auf die Grundfunktion $\varphi_y(z) = \varphi(y, z)$ bedeutet. Das Ergebnis ist eine Grundfunktion $\psi(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$. Das Produkt (6.8) ist gut bestimmt und symmetrisch: $u_y(v_z(\varphi)) = v_z(u_y(\varphi))$, wobei

$$\operatorname{supp}(u * v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$$

Das Tensorprodukt erzeugt eine bilineare Abbildung

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

welche schwach stetige für jede Veränderliche ist. Das gilt auch für die Räume der verallgemeinerten Funktionen. Für beliebige mäßigen Distributionen u, v das Tensorprodukt $u \otimes v$ ist auch eine mäßige Distribution, dabei gilt die Gleichung

$$F(u \otimes v) = F(u) \otimes F(v).$$

3.7 Fouriertransformation in $\mathbb{R}^n$

Die Konstruktionen und die Bestätigungen der Abschnitt 3.4 werden auf den Fall mehreren Verändlichen ohne wesentlichen Wechseln übertragen. Insbesondere gilt die

Aussage 3.7.1 *Für beliebige lineare Transformation A in $\mathbb{R}^n$ und beliebige mäßige Distribution u gilt die Gleichung*

$$F(A^*(u)) = B^*(F(u)),\ B = (A')^{-1} \tag{7.1}$$

wobei A' die konjungierte Transformation des Dualraums $\mathbb{R}^{n*}$ bezeichnet.

Beweis. Wir prüfen (7.1) zuerst für beliebige Grunddichte $\rho = \varphi dx$. Wir haben $A^*(\rho) = \varphi(Ax)|\det A|dx$ und

$$F(A^*(\rho))(\xi) = \int \exp(-2\pi\imath\xi x)\varphi(Ax)|\det A|dx. \tag{7.2}$$

Wir stellen $y = Ax$, $\eta = B\xi$ unter und bekommen $\xi x = \sum \xi_j x_j = \sum \eta_j y_j = \eta y$, deswegen das Integral (7.2) gleich

$$\int \exp(-2\pi\imath\eta y)\varphi(x)dx = F(\rho)(\eta) = B^*(F(\rho))(\xi),$$

Q.E.D. Das zusammen mit (1.3) impliziert (7.1). $\boxdot$
Jetzt rechnen wir die Fouriertransformation der Familie R_λ.

Satz 3.7.1 *Für beliebige positive quadratische Form q auf $\mathbb{R}^n$ gilt die Gleichung*

$$F\left(\frac{(2\pi q(x))^{\lambda-n/2}dx}{\Gamma(\lambda)}\right) = \frac{(2\pi\eta(\xi))^{-\lambda}}{\Gamma(n/2-\lambda)} \tag{7.3}$$

wobei η die duale Forme auf $\mathbb{R}^{n*}$ ist.

Für eine beliebige nichtsinguläre quadratische $q(x) = 1/2\sum_{ij} q^{ij}x_ix_j$ wird die duale Form η durch die Gleichung $\eta(\xi) = 1/2\sum_1^n q_{ij}\xi_i\xi_j$ definiert, wobei die symmetrische Matrix q^{ij} zur Matrix q_{ij} invers ist und $\xi_1, ..., \xi_n$ die duales Koordinatensystem in $\mathbb{R}^{n*}$ bedeutet, i.e. $\xi x \equiv \xi(x) = \sum \xi_i x_i$. Insbesondere für $q(x) = 1/2\|x\|^2$ ist die duale Form gleich $\eta(\xi)) = 1/2\|\xi\|^2$, wo $\|\xi\|$ die Dualnorm auf Dualraum bezeichnet. So erhalten wir die Gleichungen

$$F\left(\frac{(\sqrt{\pi}\|x\|)^{\lambda-n}dx}{\Gamma(\lambda/2)}\right) = \frac{(\sqrt{\pi}\|\xi\|)^{-\lambda}}{\Gamma((n-\lambda)/2)} \tag{7.4}$$

und

$$F^*\left(\frac{(\sqrt{\pi}\|x\|)^{\lambda-n}}{\Gamma(\lambda/2)}\right) = \frac{(\sqrt{\pi}\|\xi\|)^{-\lambda}d\xi}{\Gamma((n-\lambda)/2)} \tag{7.5}$$

Beweis. Die Distribution NR_λ ist homogene des Grades λ und invariant in Bezug auf beliebige Transformation A^*, $a \in O(q)$. Es folgt aus Aussage 3.7.1, daß die Fouriertransformation ist homogene des Grades $-\lambda$ und invarinat in Bezug auf beliebige Transformation B^*, $A \in O(q)$ (siehe (7.1)). Die Transformation B behält die duale quadratische Form η und umgekehrt für beliebige lineare Transformation B so daß $\eta(B\xi) = \eta$ gehört die Matrix $A = (B')^{-1}$ zur Gruppe $O(q)$. ist in Bezug auf diese Gruppe invariant. Daher ist die verallgemeinerte Funktion η^λ auch $O(\eta)$-invariant. Das ist eine homogene Funktion des Grades λ. Das gilt auch für die meromorphe Fortsetzung R^*_λ der Familie η^λ und jede $O(\eta)$-invariante homogene Singulare Funktion v des Grades $-\lambda$ ist gleich $c\eta^{-\lambda}$, $\lambda \neq n/2, n/2-1, n/2-2, ...$ für eine Konstante c gemäß der Aussage 3.6.2. Das impliziert, daß

$$F(R_\lambda)d\xi = c(\lambda)R^*_{-\lambda} \tag{7.6}$$

für eine meromorphe Funktion $c(\lambda)$, wobei R^*_λ die Familie der $O(\eta)$-invarianten Distributionen auf $\mathbb{R}^{n*}$. Die Gleichung (7.6) bedeutet, daß

$$R_\lambda(F(\rho)) = c(\lambda)R^*_{-\lambda}(\rho),\ \rho \in S \tag{7.7}$$

Wir stellen $\rho = \exp(-2\pi\eta)d\xi$ in (7.7) unter und bekommen $F(\rho) = \exp(-2\pi q(x))$, gemäß Kapitel 1. Wir setzen, daß $n/2 > \lambda > 0$ voraus. Dann haben wir in beider Seiten die gewöhnliche Integralen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} q(x)^{\lambda-n/2}\exp(-2\pi q(x))dx = c(\lambda)\int_{\mathbb{R}^{n*}} \eta(\xi)^{-\lambda}\exp(-2\pi\eta(\xi))d\xi,$$

Wir rechnen beiden Integralen und finden

$$c(\lambda) = \frac{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}{\pi^{\lambda-n/2}\Gamma(\frac{n-\lambda}{2})}.$$

Die rechte Seite ist auch eine meromorphe Funktion, so stimmen beide Seite für alle λ überein. Daraus folgt (7.3). $\boxdot$

3.8 Zerlegung der Delta-Funktion in ebene Wellen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Untermenge. Man bestimmt der Raum der Distributionen $\mathcal{D}'(U)$ auf U wie in Ab.3.1. Der Grundraum $\mathcal{D}(U)$ ist der Unterraum von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ der Grundfunktionen φ, dessen Träger zu U gehört. Eine Folge der Grundfunktionen φ_k, $k = 1, 2, ...$ konvergiert gegen ein Element $\varphi \in \mathcal{D}$, falls

I. $\varphi_k^{(i)} \rightrightarrows \varphi^{(i)}$, $k \to \infty$ gleichmäßig für beliebig i.

II. $\cup \operatorname{supp} \varphi_k$ gehört zu eine kompakte Menge $K \subset U$. Der Raum $\mathcal{D}'(U)$ der linearen stetigen Funktionalen auf $\mathcal{D}(U)$ ist der Raum der Distributionen auf U. Der Grundaraum $\mathcal{D}(U)$ der Grundichten ist der Raum der glatte Dichten ρ mit kompaktem Träger. Man kann beliebige Dichte ρ in der Form $\rho = \varphi dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ darstellen, wobei dx ein Lebesguesches Maß (oder ein beliebiges glattes positives Maß in $\mathbb{R}^n$) ist. Ein lineares stetiges Funktional $v : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$ auf den Raum der Dichten heißt *verallgemeinerte* (oder singulare) Funktion in U.

Der Träger einer Distributionen oder verallgemeinerte Funktion v ist eine abgeschloßene Menge $\operatorname{supp} v \subset U$, die wie in Ab.3.1 definiert ist.

Beispiel 11. Delta-Funktion auf eine Fläche. Sei $F \subset U$ eine glatte Hyperfläche in einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so daß F die Nullniveaufläche der f ist: $F = f^{-1}(0)$, wobei df nirgends auf F verschwindet. Man bennent das Funktional

$$\delta_F(\rho) = \lim_{\epsilon \searrow} \int_{|f| \leq \epsilon} \rho. \tag{8.1}$$

die Delta-Funktion auf Hyperfläche F. Falls der Raum $\mathbb{R}^n$ mit einem Skalarprodukt versehen wird, hat man die folgende Gleichung

$$\delta_F(\rho) = \int_F \frac{\varphi dS}{\|\operatorname{grad} f\|},$$

wobei $\rho = \varphi dx$ gilt und dx, dS die Euklidische Maße in $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise in F sind. Man kann auch die Ableitungen der Delta-Funktion von der Linie $\mathbb{R}$ zu U hinübertragen.
Urbild verallgemeinerter Funktionen einer Verändlichen. Wir setzen, daß df nirgends in U verschwindet voraus und betrachen die Operation

$$\rho \to \tau = \int_f \rho,$$

die eine Dichte $\rho \in \mathcal{D}(U)$ zu eine Dichte $\tau \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ verwandelt. Hier setzen wir $\tau = bdy$, wobei

$$b(y) = \int_{F(y)} \frac{\rho}{df}, \quad F(y) = f^{-1}(y) \tag{8.2}$$

Der Bruch ρ/df bedeutet eine Form σ der Ordnung $n-1$, so daß $df \wedge \sigma = \rho$ und die Hyperfläche F mit dem kovektor df koorientiert ist. Mit Hilfe einer Koordinatensystem $y_1 = f, y_2, ..., y_n$ berechnet man

$$\rho = \varphi dx = \varphi |\det J| dy_1 dy_2 ... dy_n, \; \sigma = \varphi |\det J| dy_2 ... dy_n,$$

wobei $J = \partial x / \partial y$ die Jacobische Matrix ist. Die Form σ ist eine Dichte auf F und wenn wir f zu $-f$ tauschen, bleibt diese Dichte fest. Deshalb hängt das Integral in (8.2) von der Orientation der Fläche F nicht ab, so ist τ eine Dichte auf $\mathbb{R}$. Sie ist glatt und hat einen kompakten Träger. Insbesondere ist die Gleichung (8.1) zur folgende äquivalent:

$$\delta_F(\rho) = \int_F \frac{\rho}{df}, \; \delta_F = f^*(\delta_0)$$

Im allgemeinen, für beliebige verallgemeinerte Funktion $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ bennenen wir das Funktional

$$f^*(w)(\rho) = w\left(\int_f \rho\right)$$

das *Urbild* der w bei der Abbildung f oder *fläche Welle* mit der Phase f und dem Profil w. Man bennent das Funktional f^* *ebene Welle*, falls die Funktion f lineare ist. Dann gilt die Gleichung $f(x) = \xi x$, $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$.
Beispiel 12. Wir setzen

$$\delta_F^{(j)}(\rho) = \delta_0^{(j)}(\tau) \equiv b^{(j)}(0).$$

Diese Funktionalen heißen die Ableitungen der Delta-Funktion auf F.

Zerlegung radialer Funktionen. Wir wahlen eines Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ mit einer Norm $\|x\|$. Dann ist das duale innere Produkt auf den Dualraum $\mathbb{R}^{n*}$ auch fest.

Satz 3.8.1 *Für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichung*

$$\frac{\|x\|^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_\Omega (\omega x \imath + 0)^\lambda d\omega \tag{8.3}$$

wobei $(\omega x \imath + 0)^\lambda$ die Urbild der verallgemeinerten Funktion $\imath^\lambda (t - 0\imath)^\lambda$ bei der Abbilding $t = \omega x$ bezeichnet.

Beweis. Mit Hilfe des Satzes 3.7.1 schreiben wir die linke Seite in folgende Form:

$$\frac{\|x\|^\lambda}{\Gamma((\lambda+n)/2)} = \pi^{-\lambda-n/2} F(NR^*_{-\lambda}), \tag{8.4}$$

wobei NR^*_λ die Familie der radialen Distributionen wie NR_λ auf den Dualraum bezeichnet. Wir stellen die Dichte $R^*_{-\lambda} = \Gamma(-\lambda/2)^{-1}\|\xi\|^{-\lambda-n} d\xi = \|\xi\|^{-\lambda-1} d\|\xi\| d\omega$ in Polarkoordinaten $\|\xi\|, \omega$ dar, wobei $d\omega$ das Lebesquesche Maß auf die einheit Kugelfläche Ω bedeutet. Wir "schneiden" diese Dichte in infinitesimale Stücke entlang die Strahlen $\xi = \tau\omega$, $\tau > 0$. wenden die Fouriertransformation an. Jede Stück gibt eines divergentes Integral

$$\int_0^\infty \tau^{-\lambda-1} \exp(-2\pi \imath \tau \omega x) d\tau$$

welche eine ebene Welle in $\mathbb{R}^n$ mit der Phase ωx ist. Um das divergente Integral zu vermeiden betrachten wir beide Seiten (8.4) wie Distributionen:

$$NR_{\lambda+n}(\varphi) = \frac{\pi^{-\lambda-n/2}}{\Gamma(-\lambda/2)} \int_\Omega \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \tau^{-\lambda-1} \exp(-2\pi \imath \xi x) \varphi(x) dx d\tau \right) d\omega \tag{8.5}$$

Wir wollen die Integralen über den Strahl $0 < \tau < \infty$ und über $\mathbb{R}^n$ umtauschen. Dafür wählen wir Euklidische Koordinatensystem $x_1, x' = (x_2, ..., x_n)$, so daß $x_1 = \omega x$ gilt. Wir voraussetzen, daß die Grundfunktion $\varphi = \varphi(x_1, x')$ eine analytische Fortsezung $\varphi(z_1, x')$, $z_1 = x_1 + y_1 \imath$ in einem Streifen $y_o < y_1 \leq 0$ hat, so daß $\varphi(z_1, x') = O(x_1^{-2})$. Wir können dann der Integrand in (8.5) mit Hilfe des Cauchysche Satzes für eine beliebige y_1, $y_o < y_1 \leq 0$ folgendeweise darstellen

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \exp(-2\pi\imath\tau(x_1+y_1\imath))\tau^{-\lambda-1}d\tau\varphi(x_1+y_1\imath, x')dx_1dx', \quad (8.6)$$

Wir berechnen das integral über den Strahl wie in Ab.3.5:

$$\int_0^\infty \exp(-2\pi\imath\tau(x_1+y_1\imath))d\tau = C(\lambda)z_1^\lambda, \quad C(\lambda) = \Gamma(-\lambda)(2\pi\imath)^\lambda.$$

Darum ist (8.6) gleich

$$C(\lambda)\int z_1^\lambda\psi(z_1)dx_1 \quad (8.7)$$

ist, wobei $\psi(z_1) = \int\varphi(z_1, x')dx'$ gilt. Die Dichte $\sigma = \psi dx_1$ ist genau das Bild der Dichte ρ bei der linearen Abbildung $f_\omega(x) = \omega x$, i.e.

$$\sigma = \int_{f_\omega}(\rho).$$

Deswegen ist das Integral (8.7) gleich den Wert auf φdx einer ebenen Welle mit Phase ωx und mit einem Profil w, so daß

$$w(\sigma) = C(\lambda)\int_{y_1=-\epsilon} z_1^\lambda\psi(z_1)dx_1$$

gilt. Man kann gegen Limes für $\epsilon \to 0$ übergehen, schließlich ist das Ingeral gleich $(x_1 - 0\imath)^\lambda(\sigma)$ (siehe Ab.3.3). Deswegen finden wir das Profil in der Form $w = C(\lambda)(t - 0\imath)^\lambda$. Aus (8.5) folgt die Gleichung

$$NR_{\lambda+n} = \frac{(2\imath)^\lambda\Gamma(-\lambda)}{\pi^{n/2}\Gamma(-\lambda/2)}\int_\Omega(\omega x - 0\imath)^\lambda d\omega = \frac{\Gamma(\frac{1-\lambda}{2})}{2\pi^{n/2+1}}\int_\Omega(\omega x\imath + 0)^\lambda d\omega, \quad (8.8)$$

wobei $(\omega x\imath + 0)^\lambda$ ist das Urbild des verallgemeinerten Funktion $(\imath z)_-^\lambda$. Die letztere ist der Grenzwertes der Funktion $(\imath z)^\lambda$ von $\mathbb{C}_-$. Dabei benutzen wir auch die klassische Formel $\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$.

Nun werden wir die Voraussetzung über die Grundfunktion φ los. Zuerst stellen wir fest, daß diese Voraussetzung für beliebige Funktion $\varphi = F(\theta)$, $\theta \in \mathcal{D}$ erfüllt ist. Tatsächlich hat die Funktion φ eine ganz analytische Fortsetzung in $\mathbb{C}$ in Bezug auf jegliche Koordinate $x_1, x_2, \ldots$. Diese Fortsetzung

ist in jedem Streifen beschränkt ist. Das folgt aus dem Paley-Wiener Satz 1.5.1 (oder 1.7.2). Noch mehr besitzt die Funktion $x_1^j\varphi(x)$ für beliebiges j auch diese Eigenschaft, weil die Dichte θ beliebig oft differenzierbar ist (siehe Satz 1.7.1). Deshalb zuläßt die Fortsetzung $\varphi(z_1, x')$ der Funktion φ die Abschätzung $O(x_1^{-j})$ für belieniges j in jedem Streifen.
Für eine beliebige Funktion $\varphi \in S$ nähernen wir die Funktion $\theta = F^*(\rho)$ mit eine Folge der Grunddichten $\theta_k \in \mathcal{D}$ (siehe die Aussage 3.5.1 und eine Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^n$). Die Folge $\varphi_k = F(\theta_k)$ konvergiert gegen φ auch in S, weil die Fouriertransformation $F^* : S \to S$ ein stetiges Operator Ist (siehe Ab.1.6). Die Gleichung (8.8) gilt auf jede Grunddichte $\rho_k = \varphi_k dx$. Die beide Seiten von (8.8) sind stetige Funktionalen über der Raum S und die Gleichung gilt für jedes ρ_k. Deswegen gilt die Gleichung (8.8) auch für ρ. $\boxdot$
Bemerkung. Das numerische Faktor $\Gamma((1-\lambda)/2)$ hat die Polen in den Punkte $\lambda = 1, 3, 5, ...$ und gleichzeitig verschwindet das Integral, weil die Beiträge der Punkten ω und $-\omega$ sich reduzieren. Man kann die Zerlegung (8.3) in andere Form schreiben, wobei $\lambda = 1, 3, ...$ keine Polen werden.

Folgerung 3.8.1 *Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt die Gleichung*

$$\frac{\|x\|^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})} = \frac{1}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{1+\lambda}{2})} \int_\Omega |\omega x|^\lambda d\omega \tag{8.9}$$

wobei $|\omega x|^\lambda$ das Urbild der verallgemeinerten Funktion $|t| = H^+_{\lambda+1}(t) + H^-_{\lambda+1}(t)$ bei der Abbilding $t = \omega x$ bezeichnet.

Beweis. Wir substituiren ω statt $-\omega$ in (8.3) und erhalten derselbe Ergebnis. Daher

$$\frac{\|x\|^\lambda}{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})} = 2\pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{1-\lambda}{2}) \int_\Omega s_\lambda(\omega x) d\omega \tag{8.3}$$

gilt, wobei

$$s_\lambda(t) = \frac{\imath^\lambda}{2}[(t - 0\imath)^\lambda + (-t - 0\imath)^\lambda].$$

Für $\Re\lambda > 0$ erfüllt die Gleichung

$$\imath^\lambda[(t - 0\imath)^\lambda + (-t - 0\imath)^\lambda] = 2\cos\frac{\pi\lambda}{2}|t|^\lambda = 2\cos\frac{\pi\lambda}{2}[H^+_{\lambda+1} + H^-_{\lambda+1}]$$

Sie gilt für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$, weil die beide Seiten die analytischen Fortsetzungen zulassen. Mit Hilfe der klassischen Formel

$$\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi\lambda}{2})}$$

erhalten wir (8.9).⊡
Nun zerlegen wir die Delta-Funktion in ebene Wellen.

Folgerung 3.8.2 *Für beliebige n gilt die Gleichung*

$$\delta_0 = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n} \int_\Omega (\omega x\imath + 0)^{-n} d\omega. \tag{8.10}$$

Beweis. Wir bewertigen (8.3) im Punkt $\lambda = -n$ mit Hilfe (6.5). ⊡

Folgerung 3.8.3 *Für beliebige gerade $n = 2m$ gilt die Gleichung*

$$\delta_0 = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^n} \int_\Omega \left[\frac{1}{\omega x}\right]^{(n-1)} d\omega.$$

Für ungerade $n = 2m+1$ haben wir die Darstellung

$$\delta_0 = \frac{(-1)^m}{2(2\pi)^{n-1}} \int_\Omega \delta_0^{(n-1)}(\omega x) d\omega.$$

Hier wird das Urbild der verallgemeinerten Funktion $[1/t]^{(n-1)}$ bei der Abbildung $t = \omega x$ durch $[1/\omega x]^{(n-1)}$ bezeichnen. Die Bezeichnung $\delta^{(n-1)}(\omega x)$ ist ähnlich. Bemerken, daß die beide Funktionen sind gerade, so kann man statt der Kugelfläche nur über eine Halbkugelfläche integrieren.
Beweis. Für gerade n ist die linke Seite von (8.10) ein reelles Funktional, weil $\delta(\rho) \in \mathbb{R}$ für jede reelle Dichte gilt. So kann man nur der reelle Teil der rechte Seite betrachten. So kann man statt $(n-1)!(\omega x\imath + 0)^{-n}$ die Summe

$$\frac{(n-1)!}{2}[(\omega x\imath + 0)^{-n} + (\omega x\imath - 0)^{-n}]$$

unterstellen. Sie ist gleich $(-1)^{m+1}[1/\omega x]^{(n-1)}$ für gerade $n = 2m$ und ist gleich $(-1)^m \delta^{(n-1)}(\omega x)/2$ für ungerade $n = 2m+1$ gemäß (3.4).⊡

3.9 Grundösungen

Sei $p(D)$ ein Schiebungsinvariant Differenzialoperator, d.h. ein Operator, die mit aller Schiebungen T_b umtauschbar ist. In jeder linear Koordinatensystem $x_1, ..., x_n$ hat das Operator konstanten Koeffizienten:

$$p(D) = \sum p_j D^j, \quad p_j \in \mathbb{C}, \quad D^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} ... \partial x_n^{j_n}}, \, |j| = j_1 + ... + j_n$$

Eine Distribution (oder verallgemeinerte Funktion) E heißt *Grundlösung* oder fundamentale Lösung für $p(D)$, falls die Gleichung

$$p(D)E = \delta_0 dx$$

oder $p(D)E = \delta_0$ erfüllt ist.

Aussage 3.9.1 *Sei E eine Grundlösung für $p(D)$. Für eine beliebige Distribution v mit kompaktem Träger ist die Distribution $u = E * v$ eine Lösung der Gleichung*

$$p(D)u = v.$$

Beweis. Wir haben $p(D)(E * v) = p(D)E * v = \delta_0 dx * V = 0$ gemäß (1.5) und (1.6).⊡

Beispiel 13. Für das Laplacesche Differenzialoperator $\Delta = \sum(\partial/\partial x_j)^2$ gibt es kugelsymmetrisch Grundlösung:

Folgerung 3.9.1 *Die Funktion*

$$E_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\|x\|^{2-n}}{2(2-n)\pi^{\frac{n}{2}}}, \quad n > 2$$

$$E_2(x) = \frac{1}{2\pi}\log\|x\|$$

ist eine $O(n)$-invariante Grundlösung für Δ in $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Das Operator 4Δ ist dual zur quadratische Form $\|x\|^2$. Daher folgt die Gleichung $\Delta E_n = \delta_0$ für $n > 2$ aus (6.3) und (6.2). Im Falle $n = 2$ schreiben wir die Gleichung (6.4) in die Form $\lambda S(\lambda) = \Delta R_{\lambda+2}$ wo $S(\lambda) = \lambda R(\lambda)$ ist eine analytische Funktion im Punkt $\lambda = 0$. Wir differenzieren in Bezug auf λ und setzen $\lambda = 0$:

$$S(0) = \Delta\frac{\partial}{\partial\lambda}\|x\|^{\lambda}|_{\lambda=0} = \Delta(\log\|x\|)$$

Jetzt bemerken wir, daß $S(0) = \mathrm{Res}_0\, R_\lambda = 2\pi\delta_0 dx$ gemäß (6.2). ⊡

Bemerken, daß E_n für $n > 2$ eine homogene Grundlösung des Grades $2 - n$ ist. Es gibt keine andere Grundlösung des Grades $2 - n$. Es gibt keine homogene Grundlösung in dem Fall $n = 2$.

Beispiel 14. Sei q eine quadratische Form in $\mathbb{R}^n$ von Signature $(1, n-1)$.

Sei $q_+ = \max(q,0)$ und t eine lineare Funktion so daß $q_+ = 0$, auf der Hyperebene $t(x) = 0$. Wir bertachten die folgende Familie der gewöhnlichen Dichten

$$Q_\lambda = \theta(t)\,\frac{|\det q|^{\frac{1}{2}}\, q_+^{\frac{\lambda-n}{2}}\, dx}{(2\pi)^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{\lambda}{2})\Gamma(\frac{\lambda-n}{2}+1)},\ \Re\lambda > n-2$$

wobei $\theta(t) = 1$ für $x \geq 0$ und sondern $\theta(t) = 0$ gilt. Das ist eine holomorphe Familie der Dichten in der Halbebene $\Re\lambda > n-2$ mit Träger im Kegel $K_q^+ = \{q(x) \geq 0,\ t(x) \geq 0\}$.

Satz 3.9.1 (M.Riesz) *Diese Familie hat eine ganze analytische Fortsetzung Q_λ, wobei Q_λ immer eine mäßige homogene Distribution des Grades λ mit* $\operatorname{supp} Q_\lambda \subset K_q^+$. *Die Gleichungen*

$$Q_\lambda * Q_\mu = Q_{\lambda+\mu}, \tag{9.1}$$

$$Q_0 = \delta_0 dx, \tag{9.2}$$

$$\Box Q_\lambda = Q_{\lambda-2}, \tag{9.3}$$

gelten, wobei $\Box$ das dual Differenzialoperator zur Form q bezeichnet (siehe Ab.2.5).

Beweis. Wir betrachten zuerst die quadratische Form

$$q(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2). \tag{9.4}$$

Die Faltung in (9.1) ist mit dem Verfahren der Ab.3.2,**II** bestimmen wird. Die Gleichung (9.1) ist zuerst für $\Re\lambda > 0$, $\Re\mu > 0$ geprüft wird. Sie gilt auch für alle λ, μ dank der analytische Fortsetzung. Man kann direkt die Gleichung (9.2) beweisen.
Man kann eine beliebige Form $\tilde{q}$ von Signature $(1, n-1)$ mit Hilfe einer lineare Transformation $A \in Gl(n,\mathbb{R})$ in Form (9.4) bringen, wobei $\det A = |\det q|^{-1/2}$ gilt. So gilt (9.1)und (9.2) auch für $\tilde{q}$. Man prüft (9.3) mit der Methode des Satzes 3.6.1. $\boxdot$
Bemerkung. Jede Distribution Q_λ ist invariant in Bezug auf die allgemeine orthochrone Lorenz Gruppe $L^\uparrow$. Die allgemeine orthochrone Lorenz Gruppe $L^\uparrow$ ist die Gruppe der Transformationen $A \in Gl(n,\mathbb{R})$, so daß $q(Ax) \equiv q(x)$, $A(K_q^+) = K_q^+$. Insbesondere im Fall $n = 4$ ist $L^\uparrow$ die eigene orthochrone Lorenz Gruppe, wobei t als die Zeit-Variable betrachtet wird. Die Distributuon Q_λ ist offenbar invariant für $\Re\lambda > 0$ und bleibt auch invarinat für beliebige λ dank der analytische Fortsetzung.

Folgerung 3.9.2 *Die Distribution $E_n = Q_2$ ist für beliebige n eine Grundlösung für das Operator $\Box$.*

Insbesondere für die Form(9.4) ist das Dualoperator gleich dem Wellenoperator

$$\Box = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right].$$

Der Träger der Distribution E_n ist gleich dem Kegel K_q für ungerade n (der Kegel der Zukunft oder der Vergangenheit). Das ist zum Huyghenssche Prinzip equivalent. Für gerade $n \geq 4$ ist der Träger gleich ier Kegelfläche $q(x) = 0$, $t(x) \geq 0$. Das folgt aus dem Fakt, daß die Dichte $q_+^{(\lambda-n)/2}$ ein Pol im Punkt $\lambda = 2$ hat, wobei der Bruch

$$\frac{t\, q_+^{\frac{\lambda-n}{2}}}{\Gamma(\frac{\lambda-n}{2}+1)}$$

außer der Kegelfläche verschwindet. Insbesondere gilt die Gleichung

$$E_4 = \frac{\theta(t)}{4\pi}\delta(q).$$

Das ist das Huyghens-Hadamardsche Prinzip.
Dividierung durch eines Polynom Sei $p(x)$ eines Polynom in $\mathbb{R}^n$. Die Dichte dx/p gehört im allgemeinen nicht zu L_{loc}. Man nennt eine Distribution $[dx/p]$ *Regularisierung* des Bruchs, falls die Gleichung

$$p\left[\frac{dx}{p}\right] = [dx]$$

erfüllt. Der Bruch $[dx/q]$ ist eine gewöhnliche Dichte, falls $q(x)$ eine positive quadratische Form ist und $n > 2$. Falls $n = 2$ kann man eine Regularisierung mit Hilfe der Familie (6.1) bestimmen kann, wobei der Punkt $\lambda = n - 2 = 0$ ein Pol der Familie R_λ ist. Wir setzen $[dx/q] = S_0$, wobei S_0 der regulär Teil der Entwicklung der Familie in Punkt $\lambda = 0$ gleich ist, d.h. $S_0 = \lim_{\lambda\to 0} R_\lambda - \lambda^{-1}\operatorname{Res}_0 R_\lambda$.
Falls der Polynom p nur einfache reelle Würzel hat, kann man eine Regularisierung mit Hilfe einer Formel wie (1.1) bestimmen.

Satz 3.9.2 *Für beliebiges Polynom $p \not\equiv 0$ gibt es eine Regularisierung der Dichte $[dx/p]$.*

Der Beweis ist kompliziert. Es gibt keine Unität, falls p zumindest eine reelle Wurzel hat.

Folgerung 3.9.3 *Für beliebige Differenzialoperator $p(D) \neq 0$ mit konstanten Koeffizienten gibt es eine mäßige Grundlösung E.*

Beweis. Wir setzen

$$p(2\pi\imath\xi) = \sum p_j (2\pi\imath)^{|j|}\xi^j, \quad \xi^j = \xi_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{j_n}$$

Die Funktion $q(\xi) = p(2\pi\imath\xi)$ ist ein polynom in $\mathbb{R}^{n*}$, so existiert eine Distribution $[d\xi/q]$, welche der Gleichung $q[d\xi/q] = d\xi$ genügt. Wir setzen $E = F^*([d\xi/q]) \in S'$ und berechnen

$$p(D)E = F^*\left(p(2\pi\imath\xi)\left[\frac{d\xi}{p(2\pi\imath\xi)}\right]\right) = F^*([d\xi]) = \delta_0. \boxdot$$

Kapitel 4

Elemente der Symplektischen Geometrie

26.03.1997

Inhaltsverzeichnis

4.1 Mannigfaltigkeiten und Abbildungen

Definition. Sei M ein topologischer Raum und $U \subset M$ eine offene Untermenge, $\mathbb{R}^n$ einer Koordinatenraum mit Koordinaten $x_1, ..., x_n$, V eine offene Untermenge in $\mathbb{R}^n$. Ein Homeomorphismus $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$ nennt sich eine Karte auf M mit dem Gebiet $U \subset M$ und die Funktionen $x_1 \cdot \varphi, ..., x_n \cdot \varphi$ nennen sich die Koordinaten [1] auf U. Eine Menge $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ der Karten heißein Atlas, falls $\cup U_\alpha = M$. Sei (U, φ), (U', φ') die Karten auf M. Die Abbildung

$$\psi : \varphi(U \cap U') \xrightarrow{\sim} \varphi'(U \cap U')$$

so daß $\psi \cdot \varphi = \varphi'$ heiß *Verbindungshomeomorphismus*. Das Verbindungshomeomorphismus ψ' für das Paar (U, φ), (U', φ') ist gleich dem inversen Homeomorphismus ψ^{-1}.

Wir fixieren eine Zahl r, $r = 1, 2, ..., \infty$. Die Karten sind C^r-vereinbar, falls die Verbindungshomeomorphismusen ψ, ψ^{-1} zur Klasse C^r gehören. Das impliziert, daß entweder $U \cap U' = \emptyset$ oder $\dim \varphi(U) = \dim \varphi'(U')$ gilt. Ein Atlas $\mathcal{A}$ ist von Klasse C^r, falls jedes Paar der Karten aus $\mathcal{A}$ C^r-vereinbar ist. Man sagt, daß ein Atlas von Klasse C^r auf M eine Struktur von C^r-Mannigfaltigkeit auf M definiert. Ein beliebiges Atlas $\mathcal{A}'$ auf M definiert dieselbe Struktur, falls die Vereinigung $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ auch ein C^r-Atlas ist.

Eine C^r-Mannigfaltigkeit M hat in einem Punkt x die Dimension n, ($\dim_x M = n$), falls sie eines Koordinatensystem $x_1, ..., x_n$ in einer Umgebung des Punktes x hat.

Wir bennenen eine Mannigfaltigkeit M *glatte*, falls M von Klasse C^∞ ist. Weiter betrachten wir nur glatte Mannigfaltigkeiten.

Beispiele. Die Mannigfaltigkeiten $M = \mathbb{R}^n$, S^n sind glatte. Der n-Torus T^n ist glatt.

Wir benennen mit $\mathcal{E}(V)$, $V \subset \mathbb{R}^n$ der Raum beliebig oft differenzierteren (glatten) Funktionen in V.

Untermannigfaltigkeiten. Eine beliebige offene Untermenge M' einer glatten Mannigfaltigkeit M ist auch eine glatte Mannigfaltigkeit mit dem Atlas $\mathcal{A}'$, der Karten $(U \cap M', \varphi')$, wobei $(U, \varphi) \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$ gilt und φ' die Beshränkung des Homeomorphismuses φ auf $U \cap M'$ bedeutet.

Die folgende Aussage zeigt andere Klasse der Untermannigfaltigkeiten.

Aussage 4.1.1 *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $\mathcal{A}$ und N eine abgeschlossene Untermenge von M, so daß für jede Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ ist der Durchschnitt $\varphi(U \cap N)$ gleich der Menge der Lösungen des Gleichungssystems*

$$f_1(x) = ... = f_m(x) = 0,\ x \in V = \varphi(U) \tag{1.1}$$

wobei $f_1, ..., f_m \in \mathcal{E}(V)$ gilt und die Formen $df_1, ..., df_n$ linear unabhängig sind. Die Menge N hat eine Struktur der glatten Mannigfaltigkeit, wobei $\dim_x N = \dim_x M - m$ *gilt.es*

[1] Das symbol $f \cdot g$ bedeutet Komposition der Abbildungen f und g

Beweis. Das System (1.1) hat eine allgemeine Lösung

$$x_1 = g_1(x'), ..., x_m = g_m(x'),\ x' = (x_{m+1}, ..., x_n),$$

in eine Umgebung V_y von einer beliebigen Punkt $y \in \varphi(N) \cap U$, wobei $x_1, ..., x_n$ eine Koordinatensystem in V und $g_1, ..., g_m$ glatte Funktionen in einem Gebiet $V' \subset \mathbb{R}^m$ sind. Das folgt aus Implizitfunktionsatz. Sei $W = \varphi^{-1}(V_y)$ und $\psi = \pi \cdot \varphi : W \xrightarrow{\sim} V'$, wobei $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ eine Koordinatenprojektion benotigt. Wir betrachten (W, ψ) als eine Karte auf N. Alle Karten wie (W, ψ) sind vereinbar, denn die Funktionen $g_1, ..., g_m$ sind glatte. $\boxdot$

Die Algebra $\mathcal{E}(M)$. Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ heißt eine glatte Funktion auf Mannigfaltigkeit M, falls für jede Karte (U, φ) auf M die Funktion $\tilde{f} = f\varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ zum Raum $\mathcal{E}(\phi(U))$ gehört. Die Menge $\mathcal{E}(M)$ der glatten Funktionen ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und auch eine Algebra mit punktweise Multiplikation $(f, g) \mapsto fg$. Die Algebra $\mathcal{E}(M)$ ist hinreichend reich. Insbesondere, für beliebige Karte (U, φ) auf M enthält sie die Unteralgebra $\mathcal{D}(U)$ allen glatten Funktionen f in U mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} f \subset U$.

Abbildungen der Mannigfaltigkeiten. Sei M, N Mannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ der topologischen Räume heißt Abbildung der Mannigfaltigkeiten, falls für beliebige Karte $(\psi : W \to V \subset \mathbb{R}^m)$ auf N die Abbildung

$$\tilde{f} = \psi \cdot f : f^{-1}(W) \to \mathbb{R}^m$$

glatte ist, d.h. $f_1, ..., f_m \in \mathcal{E}(f^{-1}(W))$, wobei $\tilde{f} = (f_1, ..., f_m)$ gilt. Die Komposition der glatten Abbildungen $f : M \to N$, $g : N \to P$ ist auch eine glatte Abbildung $g \cdot f : M \to P$.

Definition. Das direkt Produkt der Mannigfaltigkeiten M, M' ist das topologiche Raum $M \times M'$ mit dem Atlas $\{(U \times U', \varphi \times \varphi')\}$. Dabei gilt $\dim_{x,x'} M \times M' = \dim_x M + \dim_{x'} M'$.

4.2 Tangentiale Vektorfelder und Lie Ableitung

Definition. Ein *tangentiales Vektor* t auf M in einem Punkt x ist ein lineares Funktional $t : \mathcal{E}(M) \to \mathbb{R}$, so daß

$$t(ab) = t(a)b(x) + a(x)t(b). \tag{2.1}$$

Der Raum der tangentialen Vektoren im Punkt x wird *Tangentialraum* im x bennent und durch $T_x(M)$ bezeichnet.

Aussage 4.2.1 *Für eine beliebige Karte* (U, φ) *und einen beliebigen Punkt* $x \in U$ *ist das Funktional*

$$t = \sum_1^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} : f \mapsto \sum a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \tag{2.2}$$

ein tangentiales Vektor $t \in T_x(M)$, *wobei* $x_1, ..., x_n$ *eines Koordinatensystem auf* $\varphi(U)$ *ist. Umgekehrt, ist ein beliebiges tangentiales Vektor in Form* (2.2) *darstellbar.*

Definition. Ein lineares Funktional $t : T_x(M) \to \mathbb{R}$ heißt kotangentiales Kovektor oder *Differentialform* von Ordnung 1.
Der Dualraum $T_x^*(M)$ des Tangentialraums $T_x(M)$ heißt der Kotangentialraum. Die Aussage 4.2.1 impliziert $\dim T_x(M) = \dim T_x^*(M) = \dim_x M$.
Definition. Ein Vektorfeld auf M ist eine lineare Abbildung $v : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$, so daß die Leibnitzsche Gleichung

$$v(fg) = v(f)g + fv(g) \tag{2.3}$$

für beliebige $f, g \in \mathcal{E}(M)$ gilt.
Für eines beliebigen Vektorfeld v und einen beliebigen Punkt $x \in M$ ist das Funktional $v_x : f \mapsto v(f)(x)$ ein tangentiales Vektor. Schließlich haben wir eine Darstellung $v = \sum v_i(x)\partial/\partial x_i$ in einer beliebigen Koordinatensystem. Ein Punkt $x \in M$ wird *Fixpunkt* des Vektorfeldes v bennent, falls $v(x) = 0$. Das ist equivalent zu $v_1(x) = ... = v_n(x) = 0$.

Aussage 4.2.2 *Für beliebigen Vektorfelder* u, v *auf* M *ist der Kommutator* $[u, v] := uv - vu$ *auch ein Vektorfeld.*

Beweis. Offenbar ist der Kommutator ein linearer Operator. Wir berechnen mit dem Leibnitzschen Axiom (2.3):

$$[u, v](fg) = u(v(f)g + fv(g)) - v(u(f)g + fu(g)) =$$

$$= uv(f)g + fuv(g) - vu(f)g - fvu(g) = [u, v](f)g + f[u, v](g).$$

$\boxdot$

Folgerung 4.2.1 *Der Raum $V(M)$ der Vektorfelder auf M ist eine $\mathbb{R}$-Algebra Lie.*

Beweis. Eine $\mathbb{R}$-Algebra Lie ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer bilinear Operation $[\cdot,\cdot]$, so daß die folgende Axiomen

$$[v,u] = -[u,v],$$

$$[u,[v,w]] + [w,[u,v]] + [v,[u,w]] = 0$$

erfüllen. Die beiden Axiomen folgen unmittelbar aus der Konstruktion der Klammern.⊡

Tangentiale Abbildung. Eine beliebige Abbildung $f : M \to N$ bewirkt einen Homomorphismus der Algebren $f^* : \mathcal{E}(N) \to \mathcal{E}(M)$. Sie bildet jedes tangentiales Vektor $t : \mathcal{E}(M) \to \mathbb{R}$ in einem linearen Funtkional $s = tf^* : \mathcal{E}(N) \to \mathbb{R}$. Das erfüllt auch die Leibnizsche Gleichung (2.1), folglich $s \in T_{f(x)}(N)$ gilt. Damit bekommt man ein lineares Operator

$$Df_x : T_x(M) \to T_{f(x)}(N).$$

Das heißt der *Differential* der Abbildung f im Punkt x. Sei

$$Df_x^* : T_{f(x)}^*(N) \to T_x^*(M) \tag{2.4}$$

das Dualoperator. Das bedeutet, daß

$$Df^*(\tau)(t) = \tau(Df(t))$$

für beliebige $t \in T_x(M)$, $\tau \in T_{f(x)}^*(N)$.

Definition Ein Punkt $x \in M$ heißt *kritisch* für eine Abbildung $f : M \to N$, falls rank $Df_x < \dim_{f(x)} N$ gilt.

Dynamisches System. Sei M eine Mannigfaltigkeit und M' eine offene Untermenge von M. Wir betrachten eine glatte Abbildung

$$G : M' \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

so daß $G(x,0) = x$ gilt. Für eine beliebige glatte Funktion f auf M ist $G^*(f)(x,t)$ eine glatte Funktion auf $M' \times (-\varepsilon,\varepsilon)$, wobei $G^*(f)(x,0) = f(x)$ gilt. Die Ableitung $d/dt\, G^*(f)(x,0)$ ist auch eine glatte Funktion auf M'. Wir bennenen deise Funktion durch $v(f)$, wobei $v : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M')$ eine lineare Abbildung ist. Sie erfullt den Axiom (2.3) und man kann einfach prüfen,

daß v eines Vektorfeld auf M' ist. Das heißt die Ableitung der Familie der Abbildungen $g_t(x) = G(x,t)$.
Wir betrachten ein umgekehrtes Problem. Sei v ein Vektorfeld auf eine Mannigfaltigkeit M und

$$\frac{dy}{dt} = v(y),\ y(0) = x. \tag{2.5}$$

die entsprechende gewöhnliche Differentialgleichung. Sie hat eine beliebig oft differenzierbare Lösung $y = y(t,x)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$ für beliebige Anfangsbedingung $x \in M$. Die ist eine beliebig oft differenzierbare Funktion von x. Die Lösung erzeuget eine Familie der glatten Abbildungen $g_t : x \mapsto y(t,x)$. Für eine beliebige kompakte Menge $M' \subset M$ gibt es eine positive Konstante ε, so daß die Abbildung $g(t) : M' \to M$ für beliebig t, $|t| < \varepsilon$ bestimmt. Noch mehr ist die Abbildung $g_t : M' \to g_t(M')$ invertierbar. Die Familie $g(t)$ heißt der durch das Vektorfeld v erzeugend *Flüß* oder Dynamisches System.

Hilfsatz 1 . *Für beliebige Punkt $y \in M$, welche kein Fixpunkt des Vektorfeldes v ist, gibt es eine Koordinatensystem $(x_1, ..., x_m)$ in einer Umgebung von y, so daß die Gleichungen*

$$v = \partial/\partial x_1, \quad g_t(x_1, ..., x_m) = (x_1 + t, x_2, ..., x_m) \tag{2.6}$$

gelten.

Beweis. Wir wahlen ein kleines Stück der Hyperfläche H durch den Punkt y, die nicht tangentiale zu $v(y)$ ist. Die Lösung $y(t,x)$, $x \in H$ der Gleichung (2.5) mit $y(0) = y$ ist eine glatte Abbildung $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times H \to M$, wobei das Jacobian $J = \det(\partial y/\partial(t,x)$ im Punkt $(0,y)$ verschwindet nicht. Schließlich ist die Abbildung $Y : (-\varepsilon,\varepsilon) \times H \to W$, $W = Y(-\varepsilon,\varepsilon) \times H)$ invertierbar, falls das Stück H hinreichend klein ist. Dabei ist das Bild W eine offene Umgebung des Punktes y. Seien $y_1, ..., y_{m-1}$ eines Koordinatensystem auf H. Die Funktion $x_1 = t$ zusammen mit Funktionen $y_1(y), ..., y_{m-1}(y)$ bilden eines Koordinatsystem auf W, so daß (2.6) erfüllt. $\boxdot$
Lie Ableitung. Für ein beliebiges geometrisches Objekt γ auf M kann man die Familie der Objekte $\gamma_t = g_t^*(\gamma)$ auf M' betrachten. Die Ableitung

$$L_v(\gamma) = \frac{d}{dt}\gamma_t$$

bennent sich *Lie Ableitung* des Objektes γ entlang des Vektorfelds v. Man kann die Lie Ableitung für Funktion, Vektorfelder, Differentialformen u.s.w anwenden. Insbesondere die Lie Ableitung einer glatten Funktion f ist gleich $v(f)$.

Aussage 4.2.3 *Für beliebiges Vektorfeld u gilt die Gleichung*

$$L_v(u) = [v, u] \tag{2.7}$$

gilt.

Beweis. Die beide Seiten von (2.7) hängt nicht von der Wahl des Koordinatensystem. Sei $y \in M$ kein Fixpunkt des Feldes v. Es folgt aus (2.6) daß $g_t^*(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial x_j$, $j = 1, ..., n$ und,

$$g_t^*(u) = \sum g_t^*(u_j)\partial/\partial x_j,$$

schließlich $L_v(u) = \sum v(u_j)\partial/\partial x_j$. Wir berechnen das Kommutator: $[v, u] = vu - uv = \sum(v(u_j) - u(v_j))\partial/\partial x_j$. Die Ableitungen $u(v_j)$ verschwinden weil die Koeffizienten v_j konstant sind. Das impliziert (2.7) im Punkt y
Die Gleichung (2.7) gilt auch für jeden Punkt $y \in \operatorname{supp} V$, weil $y = \lim x_p$ gilt, wobei x_p, $p = 1, 2, ..$ kein Fixpunkt des Feldes v ist und die beide Seiten von (2.7) stetige sind. Die beide Seiten verschwinden ausserhalb $\operatorname{supp} v$, schließlich gilt (2.7) überall. $\boxdot$

4.3 Differentialformen

Sei $\mathcal{E}(M)$ die Algebra der glatten Funktionen auf eine glatte Mannigfaltigkeit M. Wir bezeichnen $V(M)$ der Raum der glatten Vektorfelder auf M. Der Raum $V(M)$ ist ein Modul über die Algebra $\mathcal{E}(M)$ mit der Wirkung $(a, v) \mapsto av$ der Algebra im Modul.
Definition Eine Differentialform auf M des Grades $k > 0$ ist eine polylineare Abbildung der Räume

$$\omega : (v_1, ..., v_k) \mapsto \omega(v_1, ..., v_k) : \; V(M)^k \to \mathcal{E},$$

mit die folgende Eigenschaften:

$$\omega(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, ..., v_k) = -\omega(v_1, ..., v_k) \tag{3.1}$$

für eine beliebige i, $1 \leq i < k$, d.h. ω ist antisymmetrisch, und

$$\omega(av_1, ..., v_k) = a\omega(v_1, ..., v_k) \tag{3.2}$$

für beliebige $a \in \mathcal{E}$, d.h. ω ist eines $\mathcal{E}(M)$-Homomorphismus in Bezug auf erstes Argument. Diese Abbildung ist eines $\mathcal{E}(M)$-Homomorphismus in Bezug auf beliebiges Argument, weil ω antisymmetrisch ist. Man bezeichnet $\Omega^k(M)$ der Raum der Differentialformen des Grades k auf M und setzt $\Omega^0(M) = \mathcal{E}(M)$.

Aussage 4.3.1 *Für beliebige Punkt $y \in M$ wird eine lineare Abbildung*

$$r_y : \Omega^1(M) \to T_y^*(M)$$

gut bestimmt.

Beweis. Wir bemerken zuerst, daß $\omega(v_1, ..., v_k)(y) = 0$ falls y einer Fixpunkt für zumindest eine Feld v_i ist. Tatsächlich sei $v_1(y) = 0$. Wir schreiben $v_1 = \sum_1^m a_i u_i$ mit Hilfe der Morse Lemma (siehe Ab.2.6), wo $u_i \in \mathcal{V}(M)$, $a_i \in \mathcal{E}(M)$ und $a_1(y) = ... = a_m(y) = 0$ gelten. Davon schließen wir $\omega(v_1, , , ,) = \sum a_i \omega(u_i, ...)$ dank (3.2). Für eine beliebige 1-Form ω auf M definieren wir eine lineare Abbildung $\omega_y : T_y(M) \to \mathbb{R}$ durch die Formel $\omega_x(t) = \omega(v)(x)$, wo v ein beliebiges Feld so daß $v_j(x) = t_k$. Der Wert $\omega(v)(x)$ hängt von der Wahl der Felder nicht. Das folgt aus obigen Bemerkung. So ist ω_y als eines Element des Raums $T_y^*(M)$ bestimmt. Das bewirkt die Abbilding r_y.$\boxdot$
Das kotangentiale Vektor $r_y\omega$ heißt der Wert der Form ω im Punkt y.
Man kann beliebige Differentialform mit einer beliebigen Funktion $a \in \mathcal{E}(M)$ multiplizieren: $(a\omega(v_1, ..., v_k) = a\omega(v_1, ..., v_k)$. So ist der Raum $\Omega^*(M) = \sum_{k \geq 0} \Omega^k(M)$ ein $\mathcal{E}(M)$-Modul. Er ist eine in Bezug auf äußere Multiplikation. Nämlich wird das *äußeres* Produkt $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+l}(M)$ für beliebige $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ durch die folgende Formel definiert:

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, ..., v_{k+l}) = \sum_{A,B} \operatorname{sgn}(A, B)\ \alpha(v_{a(1)}, ..., v_{a(k)})\beta(v_{b(1)}, ..., v_{b(l)}), \tag{3.3}$$

Die Summe läuft über die Menge der Zerlegungen

$$[1, ..., k+l] = A \cup B,\ A = (a(1), ..., a(k)),\ B = (b(1), ..., b(l))$$

und $\operatorname{sgn}(A, B) = 1$ falls die Permutation

$$[1, ..., k + l] \mapsto [a(1), ..., a(k); b(1), ..., b(l)]$$

gerade ist, sonst gilt $\operatorname{sgn}(A, B) = -1$. Dank sind die Abbildungen α und β, hängt jede Glied nicht von der Ordnung in der Menge A und in der Menge B ab.

Aussage 4.3.2 *Das äußere Produkt ist assoziativ:*

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

und Grad-kommutativ:

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{kl} \alpha \wedge \beta.$$

Beweis ist einfach.

Beispiel. Für beliebigen 1-Formen $\alpha, \beta\gamma$ und beliebigen Felder u, v, w wir haben nach (3.3)

$$\alpha \wedge \beta(u, v) = \alpha(u)\beta(v) - \alpha(v)\beta(u),$$

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma(u, v, w) = \alpha(u)\beta(v)\gamma(w) - \alpha(v)\beta(u)\gamma(w) +$$
$$\alpha(v)\beta(w)\gamma(u) - \alpha(w)\beta(v)\gamma(u) + \alpha(w)\beta(u)\gamma(v) - \alpha(u)\beta(w)\gamma(v).$$

Definition. Für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{E}(M)$ man bestimmt das *äußeres Differential* df durch die folgende Formel:

$$df(v) = v(f). \tag{3.4}$$

Das ist eine Abbildung $V(M) \to \mathcal{E}(M)$ die mit Wirkung der Algebra $\mathcal{E}(M)$ tauschbar ist: $df(bv) = bv(f) = bdf(v)$, folglich ist df eine 1-Form auf M. Das ist ein gewöhnliches Differential der Funktionen.

Aussage 4.3.3 *Eine beliebige Differentialform ω des Grades k auf M hat für eine beliebiger Karte $(U, \varphi; x_1, ..., x_m)$ eine Darstellung*

$$\omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} \omega_{i_1,...,i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}, \quad \omega_{i_1,...,i_k} \in \mathcal{E}(U) \tag{3.5}$$

wobei die Koeffizienten $\omega_{i_1,...,i_k}$ eindeutig bestimmt werden.

Beweis. Sei $X = U$ eine offene Untermannigfaltigkeit des Raums $\mathbb{R}^m$. Die Felder $v_i = \partial/\partial x_i, i = 1, ..., m$ werden auf ganzen Raum X definiert. Wir bestimmen die Koeffizienten

$$\omega_{i_1,...,i_k} = \omega(v_{i_1}, ..., v_{i_k}).$$

Ein beliebiges Vektorfeld v hat eine Entwicklung $v = \sum a_i v_i$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathcal{E}(M)$. Damit kann man einfach die Gleichung (3.5) prüfen. Dabei benutzt man (3.1) und (3.2).
Im allgemeinen Fall betrachten wir ein beliebiges Kompaktum $K \subset U$ und eine Funktion $h \in \mathcal{D}(U)$ die auf K gleich 1 ist. Man kann die Felder $hv_i, i = 1, ..., m$ auf genzen Raum X fortsetzen, deshalb ist der Wert

$$\omega^h_{i_1,...,i_k} = \omega(hv_{i_1}, ..., hv_{i_k}).$$

für beliebigen $i_1, ..., i_k$ gut bestimmt. Dabei erfüllt die Gleichung (3.5) auf beliebigen Felder $u_1, ..., u_k$ so daß $\operatorname{supp} u_i \subset K$, $i = 1, ..., k$ gilt. Für eine andere Funktion $g \in \mathcal{D}(U)$, $g|K = 1$ stimmen die Funktionen $\omega^h_{i_1,...,i_k}$ und $\omega^g_{i_1,...,i_k}$ auf K überein. Das folgt aus (3.1),(3.2). Deswegen hängt nicht ein beliebiges Koeffizient $\omega^h_{i_1,...,i_k}|K$ von der Wahl der Funktion h ab. Schließlich ist jedes Koeffizient in (3.5) gut bestimmt.$\boxdot$
Äußeres Differential. Das ist eine lineare Abbildung

$$d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$$

mit der Eigenschtaft $\deg d(\omega) = \deg \omega + 1$. Das Differential muss die folgende Gleichungen erfüllen

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \beta,\ k = \deg \alpha \tag{3.6}$$

$$dd\omega = 0. \tag{3.7}$$

Aussage 4.3.4 . *Das Differential d ist durch die Axiomen* (3.4), (3.6),(3.7) *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es folgt aus (3.4),(3.5),(3.6),(3.7), daß

$$d\omega = \sum d(\omega_{i_1,...,i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}.$$

für beliebige Karte gilt. $\boxdot$
Man kann das Differential ausdrücklich darstellen:

Aussage 4.3.5

$$d\omega(v_0, ..., v_k) = \sum (-1)^i v_i(\omega(v_0, ..., \hat{i}, ..., v_k)+$$

$$\sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([v_i, v_j], v_0, ..., \hat{i}, ..., \hat{j}, ..., v_k)$$

wo das Symbol $\hat{i}$, daß die i-te Veränderliche in der Reihe vermisst, bedeutet.

Inneres Produkt. Sei ω eine Differentialform des Grades k und v eines Feld auf M. Die Operation

$$v \vee \omega = \phi, \quad \phi(v_1, ..., v_{k-1}) = \omega(v, v_1, ..., v_{k-1})$$

heißt das *inneres* Produkt des Feldes und der Form. Dabei gilt $\deg v \vee \omega = \deg \omega - 1$.

Aussage 4.3.6 *Die Lie Ableitung der Form wird mit die folgende Formel gerechnet:*

$$L_v(\omega) = d(v \vee \omega) + v \vee d\omega. \tag{3.8}$$

Beweis. Die Behauptung ist lokal. Sei $y \in M$ ist kein Fixpunkt des Feldes v. Nach der Aussage 4.2.3 gilt $v = \partial/\partial x_1$ für eine Karte $(U; x_1, ..., x_m$ in einer Umgebung U des Punktes y. Dann gilt g_t wie in (2.6). Wir benutzen die Darstellung (3.5) für eine beliebige Form ω in diese Karte und bekommen

$$L_v \omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} \frac{\partial}{\partial x_1} (\omega_{i_1, ..., i_k}) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

Anderseits rechnen wir die rechte Seite von (3.8):

$$v \vee d\omega = \sum_{1 < i_1 < ... < i_k} \frac{\partial}{\partial x_1} \omega_{i_1, ..., i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} -$$

$$- \sum_{1 = i_1 < i_2 < ... < i_k} d' \omega_{i_1, ..., i_k} dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k},$$

wo setzen wir $d'f = \sum_2^m \partial f / \partial x_i dx_i$. Weiter berechnen wir

$$d(v \vee \omega) = \sum_{1 = i_1 < ... < i_k} d\omega_{i_1, ..., i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k},$$

wobei $df = \partial f / \partial x_1 dx_1 + d'f$ gilt. Diese Gleichungen implizieren (3.8).
Die Gleichung (3.6) gilt offensichlich außer $\operatorname{supp} v$. Beide Seiten sind stetig überall, folglich ist (3.8) überall erfüllt.⊡

Das Urbild der Differentialform. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung der Mannigfaltigkeiten. Dann ist das Differential wie eine Abbildung der Formen beliebiges Grades bestimmt

$$Df^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M). \tag{3.9}$$

Dabei berechnet man die Abbildung (3.9)

$$Df^*(y_0)(dy_1 \wedge ... \wedge dy_k) = y_0(f(x)) \sum_{i_1 < ... < i_k} \frac{\partial y_1(f(x))}{\partial x_{i_1}} ... \frac{\partial y_k(f(x))}{\partial x_{i_k}} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

für beliebige Funktionen $y_0, y_1, ..., y_k$ auf N und beliebige Koordinatensystem $(x_1, ..., x_m)$ auf M. Die folgende wichtige Beziehung gilt:

$$d(Df^*((\omega)) = Df^*(d\omega). \tag{3.10}$$

Die Form $Df^*(\omega)$ heißt das *Urbild* der Form ω bei der Abbildung f. Falls N eine Untermannigfaltigkeit der M ist, man bennent das Urbild die Beschränkung (Restriktion) der Form ω und bezeichnet das $\omega | N$.
Die folgende Gleichung gibt eine Beziehung zwieschen dem Urbildoperator und dem Differntial wie (2.5):

$$Df^*_{f(x)} r_{f(x)} \omega = r_x Df^*(\omega).$$

4.4 Symplektische Mannigfaltigkeiten

Die kotangentiale Faserbündel. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Die Menge $T^*(M) = \cup_M T^*_x(M)$ hat ein glatter Atlas. Sei $\pi : T^*(M) \to M$ die Projektion die beliebiges Element $\omega \in T - X^*(M)$ im Punkt x abbildet. Sei $(U, \varphi; x_1, ..., x_m)$ eine Karte auf M. Eine beliebioge Form $\omega \in T^*_x(M)$ ist für jede $x \in U$ so darstellbar $\omega = \sum_1^m \xi_j dx_j$, wo die Koeffizienten $\xi_j = \xi_j(\omega)$, $j = 1, ..., m$ eindeutig determiniert werden (siehe Aussage 4.3.2). Die Abbildung

$$\varphi \circ \pi \times \xi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \quad \xi(\omega) = (\xi_1, ..., \xi_m) \tag{4.1}$$

ist eine Karte auf $T^*(M)$. Für andere Karte (U', φ') auf M gilt die Beziehung $\psi\varphi' = \varphi$, wo ψ ein glattes Verbindungshomeomorphismus ist. Das impliziert die Gleichungen $\omega = \sum \xi_i' dx_i'$, wo

$$\xi_j(\omega) = \sum \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \xi_i'(\omega), \tag{4.2}$$

und $J = \{\partial x_i' / \partial x_j\}$ die Jacobische Matrix der Abbildung ψ ist. Folglich ist die Beziehung zwischen die Koordinaten ξ', ξ lineare und glatte in Bezug auf die Koordinaten auf M. Deswegen sind die Karten (4.1) vereinbar und bilden eine Strukture der glatte Mannigfaltigkeit auf $T^*(M)$. Dabei ist die Projektion $\pi : T^*(M) \to M$ eine glatte Abbildung, wobei jede Faser $\pi^{-1}(x) = T_x^*(M)$ ein Vektorraum ist. Tatsächlich ist $T^*(M)$ eines Faserbünndel.

Die kanonische Formen Die 1-form $\alpha_U = \sum \xi_i dx_i$ ist für jede Karte (4.1) bestimmt. Für andere Karte auf $\pi^{-1}(U')$ stimmen die Formen α_U und $\alpha_{U'}$ im Dirschschnitt $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(U')$ wegen (4.2) überein. Schließlich ist eine 1-Form α wohlbestimmt auf ganze M so, daß $\alpha = \alpha_U$ für jegliche Karte (4.1). Sie heißt die *kanonische* 1-Form auf $T^*(M)$.

Die Form $\sigma = d\alpha$ heißt die *kanonische* 2-Form auf symplektische Mannigfaltigkeit $T^*(M)$. Sie ist abgeschlossen: $d\sigma = 0$. Für jede Karte gilt

$$\sigma = \sum_1^m d\xi_i \wedge dx_i.$$

Definition. Sei M eine Mannigfaltigkeit von Dimension m. Eine Untermannigfaltigkeit $\Lambda \subset T^*(M)$ wird *Lagrangesche* Mannigfaltigkeit bennent falls die Bedingungen

$\dim \Lambda = m$;

$\sigma | N = 0$ erfüllt werden.

Satz 4.4.1 *Sei Λ eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit in $T^*(M)$, wobei ist $\lambda_= \in \Lambda$ kein kritischen Punkt der Projektion $\pi : \Lambda \to M$. Dann existiert eine Umgebung U des Punktes $y = \pi(\lambda)$ und eine glatte Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ so daß die Lösung des Gleichungsystems*

$$\xi_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \; i = 1, ..., m \tag{4.3}$$

ist gleich Λ in eine Umgebung des Punktes λ.

Man bennent F *erzeugende* Funtkion der Mannigfaltigkeit Λ im Punkt λ_0.
Beweis. Sei U eine einfach zusammenhängend Umgebung des Punktes y so, daß die Projektion $\pi : \Lambda(U) \to U$ ist ein Homeomorphismus, wo bezeichnen wir $\Lambda(U) = \Lambda \cap \pi^{-1}(U)$. Für einen beliebigen Punkt $\lambda \in \Lambda(U)$ verbinden wir den Punkt y mit dem Punkt $x = \pi(\lambda) \in U$ mit einem Weg $\gamma \subset U$. Wir heben der Weg auf Λ und bekommen einen Weg $\Gamma \subset \Lambda(U)$, der die Punkten λ_0 und λ verbindet. Das Integral

$$f(\lambda) = \int_\gamma \alpha$$

hängt nicht an der Wahl des Wegs γ, weil die Umgebung U einfach zusammenhängend ist und die Gleichung $d\alpha|\Lambda = \sigma|\Lambda = 0$ gilt. Die Funktion f ist die Stammefunktion (Primitive) der Form α, d.h. $df = \alpha$. Das ist equivalent zu (4.3). $\boxdot$
Definition. Die multiplikative Gruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}^+ = \{t > 0\}$ wird in $T^*(M)$ dargestellt: $t : (x, \xi) \mapsto (x, t\xi)$. Eine Trajektorie der Gruppe $\mathbb{R}^+$ heißt ein Strahl. Ein Teil $K \subset T^+(M)$ heißt *kegelsche* Untermenge, falls K eine Vereinigung der Strahlen ist.
Bemerken, daß eine kegelsche Lagrangesche Mannigfaltigkeit nirgends die Bedingung des Satzes 4.1 erfüllt.

Aussage 4.4.1 *Eine kegelsche Untermannigfaltigkeit $K \in T^*(M)$ ist eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit dann und nur dann, wenn $\alpha|K = 0$.*

Beweis. Der Teil "dann" ist offenbar: $\sigma|K = d\alpha|K = d(\alpha|K) = 0$. Wir prüfen, daß die Gleichung $\sigma|K = 0$ impliziert $\alpha|K = 0$. Bertachten das Feld $e = \sum \xi_i \partial/\partial\xi_i$ (das Eulersches Feld). Das erfüllt die Gleichung $e \vee \sigma = \alpha$ und ist zu jedem Strahl tangential. Das Eulersches Feld ist zu einer beliebigen kegelschen Mannigfaltigkeit tangential. Daher gilt $\alpha(v) = v \vee \alpha = v \vee (e \vee \sigma) = \sigma(e, v) = 0$ für ein beliebiges Feld v, das zu K tangentiale ist. $\boxdot$
Beispiel. Sei P eine Untermannigfaltigkeit von Mannigfaltigkeit M. Die Menge $N_P^*(M) \subset T^*(M)$ der Punkten (x, ξ), $x \in P$, wo die Form $\sum \xi_i dx_i$ ist zu $T_x(P)$ orthogonal ist, heißt die *konormale* zu P Bündel. Das ist offenbar eine kegelsche Lagrangesche Mannigfaltigkeit.
In Ab.4.6 finden wir ein Analogon der erzeugende Funktion für beliebige Langragesche Mannigfaltigkeit.

4.5 Hamilton-Jacobi Theorie

Sei $T^*(M), \sigma$ und $T^*(N), \tau$ kotangentiale Faserbündel mit kanonische 2-Formen. Eine glatte Abbildung $F : T^*(M) \to T^*(N)$ heißt *kanonische* (oder symplektische) Abbildung falls $Df^*(\tau) = \sigma$ (siehe Ab.4.3). Ein tangentiales Feld v auf $T^*(M)$ heißt *symplektisch*, falls der durch v erzeugende FlüßΦ_t ist eine Familie der kanonischen Transformationen, d.h. $\Phi_t^*(\sigma) = \sigma$ für alle t.

Satz 4.5.1 *Eines Feld s auf $T^*(M)$ ist symplektisch dann und nur dann, wenn*

$$d(s \vee \sigma) = 0 \tag{5.1}$$

.

Beweis. Wir haben

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^*(\sigma) = L_s(\Phi_t^*(\sigma))$$

nach Definition der Lie Ableitung. Aus (3.6) folgt die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^*(\sigma) = d(s \vee \Phi_t^*(\sigma)) \tag{5.2}$$

weil $d\Phi_t^*(\sigma) = \Phi_t^*(d\sigma) = 0$ gilt. Sei s ein symplektisches Feld. Dann gilt die Gleichung $\Phi_t^*(\sigma) = \sigma$ und folglich verschwindet die linke Seite von (5.2). Für $t = 0$ impliziert das die Gleichung $d(s \vee \sigma) = 0$.
Umgekehrt, setzen wir voraus, daß $d(s \vee \sigma) = 0$ und beweisen, daß die linke Seite von (5.2) hängt nicht von t ab.

Hilfsatz 2 *Wir haben immer $\Phi_t^*(s) = s$.*

Beweis. Der Flüß Φ_t ist eine lokale Gruppe, d.h. $\Phi_t\Phi_\tau = \Phi_{t+\tau}$ gilt auf beliebigen Kompakt $M' \subset M$ für beliebige kleine Zahlen t, τ. Es folgt daraus, daß

$$\Phi_t^*\Phi_{\triangle t}^*(f) = \Phi_{\triangle t}^*\Phi_t^*(f)$$

für beliebige Funtkion $f \in \mathcal{E}(M)$. Daher bekommen wir

$$\Phi_t^*(\Phi_{\triangle t}^*(f) - f) = \Phi_{\triangle t}^*\Phi_t^*(f) - \Phi_t^*(f)$$

Wir dividieren beide Seiten durch $\triangle t$ und passen zur Grenze, dabei berücksichtigen wir, daß $(\Phi_{\triangle t}^*(f) - f)/\triangle t \to s(f)$:

$$\Phi_t^*(s(f)) = s(\Phi_t^*(f)).$$

Das impliziert die Behauptung des Hilfsatzes.$\boxdot$
Wir bemerken die Gleichung

$$\psi^*(v) \vee \psi^*(\omega)) = \psi^*(v \vee \omega) \tag{5.3}$$

für beliebiges Feld v, beliebige Form ω und beliebige invertierbare Abbildung $\psi : M \to N$. Tatsächlich ist die Abbildung $\varphi\psi$ für eine belienige Karte (U, φ) auf N auch eine Karte auf M, die mit dem Atlas auf M vereinbar. Das inneres Produkt wurde für alle Karten gleichartig definiert. Deswegen ist das Produkt $\psi^{-1*}(\psi^*(v) \vee \psi^*(\omega)$ gleich $v \vee \omega$. Das impliziert (5.3). Wir rechnen auf den Grund des Hilfsatzes (5.3) und (3.10):

$$d(s \vee \Phi_t^*(\sigma)) = d(\Phi_t^*(s) \vee \Phi_t^*(\sigma)) = d(\Phi_t^*(s \vee \sigma)) = \Phi_t^*(d(s \vee \sigma)) = 0$$

$\boxdot$.
Die *symplektische Volumenform* auf $T^*(M)$ ist die Form

$$\omega = \frac{(-1)^\mu}{m!} \overbrace{\sigma \wedge ... \wedge \sigma}^{m}, \quad \mu = \frac{m(m-1)}{2}, \, m = \dim M$$

Man berechnet mit lokale Koordinaten $x_1, ..., x_m$

$$\omega = d\xi_1 \wedge ... \wedge d\xi_m \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_m.$$

Folgerung 4.5.1 *Beliebige kanonische Transformation beibehält die Volumenform.*

Beweis. Sei s das Feld, das die Transformation erzeugt. Dann gilt die Gleichung $L_s\sigma = 0$ und folglich gilt

$$L_s\omega = \frac{(-1)^\mu}{m!} m L_s(\sigma) \wedge \overbrace{\sigma \wedge ... \wedge \sigma}^{m-1} = 0.$$

Hamiltonsches Feld. Sei g eine glatte reelle Funktion auf $T^*(M)$. Das Hamiltonsche Feld H_g ist das Feld auf $T^*(M)$ das die Gleichung

$$H_g \vee \sigma = -dg$$

erfüllt. Das ist eindeutig bestimmt. Die Funktion g heißt das Hamiltonian des Feldes H_g. Mit lokalen Koordinaten schreibt man das Hamiltonsche Feld in der Form

$$\frac{dx}{dt} = g'_\xi(x, \xi), \quad \frac{d\xi}{dt} = -g'_x(x, \xi). \tag{5.4}$$

Ein beliebiges Hamiltonsche Feld ist symplektisch. Tatsächlich, $d(H_g \vee \sigma) = -ddg = 0$ und die Behauptung folgt aus dem Satz 4.5.1.

Folgerung 4.5.2 (Liouville) *Jedes Hamiltonsche Feld beibehält die symplektische Volumenform.*

4.6 Nichtlineare Differentialgleichungen

Betrachten eine Gleichung erster Ordnung

$$a(x, du) = 0 \tag{6.1}$$

wobei das Symbol $a(x, \xi)$ eine glatte reele Funktion auf $T^*(M)$ ist. Wir suchen für Lösungen $u = u(x)$ der Gleichung (6.1). Stattdessen betrachten wir ein weiteres Problem: eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit Λ zu finden so, daß $\Lambda \subset A$, wo

$$A = \{(x, \xi) \in T^*(M),\ a(x, \xi) = 0\}.$$

Wir setzen voraus, daß $da \neq 0$ auf A, folglich ist A eine glatte Hyperfläche in $T^*(M)$ und hat die Hamiltonische Feld H_a kein Fixpunkt auf A.
Definition. Wir betrachten den durch H_a erzeugende Flüß Φ_t. Man bennent eine beliebige Trajektorie $S_y = \{\Phi_t(y), -\varepsilon < t < \varepsilon\}$ des Flüßes *bicharakteristischer Streifen.* Die Projektion eines bicharakteristischen Streifens auf M heißt *bicharakteristische Kurve.* Entlang beliebigen bicharakteristischen Streifen gilt die Gleichung $H_a(a) = da(H_a) = -\sigma(H_a, H_a) = 0$, schließlich bleibt das Symbol a fest. Es folgt, daß der ganz bicharakteristische Streifen S zu A gehört, falls S ein Punkt auf A hat. Dann heißt S die bicharakteristische Nullstreifen.

Folgerung 4.6.1 *Sei $W \subset A$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m-1$, so daß $\sigma|W = 0$ gilt und das Feld H_a zu W nirgends tangential ist. Die Vereinigung der bicharakteristischen Streifen S_w mit Anfangswerten $w \in W$ ist eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit $\Lambda \subset A$.*

Beweis. Für beliebige Punkten $w \neq w'$ auf W entweder sind die Trajektorie S_w, $S_{w'}$ disjunkte oder fallen sie zusammen. Das folgt aus Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Gleichungen. Der Punkt $y(w, t)$ auf eine Trajektorie S_w ist eine glatte Funktion von w, t und $\partial y / \partial(w, t) \neq 0$ infolge die Voraussetzung über das Feld. Schließlich ist Λ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension m. Sie gehört zu A, weil W eine Untermenge von A war.
Jetzt bleibt es zu prüfen, daß die kanonische Form σ auf Λ verschwindet.

Seien w ein beliebiger Punkt auf W und $v_1, v_2 \in T_w(\Lambda)$. Wir schreiben $v_i = w_i + c_i H_a$, $i = 1, 2$, wobei $w_1, w_2 \in T_w(W)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gelten. Daher gilt

$$\sigma(v_1, v_2) = \sigma(w_1, w_2) + c_1\sigma(H_a, w_2) - c_2\sigma(H_a, v_1).$$

Das erste Glied verschwindet wegen der Voraussetzung $\sigma|W = 0$. Das zweite und das dritte Glieden sind Null wegen die Gleichung $\sigma(H_a, v) = -da(v) = 0$ für beliebiges Vektor $v \in T_w(A)$. Nach dem Satz 4.5.1 bleibt die Form σ fest bei dem der Flüß Φ_t. Somit verschwindet die Form auf $T_\lambda(\Lambda)$ für jede Punkt $\lambda \in \Lambda$. $\boxdot$

Sei Λ eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit von A und λ ein beliebiger Punkt auf Λ, der kein kritischer Punkt der Projektion $\pi : \Lambda \to M$ ist. Nach dem Satz 4.4.1 ist Λ gleich dem Graph der Form du einer erzeugende Funktion u in einer Umgebung U des Punktes $\pi(\lambda)$. Folglich ist u eine Lösung (6.1) in U. Dabei findet man die Lösung in folgende Form

$$u(x) = u(x_0) + \int_\gamma \alpha,$$

wobei γ ein Stück einer Trajektorie von dem Punkt $\lambda_0 \in W$, $\pi(\lambda_0) = x_0$ bis den Punkt $\lambda \in \Lambda$, so daß $\pi(\lambda) = x$ bedeutet.

Beispiel. Die Gleichung

$$c(x)|\operatorname{grad}\phi| = 1 \tag{6.2}$$

heißt *Eikonalgleichung* in einem Euklidraum X für die Wellenausbreitung in einem homogenen Meidum mit in einer Geschwindigkeit $c(x) > 0$. Eine Lösung ϕ heißt *Eikonal.* Wir setzen voraus, daß die Funktion c ist glatt in einem Gebiet $G \subset X$. Das Hamiltonsche System für das Hamiltionian $a(x, \xi) = c(x)|\xi| - 1$ sieht so aus:

$$\frac{dx}{dt} = c(x)\frac{\xi}{|\xi|}; \quad \frac{d\xi}{dt} = -\operatorname{grad} c(x)|\xi|. \tag{6.3}$$

und das Vektor $a'_\xi = c(x)\xi/|\xi|$ verschwindet nirgends. Wir wahlen eine beliebige Hyperfläche $V \in X$ für eine Anfangswertproblem. Für jede Punkt $x \in V$ nehmen wir eines Kovektor ξ, so daß $\xi|T(V) = 0$ gilt und die Gleichung (6.2) erfüllt. Dabei setzen wir voraus, daß ξ eine glatte Funtion des Punktes x ist. Die Familie $\{(x, \xi),\ x \in V\}$ ist eine Untermannigfaltigkeit von A, wobei die Form α und auch die Form σ auf W verschwinden. Nach voriger Konstruktion bekommen wir eine Eikonalfunktion ϕ, so daß das Kovektor

$\xi = \operatorname{grad}\phi$ in jedem Punkt $x \in V$ zu V konormal ist. Das bedeutet, daß $\phi = t_0$ auf V mit einer Konstante t_0 gilt. Schlißlich ist V die Position einer Welle für Zeit t_0. Für beliebige t stimmt die Hyperfläche $\phi(x) = t$ mit der Position der Welle für Zeit t überein.

4.7 Erzeugende Funktionen

Sei Λ eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit in $T^*(M)$. Wir bekommen jetzt eine Verallgemeinerung des Satzes 4.4.1 auf den Fall, wo λ ein kritischer Punkt der Projektion $\pi : \Lambda \to M$.

Satz 4.7.1 *Seien λ ein Punkt der Lagrangesche Mannigfaltigkeit Λ und $(U; x_1, ..., x_m)$ eine Karte auf M, so daß $y = \pi(\lambda) \in U$. Setzen wir voraus, daß*

$$\operatorname{rank} D\pi : T_\lambda(\Lambda) \to T_y(M) = k \tag{7.1}$$

gilt und die Forme $\pi^*(dx_1), ..., \pi^*(dx_k)$ im Punkt λ linear unabhängig sind. Dann hat Projektion

$$\rho = (x_1, ..., x_k; \xi_{k+1}, ..., \xi_m) : \Lambda \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{*l}, \; l = n - k \tag{7.2}$$

kein kritischen Punkt λ.

Beweis. Wir nehmen der Gegensatz. Dann es gibt eines Vektor $t \in T_\lambda(\Lambda)$, $t \neq 0$, so daß $d\rho(t) = 0$. Wir schreiben

$$t = \sum_{k+1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{1}^{k} b_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

Die Koeffizienten a_i gleich Null sind. Tatsächlich gilt die Gleichung $\tau \equiv dx_i - \sum_1^k c_j dx_j = 0$ auf $T_\lambda(\Lambda)$ gemäß (7.1). Schließlich gilt $0 = \tau(t) = a_i$. Die Form $t \vee \sigma = \sum b_j dx_j$ ist auf $T_\lambda(\Lambda)$ gleich Null, weil σ auf Λ verschwindet. Das spricht zu Voraussetzung des Satzes wider. $\boxdot$.

Folgerung 4.7.1 *Für beliebige Lagrangesche Mannigfaltigkeit Λ, beliebiger Punkt $\lambda \in \Lambda$ und Koordinatsystem $(x_1, ..., x_m)$ gibt es eine Untermenge $I = (i_1, ..., i_k) \subset [1, ..., m]$, so daß λ kein kritischer Punkt der Abbildung*

$$\rho = (x_{i_1}, ..., x_{i_k}; \xi_{j_1}, ..., \xi_{jl}) : \Lambda \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{*l}. \tag{7.3}$$

ist, wobei $J = (j_1, ..., j_l) = [1, ..., m] \setminus I$ *gilt.*

Definition. Wir heißen beliebige invertierbare Abbildung ρ wie (7.2) oder (7.3) *symplektisches* Koordinatsystem im Punkt λ.

Satz 4.7.2 *Sei* (7.2) *ein symplektisches Koordinatensystem einer Lagrangesche Mannigfaltigkeit im Punkt* λ_0. *Dann gibt es eine glatte reelle Funktion* $f = f(x_1, ..., x_k, \xi_{k+1}, ..., \xi_m)$ *in einer Umgebung des Punktes* $\rho(\lambda_0)$, *so daß die die Menge* Λ *und der Fläche*

$$\xi_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \xi_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}; x_{k+1} = -\frac{\partial f}{\partial \xi_{k+1}}, ..., x_m = -\frac{\partial f}{\partial \xi_m} \qquad (7.4)$$

in einer Umgebung des Punktes λ_0 *übereinstimmen.*

Beweis. Wir haben $\sigma = d\alpha'$, wo $\alpha' = \sum_1^k \xi_i dx_i - \sum_{k+1}^m x_j d\xi_j$ gilt. Wir wahlen eine einfach zusammengehängende Umgebung $W \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, so daß die Projektion $\rho : \rho^{-1}(W) \to W$ einer Homeomorphismus ist. Wir setzen

$$f(\rho(\lambda)) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \alpha',$$

für einen beliebigen Punkt $\lambda \in \rho^{-1}(W)$. Das Integral hängt nicht von der Wahl des Wegs γ auf Λ von λ_0 bis λ, weil die Gleichung $d\alpha'|\Lambda = \sigma|\Lambda = 0$ gilt. $\boxdot$

Definition. Die Funktion f heißt die *erzeugende* Funktion für Λ im Punkt λ_0.

Bemerkung. Die inverse Behauptung ist auch wahr und zwar ist die Fläche (7.4) immer Lagrangesche Mannigfaltigkeit.

Aussage 4.7.1 *Die durch* f *erzeugende Lagrangesche Mannigfaltigkeit ist kegelsche Untermenge, falls* $f = f(x_1, ..., x_k; \xi_{k+1}, ..., \xi_m)$ *eine homogene Funktion des Grades 1 der Veränderlichen* ξ'' *ist. Umgekehrt hat eine beliebioge kegelsche Lagrangesche Mannigfaltigkeit* Λ *im beliebigen Punkt* λ *eine homogene erzeugende Funktion* f.

Beweis. Sei f eine homogene Funktion der Veränderlichen $\xi'' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_m)$. Jede Ableitung $\partial f/\partial x_j$, $\partial f/\partial \xi_i$ ist eine homogene Funktion des Grades 1, entsprechend des Grades 0. Deswegen erfüllt der ganz Strahl $(x, t\xi)$, $t > 0$ das System (7.4) für eine beliebige Lösung (x, ξ).

Jetzt seien Λ eine kegelsche Lagrangesche Mannigfaltigkeit und $\lambda_0 \in \Lambda$. Dann ist das Bild $\rho(\Lambda)$ eine kegelsche Untermenge in $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$. Für einen beliebigen Punkt $\lambda = (x, \xi) \in \Lambda(W)$, $\Lambda(W) := \lambda \cap \rho^{-1}(W)$ wahlen wir ein Weg γ zwieschen $\lambda_0 = (x_0, \xi_0$ und λ so daß $\gamma = \gamma_0 \cup g \cup \gamma_x$, wobei γ_0 ein Stück der Strahl $(x_0, t\xi_0)$, $0 \leq t \leq 1$ ist. Die Strecke $g \subset \Lambda(W)$ ist gleich einen Weg zwischen $(x_0, 0)$ und $(x, 0)$, auf den gilt immer $\xi = 0$. Die letzte Strecke γ_x ist gleich das Interval $(x, t\xi)$, $0 \leq t \leq 1$. Wir wahlen die folgende erzeugende Funktion

$$f(x', \xi'') = \int_\gamma \alpha' - \int_{\gamma_0} \alpha'$$

im Einklang mit dem Satz 4.7.2, wobei das zweiten Glied konstant bleibt und $\alpha' = \xi' dx' - x'' d\xi''$, $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$ gilt. Wir haben offensichtlich $\int_g \alpha' = 0$, daher gilt die folgende Gleichung

$$f(x', \xi'') = \int_{\gamma_x} \alpha' = -\sum_{k+1}^{m} \int_0^1 x_j(x', t\xi'')\xi_j dt = -\sum_{k+1}^{m} x_j(x', \xi'')\xi_j$$

wobei die Gleichungen $x_j = x_j(x', \xi'') = x'_j(x', t\xi'')$, $t > 0$ gelten. auf Λ. Schließlich ist $f(x', \xi'') = -\sum_{k+1}^{m} x_j(x', \xi'')\xi_j$ eine erzeugende Funktion für Λ im Punkt λ_0.$\boxdot$

4.8 Ausbreitung der Welle

Wir beschreiben der singuläre Träger einer Lösung der Wellengleichung in einem Zeit-Raum $\mathbb{R} \times E$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c^2(x) \triangle u + p_1(x, D) u \tag{8.1}$$

Hier bedeutet p_1 ein Differentialoperator in einem Euklidraum E von Ordnung ≤ 1. Sei $x = (x_1, ..., x_n)$ ein Euklidisches Koordinatensystem in X. Wir betrachten das Hauptsymbol $\sigma(x; \tau, \xi) = \tau^2 - c^2(x)|\xi|^2$ des Operators. Wir bezeichnen mit (τ, ξ), $\tau, \xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ die Dualkoordinaten zur Zeitkoordinate t und zu den räumlichen Koordinaten x. Wir zerlegen $\sigma = \sigma_+ \sigma_-$ mit dem Faktoren $\sigma_\pm = \tau \pm c(x)|\xi|$ und betrachten die Faktoren $\sigma_\pm$ als Hamiltonische Funktionen. Wir schreiben das Hamiltonische System für z.B. σ_+:

$$\frac{dt}{dt} = 1,\ \frac{dx}{dt} = c(x)\frac{\xi}{|\xi|}; \quad \frac{d\tau}{dt} = 0,\ \frac{d\xi}{dt} = -\operatorname{grad} c(x). \tag{8.2}$$

Die erste Gleichung impliziert, daß die innere Zeit entlang der Trajektorien stimmt mit der Zeitveränderliche überein. Wir wahlen eine Hyperfläche $V_0 \subset E$ und die folgende Anfangswerte

$$t(0) = 0,\ x(0) \in V_0; \quad , \tau(0) = \tau,\ \xi(0) = \tau c^{-1}(x(0))\nu(x(0)), \tag{8.3}$$

wobei $\nu(y)$ ein stetiges normales Vektorfeld auf V_0 mit $|\nu(y)| = 1$ bezeichnet. Die Gleichungen (8.3) bestimmen eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit W in $T^*(\mathbb{R} \times E)$. Nach (8.2) bleibt $\tau(t)$ fest. Wir haben $\sigma_+(x(0), \xi(0)) = 0$, falls $\tau < 0$ gilt, folglich wird die Gleichung $\sigma_+(x, \xi) = 0$ immer erfüllt und $|\xi| = c^{-1}(x)\tau\nu(x)$. Die Funktion $c^{-1}(x)$ heißt die Langsamkeit oder Refraktionkoeffizient des Mediums. Sei Λ_+ durch den Flüß (8.2) und Anfangsmannigfaltigkeit W erzeugende Untermannigfaltigkeit in $T^*(\mathbb{R} \times E)$. Die Menge Λ_+ ist eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit gemäß dem Satz 4.5.2, weil die Anfangsmannigfaltigkeit $W = \{(t(0), x(0); \tau(0), \eta(0)\}$ die Dimension n hat und die kanonische Form α auf W verschwindet.
Die Menge $\pi(\Lambda_+)$ ist der Träger der Singularität einer Lösung der Wellengleichung (8.1), die im Moment $t = 0$ eine Singulartät auf die Hyperfläche V_0 hat (genauer $WF(u(0, x) \subset N^*(V_0)$, siehe Ab.5.2). Wir wollen die Menge Λ_+ mit Hilfe der erzeugende Funktionen beschreiben. Das ist eine kegelsche Menge, deswegen ist der Satz 4.4.1 zu Λ_+ nicht verwendbar.

Aussage 4.8.1 *Sei*

$$\rho : \Lambda \to E \times \mathbb{R}^*, \quad \rho(\lambda) = (x_1, ..., x_n; \tau)$$

eine Abbildung wie (7.3). *Das ist ein symplektisches Koordinatensystem auf* Λ_+ *in jedem Punkt* $\lambda \in W$. *Die Funktion* $\Phi(x, \tau) = -\tau\phi(x)$ *erzeugt die Mannigfaltigkeit* Λ_+ *im Punkt* λ, *wo ist die Funktion* ϕ *eine Lösung der Eikonalgleichung* (6.2).

Beweis. Für die erste Behauptung benutzen wir Satz 4.7.1, dabei prüfen wir, daß die Formen $dx_1, ..., dx_n$ auf Λ_+ in einem beliebigen Punkt $\lambda \in W$ unabhängig sind. Nach (8.3) läuft der Punkt $x(0)$ frei über die Hyperfläche V_0. Es folgt aus die zweite Gleichung (8.2), daß $dx/dt = c(x)\nu(x)$ für Moment $t = 0$. Das bedeutet das die Hyperfläche V_0 bewegt mit dem Flüß (8.2) in normalen Richtung ν. Deswegen gilt Die Gleichung $r(\lambda) = n$ für Moment $t = 0$. Für die zweite Behauptung vergleicht man (8.2) und (6.3). ⊡
Für die Hamiltonische Funktion σ_- geht die Überlegung ähnlich, und zwar

erzeugt die Funktion $\Phi(x,\tau) = -\tau\phi(x)$ für $\tau > 0$ die entsprechende Lagrangesche Mannigfaltigkeit Λ_-, wobei ϕ dieselbe Eikonalfunktion ist.
Bemerkung. Sei $r(\lambda)$ das Rank des Operators $D\pi : T_\lambda(\Lambda) \to T_{t,x}(\mathbb{R}\times E)$, wo gilt $(t,x) = \pi(\lambda)$. Für einen "typischen" Punkt $\lambda \in \Lambda_\pm$ gilt $r(\lambda) = n$. Die Menge wo gilt $r(\lambda) < n$ ist deine Vereinigung der Untermannigfaltigkeiten $\Lambda^k = \{r(\lambda) = k\}$, $k = n-1, n-2, ...$ Das Bild $\pi(\Lambda')$ im Zeit-Raum $\mathbb{R}\times E$ ist der singuläre Teil der Front. Das Bild des singularen Teils $\pi(\Lambda')$ im Raum E heißt *Kaustik*. Für beliebigen Punkt $\lambda \in \Lambda^k$ findet man eine erzeugende Funktion in der Form $\Phi(x_1,...,x_k;\tau,\xi_{k+1},...,\xi_n)$.

Kapitel 5

Fourier Integrale

24.02.1997

Inhaltsverzeichnis

5.1 Distributionen mit oszillierendem Kern

Wir betrachten eine durch das Integral

$$I(\phi, a)(\psi) = \int_\Theta \int_X \exp(\imath\phi(x,\theta))a(x,\theta)\psi(x)dxd\theta, \quad \psi \in \mathcal{D}(X) \tag{1.1}$$

bestimmte Distribution auf eine offene Menge $X \subset \mathbb{R}^n$. Wie im Kapitel 2 heißt die Funktion ϕ die *Phase* und die Funktion a die *Amplitude* des Integrals. Sie werden auf das Produkt $X \times \Theta$ definiert, wobei ist $\Theta = \mathbb{R}^N$

einen Hilfsraum. Die Phase ist eine reele Funktion und die Ampliture erfüllt die Ungleichung

$$|a(x,\theta)| \leq C(|\theta|+1)^{\mu},$$

Das Integral über Θ ist absolute konvergierbar, falls $\mu + N < 0$ gilt. und es erfüllt

$$|I(\phi,a)(\psi)| \leq C \int |\psi(x)| dx, \tag{1.2}$$

wobei hängt die Konstante C nur von N und μ ab.
Wir benutzen die folgende technische Definition. Wir sagen, daß eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ von Singularordnung $\leq q$ ist, falls die folgende Ungleichung gilt:

$$|u(\psi)| \leq C(u)\|\psi\|^{(q)} \quad \|\psi\|^{(q)} = \sum_{|i|\leq q} \int_X \left|D^i \psi\right| dx$$

Die Ungleichung (1.2) impliziert, daß die Distribution $I(\phi,a)$ von Sungularordnung ≤ 0 ist.
Im allgemeinen kann man einen Sinn für diviergentes Integral (1.1) verleihen durch eine Regularisierungsmethode, falls die Phase eine homogene Funktion von θ des Grades 1 ist und die Amplitude eine besondere Bedingung erfüllt. Dabei sagt man, daß eine Funktion f auf die Vektorbündel $X \times \Theta \to X$ homogene des Grad $\deg f = \gamma \in \mathbb{R}$ ist, falls die Gleichung $f(x,t\theta) = t^{\gamma} f(x,\theta)$ für beliebige $t > 0$ gilt. Eines Differentialoperator A auf $X \times \Theta$ ist homogene des Grads α, falls die Funktion Af homogene des Grades $\gamma + \alpha$ für beliebige homogene Funktion f des Grades γ ist. Insbesondere sind die Felder

$$b(x,\theta)\frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1,...,n,\ \ c(x,\theta)\frac{\partial}{\partial \theta_j},\ j = 1,...,N$$

homogene Operatoren des Grades 0, falls die Funktionen $b(x,\theta)$, $|\theta|^{-1}c(x,\theta)$ homogene des Grades Null sind.
Die Klasse $S^{\mu}_{\rho} = S^{\mu}_{\rho}(X \times \Theta)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < \rho \leq 1$ ist die Menge der Funktionen, auf $X \times \Theta$, die erfüllen die folgende Reihe der Ungleichungen

$$L_k \cdot ... \cdot L_1 a(x,\theta) \leq C(|\theta|+1)^{\mu + k(1-\rho)},\ k = 0,1,... \tag{1.3}$$

erfüllt, wobei sind $L_1,...,L_k$ beliebige Felder des Grades 0 und hängt die Konstante C von x,θ nicht ab.
Beispiel. Eine beliebige glatte homogene Funktion a des Grades μ auf $X \times \Theta$

gehört zur S_1^μ.
Wir bestimmen das diviergente Integral (1.1) folgendeweise:

$$I(\phi, a)(\psi) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_X \int_\Theta \exp(\imath\phi(x,\theta) - \varepsilon|\theta|)a(x,\theta)\psi(x)d\theta dx. \tag{1.4}$$

Der Integrand ist offenbsichtlich summierbar für beliebige $\varepsilon > 0$.

Aussage 5.1.1 *Seien ϕ beliebige glatte homogene reelle Funktion des Grades 1 ohne kritischen Punkten in $X \times (\Theta \backslash 0)$ und $a \in S_\rho^\mu$, $\mu \in \mathbb{R}, 0 < \rho \leq 1$. Dann existiert die Grenze (1.4) für beliebige Grundfunktion ψ. Dabei ist $I(\phi, a)$ eine Distribution in X von Singularordnung $\leq k$, so daß die Ungleichung $\mu + N < k\rho$ gilt.*

Beweis. Wir wählen eine Funktion $\chi = \chi(\theta) \in \mathcal{D}(\Theta)$, so daß $\chi(\theta) = 1$ für $|\theta| \leq 1$. Wir stellen das Integral in(1.3) als die Summe der zwei Integrals mit dem Faktor χ, entsprechend $1 - \chi$ dar. Das erste ist ein eigenes Integral und die Grenze für $\varepsilon \to 0$ ist gleich die Distribution $[I_0 dx](\psi)$, wobei ist

$$I_0(x) = \int_{\operatorname{supp}\chi} \exp(\imath\phi(x,\theta))\chi(\theta)a(x,\theta)d\theta$$

eine gewöhnliche glatte Funktion (und schließlich von Ordnung ≤ 0). Sei L eines Feld des Grades -1, so daß $L\phi = -\imath$ (Hilfsatz 1). Wir schreiben das zweite Integral in der Form

$$\int\int \exp(\imath\phi - \varepsilon|\theta|)(1-\chi)a\psi dx d\theta = \int\int L(\exp(\imath\phi))\exp(-\varepsilon|\theta|)(1-\chi)a\psi dx d\theta.$$

Wir integrieren das teilweise:

$$\int\int L(\exp(\imath\phi))\exp(-\varepsilon|\theta|)(1-\chi)a\psi dx d\theta =$$

$$\int\int \exp(\imath\phi)L^*(\exp(-\varepsilon|\theta|)(1-\chi)a\psi)dx d\theta,$$

wobei ist L^* das konjungierte Differenzialoperator (siehe (1.10)). Das ist eines Operator des Grades -1 und

$$L^*(\exp(-\varepsilon|\theta|)(1-\chi)a\psi) = -L(\exp(-\varepsilon|\theta|))(1-\chi)a\psi - \exp(-\varepsilon|\theta|)[L((1-\chi)) +$$

$$\operatorname{div}(L)(1-\chi)]a\psi - \exp(-\varepsilon|\theta|)(1-\chi)L(a)\psi - \exp(-\varepsilon|\theta|)(1-\chi)aL\psi$$

Schließlich ergeben wir uns

$$\int\int \exp(\imath\phi_\varepsilon)(1-\chi)a\psi dx d\theta = \int\int \exp(\imath\phi_\varepsilon)\left[a_0\psi + \sum_j a_j \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right] dx d\theta, \tag{1.5}$$

wobei setzen wir $\phi_\varepsilon = \phi + \varepsilon|\theta|$ und

$$a_0 = a_0(\varepsilon; x, \theta) = [-\varepsilon \sum \frac{c_i\theta_i}{|\theta|} + L(1-\chi) + \operatorname{div}(L)(1-\chi)]a + L(a), \tag{1.6}$$

$$a_j = ab_j,\ j = 1, ..., n.$$

Die Amplitude $a_j,\ j = 1, ..., n$ gehört offenbar zur Klasse $S_\rho^{\mu-1}$, weil die Funktion b_j glatte und homogene des Grades -1 ist. Jetzt abschätzen wir die Amplitude a_0. Die Summe im ersten Glied (1.6) ist eine homogene Funtion des Grades 0, schließlich ist sie auf Θ beschränkt. Das Produkt $\varepsilon\exp(-\varepsilon|\theta|)$ ist durch $C|\theta|^{-1}$ beschränkt, weil ist die Funktion $\varepsilon|\theta|\exp(-\varepsilon|\theta|)$ gleichmäßig für $\varepsilon > 0, \theta \in \Theta$ beschränkt. Deswegen erfüllt die Amplitude die Abschätzung

$$|a_0|\exp(-\varepsilon|\theta|) \leq C|\theta|^{\mu-\rho}$$

gleichmäßig in Bezug auf $\varepsilon > 0$. Wir können auch die Ableitungen von a_0 gleichweise abschätzen und man bekommen, daß die Funktion a_0 die Ungleichungen (1.3) mit $\mu-\rho$ statt μ gleichmäßig in Bezug auf $\varepsilon > 0$ erfüllt. Dabei gilt $L(a) \in S_\rho^{\mu-\rho}$, ist die Funktion $\operatorname{div}(L)$ homogene des Grades -1 und hat die Funktion $L(1-\chi)$ kompaken Träger. Falls die Ungleichung $\mu + N < \rho$ erfüllt konvergieren die Integralen

$$\int \exp(\imath\phi_\varepsilon)|a_j|d\theta,\ j = 0, 1, ..., n$$

gleichmäßig in Bezug auf ε. Man kann zu Grenze in (1.5) übergehen. Deswegen bekommen wir endlich die Ungleichung

$$|\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\Theta\int_X \exp(\imath\phi_\varepsilon)a(x,\theta)\psi(x)dx d\theta| \leq C\left[\int |\psi|dx + \sum_1^n \int \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right| dx\right].$$

Es folgt daraus, daß $I(\phi, a)$ eine Distribution der Ordnung ≤ 1 ist.
Wir wenden dieselbe Verfahren auf jede Glied (1.5) an und bekommen eine Darstellung

$$I(\phi_\varepsilon, a)(\psi) = \int \exp(\imath\phi)\sum_{ij}\left[a_{00}\psi + \sum a_{0j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + \sum a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}\right] dx d\theta.$$

wobei gehören die Amplituden a_{ij} zu $S_\rho^{\mu-2\rho}$ und erfüllen sie (1.3) gleichmäßig in Bezug auf ε. Wir wiederholen diese Verfahren k mal um die Ungleichung $\mu + N < k\rho$ erreichten.$\boxdot$

Hilfsatz 1 *Es gibt ein glattes Feld L des Grades -1 auf $X \times \Theta$, so daß $L(\phi) = -\imath$ gilt.*

Beweis. Wir setzen

$$L = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum c_i \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \tag{1.7}$$

wobei

$$b_j = -\frac{\imath}{\nu}\frac{\partial \phi}{\partial x_j},\ c_i = -\frac{\imath|\theta|^2}{\nu}\frac{\partial \phi}{\partial \theta_i}, \quad \nu = \sum \left|\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right|^2 + |\theta|^2 \sum \left|\frac{\partial \phi}{\partial \theta_i}\right|^2.$$

gilt und verschwindet der Nenner ν nirgends. $\boxdot$

Hilfsatz 2 *Seien V eine beliebige homogene Feld auf $X \times \Theta$ des Grades -1 und Ω eine beliebige glatte Form des höchsten Grades auf $X \times \Theta$, die verschwindet außer $K \times \Theta$ für eines Kompaktum $K \Subset X$. Dann gilt die Gleichung*

$$\int L_V(\omega) = 0 \tag{1.8}$$

falls Ω und $L_V\Omega$ summierbar sind.

Das Symbol L_V bedeutet die Lie Ableitung des Felds V entlang (siehe Kap.4). *Beweis.* Wir setzen zuerst voraus, daß die Form Ω hat einen kompakten Träger. Dann bestätigen wir die Gleichung

$$\int \Phi_t^*(\omega) = \int \omega \tag{1.9}$$

für kleine t, wobei ist Φ_t der durch das Feld V erzeugender Flüß . Tatsächlich ist das Integral einer Form des höchsten Grades invariant in Bezug auf beliebigen Isomorphismus der Mannigfaltigkeit. Wir differenzieren (1.9) und bekommen (1.8). Für gegebene Form Ω setzen wir $\Omega_k = \chi_k\Omega$, wobei gilt $\chi_k(\theta) = \chi(k^{-1}\theta)$. Offenbar strebt das Integral $\int \Omega_k$ gegen $\int \Omega$. Wir rechnen

$$0 = \int L_V(\Omega_k) = \int V(\chi_k)\Omega + \int \chi_k L_V(\Omega).$$

Dabei gilt $V(\chi_k) = O(k^{-1})$ gleichmäßig auf $X \times \Theta$, weil die Funktionen $V(\theta_i)$, $i = 1, ..., N$ homogene des Grades -1 sind. Deswegen strebt das Integral $\int V(\chi_k)\Omega$ gegen Null. Wir schließen daß auch $\int \chi_k L_V(\Omega) \to 0$. $\boxdot$
Wir substituiren $\Omega = fgdx \wedge d\theta$ in (1.8) und bekommen

$$\int V(f)gdxd\theta = \int fV^*(g)dxd\theta \tag{1.10}$$

wobei gilt

$$V^* = -V - \operatorname{div} V,\ \operatorname{div} V \equiv \frac{L_V(dx \wedge d\theta)}{dx \wedge d\theta} = \sum \frac{\partial b_j}{\partial x_j} + \sum \frac{\partial c_i}{\partial \theta_i}$$

Dabei prüfen wir die letzte Gleichung mit Hilfe der Leibnitzsche Formel und des Satzes 4.3.1:

$$L_V(fgdx \wedge d\theta) = V(f)gdx \wedge d\theta + fV(g)dx \wedge d\theta + fgL_V(dx \wedge d\theta)$$

$$L_V(dx \wedge d\theta) = d(V \vee (dx \wedge d\theta)) = \sum_j (-1)^{j-1} d(b_j dx_1 \wedge ...\hat{j}... \wedge dx_n \wedge d\theta) +$$

$$\sum_i (-1)^{n+i-1} d(c_i dx \wedge d\theta_1 \wedge ...\hat{i}... \wedge d\theta_N) = \operatorname{div} V dx \wedge d\theta.$$

$\boxdot$

Bemerkung. Man kann statt die Folge $E_\varepsilon = \exp(-\varepsilon|\theta|)$ andere ähnliche folge der Funktionen für Regularisierung des Integrals (1.1) benutzen. Z.B. taugt die Folge $E_\varepsilon = \exp(-\varepsilon|\theta|^2)$ auch. Dabei bleibt der Limes (1.4) fest.

Nichtentartete Phase Sei ϕ eine Phase in $X \times \Theta$. Wir betrachten die Menge

$$C(\phi) = \{(x, \theta) : d_\theta \phi = 0, \iff \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} = ... \frac{\partial \phi}{\partial \theta_N} = 0\}.$$

Das ist die kritische Menge der Phase auf jeder Faser $p^{-1}(x)$ des Bündels $p : X \times \Theta \to X$.

Definition. Die Phase ϕ heißt nichtentartete, falls sie eine glatte homogene Funktion des Grades 1 ohne kritischen Punkten ist und die Formen

$$d\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta_1}\right), ..., d\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta_N}\right)$$

linear unabhängig in jedem Punkt der Menge $C(\phi)$ sind. Sei ϕ nichtentartete Phase. Die kritische Menge $C(\phi)$ ist eine kegelsche Untermannigfaltigkeit in

$X \times \Theta$ von Dimension $n+N-N=n$. Das foglt aus dem Implizitfunktionssatz. Wir betrachten die Abbildung der Vektorbündel

$$\phi_* : C(\phi) \to T^*(X), \quad (x,\theta) \mapsto (x, d_x\phi(x,\theta)).$$

und die Abbildung $X \to T^*(X)$, $x \mapsto (x,0)$.

Aussage 5.1.2 *Für beliebige nichtentartete Phase ϕ ist die Abbildung*

$$\phi_* : C(\phi) \to T^*(X) \setminus X$$

gut bestimmt und homogene des Grades 1. Dabei ist das Differenzial $D\phi_*$ einer Isomorphismus in jedem Punkt.

Beweis. Die Phase hat kein kritischen Punkt, deswegen verschwindet die Form $d_x\phi$ nirgends auf $C(\phi)$. Die zweite Behauptung bedeutet die Gleichung $d_x\phi(x,t\theta) = td_x\phi(x,\theta)$, $t>0$. Sie gilt, weil ϕ und schließlich die Form $d_x\phi$ homogene des Grades 1 ist. Die letzte Behauptung ist equivalent zur folgende Implikation:

$$v \in T_{(x,\theta)}(C(\phi)),\ D\phi_*(v) = 0 \implies v = 0.$$

Wir schreiben $v = t+\tau$, $t \in T_x(X)$, $\tau \in T_\theta(\Theta)$ und rechnen

$$0 = D\phi_*(v) = \left(t; v\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right), ..., v\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)\right) \in T_\omega(T^*(X)) \tag{1.11}$$

wobei benennen wir $\omega = (x, d_x\phi(x,\theta))$ und benutzen ein natürliches Isomorphismus $T_\omega(T^*(X)) \cong T_x(X) \oplus T_x^*(X) \cong T_x(X) \oplus \mathbb{R}^n$. Wir schließen aus (1.11), daß $t=0$ und

$$\tau\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right) = 0,\ j = 1, ..., n \tag{1.12}$$

gelten. Jetzt bedeutet die Inklusion $\tau \in T(C(\phi))$ die folgende System

$$\tau\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta_i}\right) = 0,\ i = 1, ..., N.$$

Diese Gleichungen zusammen mit (1.12) impliziert, daß $\sum \tau_i d(\partial\phi/\partial\theta_i) = 0$, wobei gilt $\tau = \sum \tau_i \partial/\partial\theta_i$. Darum gilt $\tau = 0$, weil die Phase nichtentartete ist. $\boxdot$

Aussage 5.1.3 *Die Menge $\Lambda(\phi) = \phi_*(C(\phi))$ ist eine kegelsche Lagrangesche Mannigfaltigkeit, falls die Bedingung $\phi_*(p) \neq \phi(p')$ für beliebige $p \neq p'$ erfüllt.*

Beweis. Das Bild des jeden kleinen Stück $C' \subset C(\phi)$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit $\Lambda' = \phi_*(C')$ der Dimension n. Das folgt aus Aussage 5.1.2 dank dem Implizitfunktionssatz. Nach der obigen Voraussetzung ist die Vereinigung $\Lambda(\phi)$ der Stücke Λ' auch eine Mannigfaltigkeit. Jetzt prüfen wir, daß $\alpha|\Lambda(\phi) = 0$ gilt. Sei w ein tangentiales Vektor auf $\Lambda(\phi)$ in einem Punkt (x, ξ). Dabei haben wir $\xi = d_x\phi(x, \theta)$ für einen Punkt $(x, \theta) \in C(\phi)$ und gilt $w = D\phi_*(v)$ für eines Vektor $v \in T_{(x,\theta)}(C(\phi))$. Die letzte Inklusion bedeutet, daß $v(f) = 0$ für beliebige Funktion f die verschwindet auf $C(\phi)$ gilt. Wir rechnen

$$\alpha(w) = \xi dx(t) = d_x\phi(t) = t(\phi) = v(\phi)$$

wobei ist t die Projektion des Vektors w auf X. Es folgt aus die Beziehung $\pi\phi_* = p$, daß t gleich die Projektion des Vektors v ist. Die Gleichung $t(\phi) = v(\phi)$ erfüllt wegen die Gleichung $(v - t)\phi = \sum c_i \partial\phi/\partial\theta_i = 0$. Endlich bemerken wir die Eulersche Indentität $\phi = \sum \theta_i \partial\phi/\partial\theta_i$, die impliziert daß ϕ verschwindet auf $C(\phi)$ auch. Deswegen gilt die Gleichung $v(\phi) = 0$. $\boxdot$

5.2 Wellenfront der Distribution

Definition 1. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ heißt *glatte* in einem Punkt $x \in X$, falls u mit einer beliebig oft differenziebare Funktion f in einer Umgebung von x zusammenfällt. Die Menge der Punkten x, so daß u nicht glatte ist, heißt der Singularträger der Distribution u. Man bennent der Singularträger durch $\operatorname{ssupp} u$. Das ist eine abgeschloßene Menge. Insbesondere ist der Singularträger leer dann und nur dann, wenn u eine glatte Dichte ist. Mit Hilfe des Begriffs der Wellenfront kann man ein "Mikroanalisys" der Singularität einer Distribution durchführen.
Definition 2. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $u \in \mathcal{D}'(X)$ und $\omega = (x_\bullet, \xi_\bullet)$ ein Punkt in $T^*(X) \setminus X$. Wir sagen, daß die Distribution u im Punkt ω *mikroglatte* ist, falls für eine Umgebung X' des Punktes $x_\bullet$ eine kegelsche Umgebung U des Punktes $\xi_\bullet$ und beliebige Funktion $h \in \mathcal{D}(X')$ die Fouriertransformation

$$F(hu)(\xi) = u(h(x)\exp(-2\pi\imath\xi x))$$

schnell auf Unendlichkeit verschwindet. Das bedeutet, daß die Abschätzung

$$F(hu) = O(|\xi|^{-q}),\ |\xi| \to \infty,\ \xi \in U \tag{2.1}$$

für jede q gilt. Die Distribution u ist auch in jedem Punkt $\omega' \in X' \times U$ mikroglatte. Daher ist die Menge G der Punkten, wo u mikroglatte ist, eine offene Untermenge von $T^*(X)$. Die Ergänzung

$$WF(u) = T^*(X) \setminus (G \cup X)$$

heißt *Wellenfront* der Distribution u. Das ist eine abgeschloßene kegelsche Menge.

Aussage 5.2.1 *Das Bild der Projektion* $\pi : WF(u) \to X$ *fällt mit* ssupp u *zusammen.*

Beweis. Für eine beliebigen Funktion $h \in \mathcal{D}(X \setminus \operatorname{ssupp} u)$ ist das Produkt hu eine beliebig oft differenzierbare Dichte. Deswegen erfüllt (2.1) für ganze $U = \mathbb{R}^{n*}$. Schließlich ist u mikroglatte in jedem Punkt (x, ξ), $x \in X \setminus \operatorname{ssupp} u$. Umgekehrt, sei $x_\bullet \in X \setminus \pi(WF(u))$, d.h. u ist in jedem Punkt $(x_\bullet, \xi)$ mikroglatte. Wir prüfen, daß u in $x_\bullet$ glatt ist. Es gibt für jede ξ eine kegelsche Umgebung $U(\xi)$, wo (2.1) gilt. Die Menge $\{U(\xi)\}$ ist eine kegelsche Überdeckung von $\mathbb{R}^{n*} \setminus 0$. Man kann eine endliche Überdeckung $\{U(\xi_j),\ j = 1, ..., J\}$ wählen. Seien X_j, $j = 1, ..., J$ die entsprechende Umgebungen des Punktes $x_\bullet$. Der Durchschnitt $X' = \cap X_j$ ist auch eine Umgebung. Schließlich gilt (2.1) für jede $h \in \mathcal{D}'(x')$ in ganze Raum $\mathbb{R}^{n*}$.⊡

Beispiel 1. Für beliebige Mannigfaltigkeit X und $y \in X$ gilt $WF(\delta_y) = T_y^*(X)$.

Beispiel 2. Sei f eine holomorphe Funktion in einem Streifen $0 < y < y_o$ in komplexe Ebene und $[f(x + 0\imath)dx] \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ihr Grenzwert auf reelle Achse (siehe Abt.3.3). Die Inklusion

$$WF([f(x + 0\imath)dx]) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

gilt. Ähnlich gilt $WF([g(x - 0\imath)dx] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$ für beliebige holomorphe Funktion g in einem Streifen $y_o < y < 0$, die der Grenzwert auf reelle Achse hat. Dabei ist der Grenzwert glatt in einem offenen Interval $I \subset \mathbb{R}$, falls die Funktion f, entsprechend g eine analytische Fortsetzung durch I hat. Insbesondere gilt

$$WF((x \pm 0\imath)^\lambda = \{0\} \times \mathbb{R}_\pm^*,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0, 1, 2, ...$$

Beispiel 3. Für die Ebenewelle $(\omega x + 0\imath)^\lambda$, $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ in $X = \mathbb{R}^n$ (siehe Abt.3.8) ist die Wellenfront gleich $\{0\} \times \omega \cdot \mathbb{R}_+$.
Beispiel 4. Für beliebige n gilt

$$WF(|x|^\lambda) = T_0^*(\mathbb{R}^n),\ \lambda \neq 0, 2, 4, ...$$

Der Satz 3.8.1 entspricht der Zerlegung der Faser $T_0^*(\mathbb{R}^n)$ in Strahlen $\omega \cdot \mathbb{R}_+^*$, wobei lauft ω über die Einheitskugel.

Satz 5.2.1 *Seien ϕ eine nichtentartete Phase und $a \in S_\rho^\mu$. Wir haben $WF(I(\phi, a)) \subset \Lambda(\phi)$.*

Beweis. Sei $\omega = (x_\bullet, \xi_\bullet)$ einer Punkt außerhalb $\Lambda(\phi)$. Wir beweisen, daß die Funktion (ϕ, a) mikroglatte in ω ist. Es gibt eine Umgebung X' des Punktes $x_\bullet$ und eine kegelsche Umgebung U des Punktes $\xi_\bullet$, so daß der Schluß der Menge $X' \times U$ leer Durchschnitt mit $\Lambda(\phi)$ hat. Wir beweisen (2.1) für beliebige q und $h \in \mathcal{D}(X')$. Dafür benutzen wir eine vollständige Induktion in Bezug auf reelle μ und natürliche q.
Wir prüfen zuerst, daß (2.1) für $\mu + N + q < 0$ gilt. Tatsächlich gilt die Gleichung $v(I(\phi, a)) = I(\phi, b)$ für beliebige glatte Feld v auf $\mathbb{R}^n$, wobei $b = \imath v(\phi)a + v(a)$ gilt. Das Produkt $v(\phi)a$ gehört zur $S_\rho^{\mu+1}$ und die Amplitude $v(a)$ zur engeren Klasse $S_\rho^{\mu+1-\rho}$. Folglich gilt $b \in S_\rho^{\mu+1}$ und auch

$$D^i I = I(\phi, a_i),\ a_i \in S_\rho^{\mu+q},\ I = I(\phi, a)$$

für beliebige $i = (i_1, ..., i_n)$, $|i| = i_1 + ... + i_n = q$. Die rechte Seite ist eine Distribution ist von Ordnung ≤ 0 (siehe den Anfang der Abt.5.1). Das gilt auch für die Distribution $D^i(hI)$ für beliebige $h \in \mathcal{D}(X')$. Wir betrachten die folgende Gleichung

$$D^i(hI)(\exp(-2\pi\imath\xi x)) = (-1)^{|i|} I(hD^i(\exp(-2\pi\imath\xi x)) =$$

$$(2\pi\imath)^{|i|}\xi^i hI(\exp(-2\pi\imath\xi x)) = (2\pi\imath)^{|i|}\xi^i F(hI)(\xi).$$

Die linke Seite ist beschränkt für $|i| = q$ gemäß (1.2). Das impliziert die Abschätzung (2.1) für $F(hI)$.
Jetzt setzen wir voraus, daß (2.1) für $\mu, q-1$ und $\mu - \rho, q$ gilt und beweisen (2.1) für μ, q. Wir schreiben

$$F(hI) = \int_{X'} \int_\Theta \exp(\imath\Phi(x, \theta, \xi)) a(x, \theta)(1 - \chi(\theta))h(x) d\theta dx, \tag{2.2}$$

wobei $\Phi(x,\theta,\xi)=\phi(x,\theta)-2\pi\xi x$ gilt und das Faktor $\exp(-\varepsilon|\theta|)$ für Knappheit weglasst wird. Die Phase Φ ist homogene des Grades 1 in Bezug auf Veränderlichen (θ,ξ). Wir erbauen eines Feld V in $X'\times\Theta\times\mathbb{R}^{n*}$ des Grades -1, so daß $V(\Phi)=-\imath$. Wir suchen V in der Form (1.7), wobei gilt

$$b_j=-\frac{\imath}{\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j},\ c_i=-\frac{\imath|\theta|^2}{\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_i},\quad \nu=\sum\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right|^2+|\theta|^2\sum\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_i}\right|^2.$$

Die Funktion $\nu=\nu(x,\theta,\xi)$ verschwindet in dem Schlüß der Menge $X'\times\Theta\times U$ nicht. In der Tat impliziert die Gleichung $\partial\Phi/\partial\theta=0$, daß (x,θ) zur Menge $C(\phi)$ gehört. Im vorliegenden Fall verschwindet die Form $d_x\Phi(x,\theta,\xi)=d_x\phi(x,\theta)-2\pi\xi$ nicht. Das folgt aus der Wahl von Umgebungen X',U. Schließlich sind die Koeffizienten b_j, c_i glatte und homogene im Gebiet $|\theta|+|\xi|>0$, wobei gilt $\deg b_j=-1$, $\deg c_i=0$, $\deg\operatorname{div}(V)=-1$. Wir stellen $\exp(\imath\Phi)=V(\exp(\imath\Phi))$ in (2.2) unter und integrieren teiweise (siehe (1.10)):

$$F(hI)=\int\int\exp(\imath\Phi)\left[-V(ha)(1-\chi)+ah(V(\chi)-\operatorname{div}(V))\right]d\theta dx. \quad (2.3)$$

Hier haben wir $ha\in S^{\mu}_{\rho}$ und $V(a)\in S^{\mu-\rho}_{\rho}$, weil V eines Feld des Grades -1 ist. Auch gilt $\operatorname{div}(V)a\in S^{\mu-1}_{\rho}$. Schließlich lässt die linke Seite die Abschätzung (2.1) nach der Induktionsvoraussetzung. $\boxdot$

5.3 Lagrangesche Distributionen

Definition. Seien X eine Mannigfaltigkeit und Λ eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit in $T^*(X)$. Eines Element $u\in\mathcal{D}'(X)$ heißt *Lagrangesche* Λ-Distribution (oder Λ-Distribution), falls das eine Darstellung

$$u=\sum I(\phi_j,a_j)+w \quad (3.1)$$

zulässt, wobei

I ist ϕ_j für jede j eine nichtentartete Phase,

II gilt $\Lambda(\phi_j)\subset\Lambda$ für jede j,

III gehört jede Amplitude a_j zur Klasse $S^{\mu_j}_1(X\times\mathbb{R}^{N_j})$, IV ist die Summe (3.1) lokal endlich auf X;

V ist w eine glatte Dichte auf X.

Für einen Punkt $x \in X$ heißt die Zahl

$$\nu = \max\{\mu_j + \frac{N_j}{2},\ x \in \operatorname{supp} I(\phi_j, a_j)\}$$

die Ordnung der Lagrangesche Distribution (3.1) in x. Wir erklären in Abt.5.4, warum benutzt man die Summe $\mu_j + N_j/2$ um die Ordnung der Fourier Integral zu rechnen.

Beispiel 1. Sei δ_Y die Delta-Distribution auf einer abgeschloßenen Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$. Sie ist eine Λ-Distribution für $\Lambda = N_Y^*$. Mit Hilfe einer glatten Zerlegung der Einheit kann man diese Behauptung zur Mannigfaltigkeit X' reduzieren, wobei ist X' eine kleine Karte in Umgebung eines Punkts $x_\bullet \in Y$. Mit Hilfe einer Variablensubstitution führt mann die Behauptung zum Fall $Y = \{x_1 = ... = x_k = 0\}$, $1 \leq k \leq n$ zurück. Jetzt schreiben wir

$$\delta_Y = \int \exp(2\pi\imath\theta x')d\theta = I(\phi, 1),\ \phi(x,\theta) = \theta x' = \sum_1^k \theta_j x_j$$

Beispiel 2. Wir setzen $X = \mathbb{R}^n$ und $u = I(\phi, a)$,

$$\phi(x; \theta_1, \theta_2) = p(\eta, x)\theta_2,\ \eta = \frac{\theta_1}{\theta_2},$$

wobei ist

$$p(\eta, x) = \eta^{n+1} + x_1\eta^{n-1} + ... + x_{n-1}\eta + x_n$$

eines Polynom von η. Im kegelschen Gebiet $\Theta = \{\theta_2 \neq 0\}$ ist das System $\partial\phi/\partial\theta_1 = \partial\phi/\partial\theta_2 = 0$ zum System $p = \partial p/\partial\eta = 0$ equivalent. Deswegen gilt

$$C(\phi) = \{p = \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0,\ \theta \in \Theta\}. \tag{3.2}$$

und $d_x\phi(x,\theta) = \theta_2 d_x p(x,\theta) = \theta_2(\eta^{n-1}, ..., \eta, 1)$ Daher gilt die Gleichung $\Lambda(\phi) = p_*(C(\phi))$ und schlißlich auch $\pi(\Lambda(\phi)) \subset \operatorname{Diskr} p$, wobei bedeutet $\operatorname{Diskr} p$ die reelle diskriminante Menge des Polynoms p, d.h. die Menge der Punkten x so, daß das Polynom $p = p(\eta, x)$ zumindest eine reelle mehrfache

Nullstelle η hat. Phase ist in $X \times \Theta$ nichtentartete. Schließlich gilt die Inklusion

$$\operatorname{ssupp} u \subset \operatorname{Diskr} p.$$

für beliebige Λ-Distribution u.
Sei $n = 1$. Wir haben $\operatorname{Diskr} p = \{x_1 = 0\}$ und annehmen, daß die Apmlitude homogene Funktion des Grades μ ist. Wir wenden der Satz 2.5.1 für das Fourier Integral u an und bekommen für beliebige $k = 0, 1, ...$

$$u = u_{-\mu-1/2} + u_{\mu+1/2} + ... + u_{-\mu-1/2+k} + r_k,$$

wobei ist u_λ für jede λ eine homogene Distribution des Grades λ und hat das Restglied r_k stetige Ableitungen bis zur Ordnung $k - [\mu]$. Das egibt sich aus der Folgerung 5.4.3.
Insbesondere gilt $u = (c_+ x_+^{-3/2} + c_- x_-^{-3/2} + r_k)dx$ für $a = 1$ mit einigen Konstanten $c_\pm$. Sei $n = 2$. Dann ist die Menge $\operatorname{Diskr} p$ gleich die Kurve

$$d(x) \equiv 4x_1^3 + 27x_2^2 = 0.$$

Die heißt "Schnabel" (cusp) Kurve. Die Distribution u hat die fogende Entwicklung in der Nähe der Kurve:

$$u = u_{-\mu-3/2}(d)\omega_0 + u_{\mu-1/2}(d)\omega_1 + ... + r_k$$

wobei sind $\omega_0, \omega_1, ...$ glatte Dichten und ist u_k für beliebige k eine homogene verallgemeinerte Funktionen auf $\mathbb{R}$ des Grades k. Das Restglied ist glatt wie nach oben. Das gilt außerhalb der Spitze $(0, 0)$ der Schnabel (siehe Folgerung 5.4.3). Die Singularität in der Spitze ist mehr kompliziert.
Sei $n = 3$. Dann heißt der Menge $\operatorname{Diskr} p$ der "Schwalbeschwanz".
Wir bennenen durch $\mathcal{D}'_\Lambda$ die Menge der Lagrangesche Λ-Distributionen für eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit Λ. Das ist eines Vektorraum. Für beliebige $u \in \mathcal{D}'_\Lambda$ sind die beliebige Ableitung $D^i u$ und das Produkt hu, $h \in \mathcal{E}(X)$ auch Λ-Distributionen. Die Inklusion $WF(u) \subset \Lambda$ folgt aus dem Satz 5.2.1. Die Vereinugung der Mengen $WF(u)$ ist inder Tat gleich Λ.

Aussage 5.3.1 *Sei Λ eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit und $\lambda \in \Lambda$. Es gibt eine nichtentartete Phase ϕ so, daß $\lambda \in \Lambda(\phi) \subset \Lambda$ gilt.*

Beweis. Nach dem Satz 4.6.2 es gibt eine erzeugende Funktion für Λ im Punkt λ. Sie hat die folgende Form $f(x', \xi'') = -\sum_{r+1}^n \xi_j x_j(x', \xi'')$, wobei bezeichnen wir $x' = (x_1, ..., x_r)$, $\xi'' = (\xi_{r+1}, ..., \xi_n)$ und $r = r(\lambda)$ (siehe (3.4)). Wir setzen

$$\phi(x, \theta) = \theta x'' + f(x', \theta) = \sum_{r+1}^{n} \theta_j (x_j - x_j(x', \theta)),\ \theta = (\theta_{r+1}, ..., \theta_n)$$

Das ist eine homogene Funktion des Grades 1 in Bezug auf Veränderlichen θ, wobei gilt

$$C(\phi) = \{x'' = -\frac{\partial f}{\partial \theta}\}.$$

und

$$d_x \phi = (d_{x'} f, d_{x''} f) = \left(\frac{\partial f(x', \theta)}{\partial x'}, \theta \right).$$

Es folgt daraus, daß durch f erzeugende Mannigfaltigkeit ist gleich Λ in einer Umgebung von λ. .⊡

Satz 5.3.1 *Für beliebige Lagrangesche Mannigfaltigkeit Λ und beliebige Punkt $\lambda \in \Lambda$ gibt es eine Distribution $u \in \mathcal{D}'_\Lambda$ so, daß*

$$\lambda \in WF(u). \tag{3.3}$$

Entwurf des Beweis. Wir wählen eine Phase wie in nexter Aussage. Sei $(x_\bullet, \theta_\bullet)$ der Punkt, der im λ umwandelt. Für beliebige glatte homogene Amplitude $a = a(x, \theta)$ die im Punkt $(x_\bullet, \theta_\bullet)$ verschwindet nicht, gilt (3.3) für $u = I(\phi, a)$. Wir bezeichnen

$$r(\lambda) = \operatorname{rank} d\pi : T_\lambda(\Lambda) \to T_x(X),\ x = \pi(\lambda). \tag{3.4}$$

Im Fall $r(\lambda) = \dim X - 1$ benutzen wir den Beispiel 1 und setzen $u = h\delta_Y$, wobei gilt $Y = \pi(\Lambda')$ für einer Umgebung Λ' des Punktes λ in Λ. Dabei ist Y eine abgeschloßene Hyperfläche in einer Umgebung X' des Punktes x und $h \in \mathcal{D}(X')$. Das ist einfach zu prüfen, daß $\lambda \in WF(u)$, falls $h(x) \neq 0$ gilt. Im allgemeinen Fall wählen wir eine Phase ϕ wie in die vorigen Aussage und eine glatte homogene Amplitude a so, daß $a \neq 0$ im Punkt $(x, \theta) = \phi_*^{-1}(\lambda)$. Die Inklusion (3.3) gilt für $u = I(\phi, a)$. Wir verfügen über hinreichende Technik nicht um diese Behauptung im allgemeinen Fall zu prüfen. ⊡

5.4 Berechnung der Fourier Integrale

Integrierung durch die Strahlen. Man kann ein beliebiges Fourier Integral durch die Integration über die Strahlen im Hilfsraum Θ faktorisieren. Diese Integration ist in der Tat eine Fouriertransformation. Darum kann man das Fourier Integral umwandeln.

Aussage 5.4.1 *Seien ϕ eine beliebige nichtentartete Phase und a eine beliebige glatte homogene Amplitude des Grades $\mu - N$ auf $\Theta = \mathbb{R}^N$. Dann gilt die Gleichung*

$$I(\phi, a) = \imath^{-\mu}\Gamma(\mu)\int_S (\phi(x,\omega) + 0\imath)^{-\mu} a(x,\omega)d\omega, \tag{4.1}$$

wobei ist S die Einheitsphäre in Θ und ist $(\phi + 0\imath)^{-\mu}$ das Urbild der Funktion $(t + 0\imath)^{-\mu}$ bei der Abbildung $t = \phi$.

Beweis. Wir rechnen das innere Integral in (1.4) mit Hilfe der Sphärische Koordinaten $\rho = |\theta|, \omega = |\theta|^{-1}\theta$. Wir haben $d\theta = \rho^{N-1}d\rho d\omega$ für die Volumenform $d\theta$, $d\omega$ auf Θ und S. Folglich gilt die Gleichung

$$I(\phi_\varepsilon, a) = \int_S a(x,\omega)\left(\int_0^\infty \exp(\imath\rho(\phi_\varepsilon(x,\omega))\rho^{\mu-1}d\rho\right)d\omega.$$

wobei bennenen wir $\phi_\varepsilon = \phi + \varepsilon\imath$. Das inneres Integral is gleich $\Gamma(\mu)(\imath\phi_\varepsilon)^{-\mu}$ nach Kapitel 3,(5.4). Für $\varepsilon \to 0$ bekommen wir (4.1). $\boxdot$

Folgerung 5.4.1 *Für beliebige ganze Zahl $\mu > 0$ gilt*

$$I(\phi, a) + I(-\phi, (-1)^\mu a) = 2\imath^{-\mu}\Gamma(\mu)\int_S \phi(x,\omega)^{-\mu}a(x,\omega)d\omega \tag{4.2}$$

$$I(\phi, a) - I(-\phi, (-1)^\mu a) = -2\pi\imath^{-\mu+1}\Gamma(\mu)\int_S \delta^{(\mu-1)}(\phi(x,\omega))a(x,\omega)d\omega. \tag{4.3}$$

Für beliebige halbganze Zahl μ gilt

$$I(\phi, a) + I(-\phi, (-1)^\mu a) = 2\imath^{-\mu}\Gamma(\mu)\int_S \phi(x,\omega)_+^{-\mu}a(x,\omega)d\omega \tag{4.4}$$

Beweis. Für halbganze Zahl μ benutzen wir die Formel

$$(t+0\imath)^{-\mu}+(-1)^{-\mu}(-t+0\imath)^{-\mu}=2t_+^{-\mu}.$$

Dann verwenden wir das Urbildoperation bei der Abbildung $t=\phi$ und integrieren gegen die Dichte $ad\theta$. Das gibt (4.3). Für ganze Zahl $\mu>0$ wenden wir die Formel (3.4) von Kapitel 3 und die Ableitungen dieser Formel. ⊡
Die Lagrangesche Distributionen (4.2)-(4.4) heißen die *paarige* Fourier Integralen.
Verminderung des Hilfsraums. Man kann beliebiges Fourier Integral zum einem Integral $I(\phi,a)$ zurückführen so, daß Differenzial $d_\theta^2\phi$ in einen gegebenen Punkt veschwindet. Sei u und v einige Distributionen. Wir werden $u=v \pmod{\mathcal{E}}$ schreiben, falls die Differenz $u-v$ eine glatte Dichte ist.

Satz 5.4.1 *Seien ϕ eine nichtentartete Phase, $\lambda\in\Lambda(\phi)$ und $r=r(\lambda)=$* $\operatorname{rank} D\pi : T_\lambda(\Lambda(\phi))\to T^*_{x_\bullet}(X)$, $x_\bullet=\pi(\lambda)$. *Die Ungleichung $N\geq n-r$ gilt und es gibt eine nichtentartete Phase ψ auf $X'\times Z$, $\dim Z=n-r$, die besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(i) X' ist eine Umgebung des Punktes $x_\bullet$;

(ii) $\Lambda(\psi)=\Lambda(\phi)$ gilt in einer Umgebung von λ;

(iii) es gibt eine kegelsche Umgebung $X'\times\Theta'$ des Punktes $(x_\bullet,\theta_\bullet)=\phi_*^{-1}(\lambda)$ so, daß für beliebige Amplitude $a\in S^\mu(X'\times\Theta)$, $\operatorname{supp} a\subset X'\times\Theta'$ gibt es eine Amplitude $b\in S^\nu(X'\times Z)$ so, daß

$$I(\phi,a)=I(\psi,b)\pmod{\mathcal{E}}\quad \nu+\frac{n-r}{2}=\mu+\frac{N}{2}. \tag{4.5}$$

gilt.

Beweis. Sei s der Rang der quadratische Form $H=\operatorname{Hess}_\theta\phi(x_\bullet,\theta_\bullet)$. Wir finden lineare Koordinaten $\theta=(\theta_1,...,\theta_N)$ in Θ so, daß die Form H diagonal werdet, wobei nur die Elementen nicht und die Gleichungen.

$$\frac{\partial^2\phi(x_\bullet,\theta_\bullet)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\neq 0,\quad \text{nur für}\quad i=j=1,...,s \tag{4.6}$$

Wegen (4.6) kann man mit Hilfe des Implizitfunktionsatzes die Lösungen $\theta_1 = \eta_1(x, \zeta), ..., \theta_s = \eta_s(x, \zeta)$ des Systems

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} = ... = \frac{\partial \phi}{\partial \theta_N} = 0 \tag{4.7}$$

finden. Wir bennenen $\eta = (\theta_1, ..., \theta_s)$; $\zeta = (\theta_{s+1}, ..., \theta_N)$. Die Abbildung $\eta = \eta(\zeta)$ ist auf den Raum $X' \times Z$ bestimmt, wobei ist X' eine Umgebung des Punktes $x_\bullet$ und Z eine kegelsche Umgebung des Punktes $\zeta(\theta_\bullet)$. Wir haben dabei $\zeta(\theta_\bullet) \neq 0$, anders gehörte der Strahl $\eta = t\eta(\theta_\bullet), t > 0$, $\zeta = 0$ zu $C(\phi)$. Das widerspricht die Gleichung $\eta = \eta(\zeta)$.

Hilfsatz 3 *Es gilt* $N - s = n - r$.

Beweis. Seien $x_1, ..., x_r$ einige Koordinaten auf X so, daß die Formen $\pi^*(dx_1), ..., \pi^*(dx_r)$ auf $T_\lambda(\Lambda(\phi))$ unabhängig sind. Die Abbildung $\phi_* : C(\phi) \to \Lambda(\phi)$ ist eines Isomorphismus der Mannigfaltigkeiten, die die Gleichung $\pi\phi_* = p$ erfüllt, wobei ist $p : X \times \Theta \to X$ die natürliche Projektion. Dann sind die Formen $p^*(dx_1), ..., p^*(dx_r)$ auch auf $T_{(x_\bullet, \theta_\bullet)}(C(\phi))$ unabhängig. Sie bilden mit der Formen $d\theta_{s+1}, ..., d\theta_N$ ein vollständiges System in $T^*_{(x_\bullet, \theta_\bullet)}(C(\phi))$, weil $d\theta_1, ..., d\theta_s$ abhängig von diese Differentialen sind. Schließlich haben wir die Ungleichung $N - s + r \geq n$. In der Fall $N - s + r > n$ haben wir eine lineare Gleichung

$$\sum_{s+1}^{N} a_j d\theta_j + \sum_{1}^{r} b_i dx_i = 0$$

auf den Raum $T_{(x_\bullet, \theta_\bullet)}(C(\phi))$. Dieser Raum ist gleich den Durchschnitt $\cap_1^N \operatorname{Ker} d(\partial\phi/\partial\theta_i)$. Daher ist die linke Seite gleich eine Summe $\sum c_i d(\partial\phi/\partial\theta_i)$. Aus (4.6) folgt, daß $a_j = 0, j = s+1, ..., N$. Darum gelten auch $b_i = 0, i = 1, ..., r$ nach der Eigenschaft der Koordinaten $x_1, ..., x_r$. Der Hilfsatz ist beweisen.⊡

Wir setzen $\psi(x, \zeta) = \phi(x; \eta(x, \zeta), \zeta)$. Das ist eine nichtentartete Phase in $X' \times Z$ gemäß (4.6). Wir setzen auch $\chi(x, \theta) = \phi(x, \theta) - \psi(x, \zeta)$. Das eine glatte homogene Funktion so, daß der Rang der quadratische Form $\operatorname{Hess}_\eta \chi((x_\bullet, \theta_\bullet)$ gleich s ist. Das Integral

$$b(x, \zeta) = \int_{\mathbb{R}^s} \exp(\imath\chi(x; \eta, \zeta)) a(x; \eta, \zeta) d\eta. \tag{4.8}$$

ist eine Lösung der Gleichung (4.5), dabei hat das Integral einen Sinn wie in Abt.5.1. Wir führen die Koordinaten $\rho = |\zeta|$, $\omega = \rho^{-1}\zeta$, $\eta' = \rho^{-1}\eta$ in (4.8) ein:

$$\int \exp(\imath\chi(x;\eta,\zeta))a(x,\theta)d\eta = \rho^{\mu+s}\int \exp(\imath\rho\chi(x;\eta',\omega))a'(x;\eta',\omega)d\omega \quad (4.9)$$

wobei gilt $a'(x;\eta',\zeta) = \rho^{-\mu}a(x,\theta)$. Das letzte Integral hat ein groß Parameter ρ und wir wenden der Sattelpunktmethode (siehe Abt.2.5) an. Zuerst finden wir eine glatte Abbildung $\gamma = \gamma(x;\eta',\omega)$ in eine Umgebung des Punktes $(x_\bullet,\theta_\bullet)$ so, daß die Jakobische Matrix $J = \partial\gamma/\partial\eta'$ invertierbar ist und die Gleichung

$$\chi(x;\eta,\zeta) = \beta(x;\gamma,\zeta)$$

gilt, wobei ist $\beta = 1/2\,\mathrm{Hess}_\gamma\,\chi(x;\eta(\omega),\omega)$ eine quadratische Form in Bezug auf γ. Die Abbildung γ konstruieren wir mit Hilfe der Morse Lemma (Kap.2, Anhang), dabei wenden wir diese Lemma zur Funktion mit Parameter x,ζ an. Dann substituiren wir $\eta' = \eta'(\gamma)$ in (4.8):

$$b(x,\zeta) = \rho^{\mu+s}\int \exp(\imath\beta(x;\gamma,\omega))a''(x;\gamma,\omega)d\gamma$$

wobei bennenen wir $a''(x;\gamma,\omega) = a'(x;\eta'(\gamma),\omega)|J(x;\eta',\omega)|$. Jetzt gibt der Satz 2.5.1 für beliebige natürliche q die Darstellung

$$b(x,\zeta) = \rho^{\mu+s/2}\frac{(2\pi)^{\frac{s}{2}}\exp(\frac{\imath\pi\sigma}{4})}{\sqrt{|\det\mathrm{Hess}\,\beta|}}\sum_{0\le j<q}\frac{1}{j!}\beta^{*j}(\partial/\partial\gamma)a''(x;0,\omega)\left(\frac{2\pi\imath}{\rho}\right)^j + r_q(x,\zeta), \quad (4.10)$$

wobei bennent σ die Signature von β und β^* die duale quadratische Form. Man kann prüfen, daß j-te Glied der Summe gehört zur Klasse $S^{\mu+s/2-j}(X'\times Z)$ für $j = 0,1,...,q-1$ und $r_q = O(\rho^{\mu+s/2-2q})$. Dabei bleibt die letzte Abschätzung fest auch für Ableitungen $L_1\cdot...\cdot L_k b_q$, wobei sind $L_1,...,L_k$ beliebige Felder des Grades 0 auf $X'\times Z$. Deswegen gehört r_q zur Klasse $S^{\mu+s/2-2q}$. Schließlich die ganze rechte Seite ist eines Element von $S^{\mu+s/2}$. Das ist eine Lösung der Gleichung (4.5). $\boxdot$

Bemerkung 1. In der Fall a ist eine homogene Funktion des Grades μ hat die Amplitude b für beliebige k die folgende Entwicklung:

$$b = b_{\mu+s/2} + b_{\mu+s/2-1} + ... + b_{\mu+s/2-k} + r_k,$$

wobei ist b_ν eine homogene Amplitude des Grades ν und gilt $r_k \in S^{\mu+s/2-k-1}$.
Bemerkung 2. Seien $\phi = \phi(x,\theta)$, $\phi'(x,\theta')$ nichtentartete Phasen so, daß

$\Lambda(\phi) = \Lambda(\phi')$ in einer Umgebung eines Punktes λ, dabei hängen die beiden von $n-r(\lambda)$ Hilfsveränderlichen. Man kann konstruiren eine glatte homogene Abbildung η des Grades 1 von einer kegelsche Umgebung W des Punktes $\phi_*^{-1}(\lambda)$ auf eine Umgebung W' des Punktes $(\phi')_*^{-1}(\lambda)$ so, daß

$$\psi'(x, \eta(\theta)) = \psi(x, \theta)$$

gilt. Deswegen hat man für beliebige Amplitude $a \in S^\mu(X \times \Theta')$

$$I(\phi, a) = I(\phi', a') \pmod{\mathcal{E}}$$

in einer Umgebung des Punktes $\pi(\lambda)$ gilt. Dabei ist die Amplitude $a \in S^\mu(X \times \Theta)$ durch die Formel

$$a(x, \theta) = a'(x, \eta(\theta)) \left| \det \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right|$$

gerechnet. Darum kann man beliebige Lagrangesche Λ-Distribution u und für beliebigen Punkt $x \in X$ so, daß $\pi^{-1}(x) \cap \Lambda = \lambda \mathbb{R}_+$ in der Form $u = I(\phi, a) \pmod{\mathcal{E}}$ darstellen, wobei ist ϕ eine gegebene Phase, die hängt von $n - r(\lambda)$ Hilfsveränderlichen.

Folgerung 5.4.2 *Seien Λ eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit und $x \in X$ ein Punkt so, daß die Menge $\pi^{-1} \cap \Lambda$ gleich einen Strahl $\lambda \mathbb{R}_+$ ist, wobei gilt $r(\lambda) = \dim X - 1$. Dann hat jede Λ-Distribution u von Ordnung ν die folgende Darstellung*

$$u = \int_0^\infty \exp(\imath \rho f(x)) a(x, \rho) d\rho dx \pmod{\mathcal{E}}$$

wobei gilt $a \in S^{\nu - 1/2}$ und ist f eine glatte Funktion, die verschwindet auf $\pi(\Lambda)$.

Beweis. Das ist ein Fourier Integral mit $N = 1$, wobei setzen wir $f(x) = \psi(x, \theta_\bullet / |\theta_\bullet|)$. $\boxdot$

In der Fall der homogene Amplitude das letzte Integral ist einfach zu rechnen.

Folgerung 5.4.3 *Unter Bedingungen der vorigen Folgerung hat das Fourier Integral $u = I(\phi, a)$ mit einer homogenen Amplitude a die folgende Darstellung*

$$u = (f + 0\imath)^{-\nu - 1/2} \omega_0 + (f + 0\imath)^{-\nu + 1/2} \omega_1 + \ldots + (f + 0\imath)^{-\nu - 1/2 + k} \omega_k + \rho_k \quad (4.11)$$

Hier sind ω_k, $k = 0, 1, \ldots$ glatte Dichten in einer Umgebung des Punktes x und hat ρ_k die Ableitungen von Ordnung $< k - \nu - 1/2$.

Beweis. Wir wenden die Aussage 5.4.1 auf (4.11) an.$\boxdot$

Im allgemeinen hat eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit Λ eine Stratifikation $\Lambda = \cup_0^{n-1}\Lambda_k$, wobei ist $\Lambda_k = \{\lambda \in \Lambda,\ r(\lambda) \geq k$. Es gilt die Darstellung $\Lambda = \cup(\Lambda_k \setminus \Lambda_{k+1})$, wobei ist $F_k = \pi(\Lambda_k) \subset X$ eine abgeschloßene Menge der Dimension k. Insbesondere ist die Menge $F_{n-1} \setminus F_{n-2}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit, eventuel mit einem Selbstdurchschnitt. Das ist der glatte Teil der Front $\pi(\Lambda)$. In einem beliebigen Punkt $x \in F_{n-1}$ hat beliebige Lagrangesche Λ-Distribution u die Darstellung von Fogerungen 5.4.2 oder 5.4.3. Der Schlüß der Menge $F_{n-1} \setminus F_{n-2}$ enthält den singular Teil der Front F_{n-2}. Für einen Punkt $x \in F_{n-2} \setminus F_{n-3}$ braucht man eine integrale Darstellung für u mit einem Hilfsraum Θ der Dimension 2 und so weiter.

5.5 Anwendung zur Radontransformation

Sei E ein Euklidischer Raum der Dimension n, $\tilde{E}$ dei Mannigfaltigkeit der Hyperebenen H in E. Die Radontransformation einer beschränkten Funktion f mit kompakten Träger ist die Funktion

$$Rf(H) = \int_H f dV_H \tag{5.1}$$

auf $\tilde{E}$, wobei ist dV_H die Euklidische Dichte auf H. Man gibt eine beliebige Hyperebene in der Form $H = H_{\omega,p} = \{x : \omega x = p$ auf, wobei gehört ω zum Einheitskugel S in E und lauft p über $\mathbb{R}$. Dabei sind die Hyperebenen $H_{\omega,p}$ und $H_{\omega,p}$ identisch. Darum ist die Mannigfaltigkeit $\tilde{E}$ isomorphisch mit dem "Möbius Blatt" $S \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}_2$, wobei wird die Gruppe $\mathbb{Z}_2$ durch die Involution $(\omega, p) \mapsto (-\omega, -p)$ dargestellt. Deswegen ist $S' \times \mathbb{R}$ für eine beliebige Halbkugel $S' \subset S$ eine Karte auf $\tilde{E}$. Man kann einfach das Operator (5.1) auf den Raum der verallgemeinerte Funktion mit kompatken Träger fortsetzen, und zwar

$$Ru(\rho) = \int_S u(\psi(\omega, \omega x)dV)d\Omega, \quad \rho = \psi d\Omega \wedge dp \in \mathcal{D}(\tilde{E}). \tag{5.2}$$

wobei sind dV, $d\Omega$ die Euklidichen Volumenformen auf E entsprechend auf S. Dabei ist Ru eines stetiges Funktional auf den Raum $\mathcal{D}(\tilde{E})$ der Grundichten, d.h. Ru ist eine verallgemeinerte Funktion. Die Transformation (5.2) fällt mit (5.1) zusammen, falls u eine gewöhnliche beschränkte Funktion ist. Das folgt aus die Formel $dV = dV_H dp$. Wir benutzen den folgenden geometrische Konstruktion um die Transformation (5.2) zu untersuchen. Für beliebigen Punkt $(x, \xi) \in T^*(E)$ entspricht die Hyperebene $H(x, \xi) \in \tilde{E}$ die enthält den Punkt x und ist zu ξ orthogonal. Diese Hyperebene hat die Koordinaten $\omega_\bullet = |\xi|^{-1}\xi, p_\bullet = \omega x$. Wir bekommen eines Kovektor im Punkt $H(x, \xi)$ folgendeweise. Die Funktion

$$\tilde{x}(H_{\omega,p}) = p - \omega x$$

auf $\tilde{E}$ verschwindet im Punkt $(\omega_\bullet, p_\bullet)$. Wir betrachten ihres Differenzial $d\tilde{x} = dp - x d\omega$ und setzen

$$\mathcal{R}(x, \xi) = (\omega_\bullet, p_\bullet; |\xi| d\tilde{x}).$$

Das ist eine homogene Abbildung der Vektorbündel $\mathcal{R} : T^*(E) \to T^*(\tilde{E})$. Wir bennenen es die *geometrische* Radontransformation. Das Bündel $T^*(\tilde{E})$ ist mit einer kanonischen 1-Form $\tilde{\alpha}$ ausstattet, wobei gilt $\tilde{\alpha} = \eta d\omega + \eta_0 dp$. Dabei sind die Koordinaten $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$ überzählig: für $\eta = c\omega$ verschwindet die Form $\eta d\omega$.

Aussage 5.5.1 *Die Abbildung $\mathcal{R}$ ibehält die kanonische 1-Form bei, d.h.*

$$\mathcal{R}^*(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

Beweis. Wir haben $\mathcal{R}^*(\tilde{\alpha}) = \eta d\omega + \eta_0 p$, wobei sind $\eta = -|\xi| x$, $\eta_0 = |\xi|$ die Koeffizienten der Form $d\tilde{x}$ und

$$\eta d\omega + \eta_0 dp = -|\xi| x d\omega + |\xi| d(\omega dx) = |\xi| \omega dx = \xi dx.$$

$\boxdot$

Es folgt daraus, daß die Abbildung $\mathcal{R}$ behält auch die Volumenform bei: $\mathcal{R}^*(\wedge^n d\tilde{\alpha}) = \wedge^n d\alpha$, schließlich ist $\mathcal{R}$ eines Isomorphismus.

Satz 5.5.1 *Seien Λ eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit in $T^*(E)$, $\tilde{\Lambda} = \mathcal{R}(\Lambda)$ und u eine Lagrangesche Λ-Distribution mit kompaktem Träger. Dann ist die Radontransformation Ru eine Lagrangesche $\tilde{\Lambda}$-Distribution.*
Die ähnliche Behauptung erfüllt für die inverse Radontransformation.

Dabei identifitieren wir eine beliebige verallgemeinerte Funtkion u auf E oder auf $\tilde{E}$ mit der Distribution udV entsprechend mit der Distribution $ud\Omega \wedge dp$.
Beispiel 1. Sei u die Indikatorfunktion eines kompakten Gebiets $G \subset E$ mit glattem Rand ∂G. Diese Funktion ist eine Λ-Distribution für konormale Vektorbündel $\Lambda = N^*_{\partial G}$. Dann ist das Radonbild Ru eine $\tilde{\Lambda}$-Distribution, wobei gilt $\tilde{\Lambda} = \mathcal{R}(N^*_{\partial G}$. Die Inklusion $WF(Ru) \subset \tilde{\Lambda}$ folgt aus dem Satz 5.2.1. In der Tat ist das eine Gleichung.

5.6 Hyperbolische Anfangswertproblem

Wir betrachten eine hyperbolische Differenzialgleichung im Zeit-Raum $X \times \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^n$

$$P(x, t; D_x, D_t)u = w \tag{6.1}$$

m-te Ordnung mit Anfangswerten auf Hyperebene $t = 0$. Wir schreiben $P = p_m + p_{m-1} + ... + p_0$, wobei ist p_k ein homogenes Operator des Grades k. Das Symbol des Operators ist das homogene Polynom $p_m(x, t; \imath\xi, \imath\tau)$. Wir entwickelen das Symbol in der Form eines Produkt

$$p_m(x, t; \xi, \tau) = \prod_1^m [\tau - \tau_j(x, t; \xi)],$$

wobei sind $\tau_1, ..., \tau_m$ homogene Funktion von ξ des Grades 1. Das Operator (6.1) heißt *strikt hyperbolish*, falls $\Im\tau_1 = ... = \Im\tau_m = 0$ und $\tau_i \neq \tau_j$, $i \neq j$ für reelle ξ gelten.
Das Anfangswertproblem (Cauchy Probleme) für $t > 0$ ist das folgende:

$$u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), ..., \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}(x, 0) = u_{m-1}(x) \tag{6.2}$$

für gegebene Funktionen $u_0, ..., u_{m-1}$.
Sei $E^j_y \in \mathcal{D}'(X \times \mathbb{R}_+)$, $j = 0, ..., m-1$ eine Lösung des Anfangswertproblem mit $w = 0$, $u_i = \delta^j_i \delta_y$. Die Folge $E^0_y, E^1_y, ..., E^{m-1}_y$ der Distributionen auf $X \times \mathbb{R}_+ \times X$ heißt das *Grundsystem der Lösungen* der Gleichung (6.1). Man kann das Anfangswertproblem (6.2) mit beliebigen Daten lösen mit Hilfe des Grundsystem (wie für gewöhnliche Gleichung). Auch reduziert die allgemeine Anfangswertproblem zum Fall $w = 0$ nach der Duhamelsche Methode. Dabei kann man das ganze System aus E^{m-1}_y aufführen, falls die Koeffizienten

des Operators P von Zeit t unabhängig sind: $E_y^k = q_{m-1-k}(y,D)E_y^{m-1}$, $k < m-1$, wobei ist q_j eine Differenzialoperator von Ordnung j. Die Distribution $E_y = E_y^{m-1}$ heißt die Grundlösung. Die Grundlösung ist eine Lagrangesche Distribution. Wir beschreiben diese Lösung in einem allgemeinen Kontext.
Sei $\Lambda \in T^*(X)$ beliebige Lagrangesche Mannigfaltigkeit. Wir betrachten für einen beliebigen Nummer $j, 1 \leq j \leq m$ die Hamiltonische Funktion $h_j(x,t;\tau,\xi) = \tau - \tau_j(x,t,\xi)$ auf $T^*(X \times \mathbb{R}_+)$. Wir "heben" Λ in die Bündel $T^*(X \times \mathbb{R})$ auf und zwar wir betrachten die Mannigfaltigkeit

$$W_j = \{(x,0;\xi,\tau_j(x,0)) : (x,\xi) \in \Lambda\}.$$

Sie gehört zur Hyperfläche $h_j = 0$. Jetzt erbauen wir den Hamiltonischen Flüß

$$\frac{dx}{dt} = (h_j)'_\xi, \quad \frac{dt}{dt} = (h_j)'_\tau = 1, \quad \frac{d\xi}{dt} = -(h_j)'_x \quad \frac{d\tau}{dt} = -(h_j)'_t,$$

mit Anfangswerten auf W_j. Wir benennen durch Λ_j die Vereinigung der Trajektorien. Das ist eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit in $T^*(X \times \mathbb{R})$ gemäßdem Satz 4.5.2. Die Vereinigung $\tilde{\Lambda} = \cup_1^m \Lambda_j$ ist auch eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit, eventuell mit einigem Selbstdurchschnitt.

Satz 5.6.1 *Seien $u_0, ..., u_{m-1}$ Lagrangesche Λ-Distributionen. Dann gibt es eine Umgebung U der Hyperfläche $X \times 0$ so, daß das Angangswertproblem mit $w = 0$ eine und nur eine Lösung in $\mathcal{D}'(U)$ hat. Dabei ist die Lösung eine Lagrangesche $\tilde{\Lambda}$-Distribution in U.*

Für eines globalen Ergebnis braucht man eine weitere Voraussetzung. Für einen beliebigen Punkt $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$ der Gebiet der Abhängigkeit $A(x,t)$ ist die Menge der Punkten $y \in X$ so, daß eine bicharakteristische Kurve für $\tilde{\Lambda}$ von $(y,0)$ bis (x,t) lauft.

Satz 5.6.2 *Wir setzen voraus, daß für beliebigen Punkt (x,t) die Menge $A(x,t)$ eines Kompaktum ist. Dann gilt die Behauptung des vorigen Satzes für $U = X \times \mathbb{R}_+$.*

Entwurf des Beweises. Wir besprechen in kurzen Worten eine Konstruiren der Grundösung E_y des Anfangswertproblems.
Zuerst lösen wir die Gleichung

$$P(x,t;D_x,D_t)I(\phi,a) = 0 \mod \mathcal{E}(X \times \mathbb{R}) \tag{6.3}$$

für eines Fourier Integral mit einer Amplitude a, die hat die folgende Entwicklung

$$a = a_\nu + a_{\nu-1} + ... + a_k + r_k,$$

wobei ist a_k eine homogene Amplitude des Grades k und gehört r_k zu S^k. Wir schreiben die linke Seite in der Form

$$\int \exp(\imath\phi)[b_{\nu+m} + b_{\nu-m-1} + ... + b_k + ...]d\theta \tag{6.4}$$

wobei ist b_k eine homogene Amplitude des Grades k. Wir rechnen einfach das Glied des höchste Grades

$$b_{\nu+m}/x, t; \theta) = p_m(x, t; d\phi)a_\nu(x, t; \theta).$$

Das muss wegen (5.3) auf $C(\phi)$ verschwinden. Das bedeutet, daß die Phase die Eikonalgleichung

$$p_m(x, t; d\phi) = 0$$

auf $C(\phi)$ erfüllt. Sei ϕ eine Lösung für der Eikonalgleichung auf $C(\phi)$. Wir schreiben die linke Seite in der Form

$$p_m(x, t; d\phi) = \sum q_j(x, t; \theta)\frac{\partial\phi(x, t; \theta)}{\partial\theta_j}$$

wobei sind $q_1, ..., q_N$ einige glatte homogene Funktionen des Grades $\nu + m$. Jetzt integrieren wir das Hauptglied in (6.4) teilweise:

$$\int \exp(\imath\phi)p_m(x, t; d\phi)a_\nu(x, t; \theta)d\theta = \imath \int \exp(\imath\phi) \sum \frac{\partial}{\partial\theta_j}(q_j a_\nu)d\theta.$$

Das ist eines Fourier Integral mit einer Amplitude des Grades $\nu + m - 1$. Folglich muss man die folgende Gleichung

$$\sum \frac{\partial}{\partial\theta_j}(q_j a_\nu) + b_{\nu+m-1} = 0 \quad auf \quad C(\phi) \tag{6.5}$$

lösen. Die linke Seite ist gleich

$$-\sum \frac{\partial p_m}{\partial\xi_i}\frac{\partial a_\nu}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial\xi_k}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_k}a_\nu + \imath\sum\frac{\partial}{\partial\theta_j}(q_j a_\nu) + p_{m-1}a_\nu =$$

$$= -\imath v(a_\nu) + p_{m-1}a_\nu,$$

wobei ist v ein tangentiales Feld auf $C(\phi)$. Wir schieben diese Gleichung auf $\Lambda \cong C(\phi)$ und bekommen eine invariante Form der Gleichung (6.5):

$$L_{p_m}\tilde{a}_\nu + Q\tilde{a}_\nu = 0, \tag{6.6}$$

wobei ist L_{p_m} die Lie Ableitung die Hamiltonischen Feld entlang für Hamiltonische Funktion $p_m(x,t;d\phi)$ und gilt

$$Q = p_{m-1}(x,t;d\phi) - \frac{1}{2\imath}\sum \frac{\partial^2 p_m(x,t;d\phi)}{\partial x_j \partial \xi_j}.$$

Wir funden eine Lösung der Gleichung (6.6) und substituiren sie in (6.3). Jetzt verschwinden $b_{\nu+m}$ und $b_{\nu+m-1}$ in (6.4). Die Gleichung $b_{\nu+m-2} = 0$ ist equivalent zur folgende

$$L_h\tilde{a}_{\nu-1} + Q\tilde{a}_{\nu-1} = S\tilde{a}_\nu, \tag{6.7}$$

wobei ist S eine Differenzialoperator zweiter Ordnung. Wir wählen eine Lösung $a_{\nu-1}$ und bekommen eine ähnliche Gleichung für $a_{\nu-2}$ und so weiter. Eine Gleichung wie (6.6) oder (6.7) heißt die *Transportgleichung*. Für die Amplituden $a_\nu, a_{\nu-1}, ...$ die erfüllt alle Transportgleichungen, gilt die Beziehung (6.3). Dabei können wir die Anfangswerten für Transportgleichungen wählen. Für jede j ist die Mannigfaltigkeit Λ_j gleich die Vereinigung der Trajektorien der Hamiltonische Feld H_{h_j} mit Anfangswerten $x(0) = y$, $t(0) = 0$, $\tau(0) = \tau_j(y,0;\xi), \xi(0) = \xi$, wobei lauft ξ über den Raum $T_y^*(X)$. Das Hamiltonische Feld H_{p_m} ist zu jede Trajektorie des Felds H_{h_j} tangential, aber die Geschwindigkeiten unterscheiden. Die Projektion Λ_j auf den Zeit-Raum $X \times \mathbb{R}_+$ heißt die charakteristiche Fläche. Diese Fläche schneidet der Raum $X \times \mathbb{R}_+$ in einige zusammenhängende Komponenten. Eine Komponente F enthält die Anfangsfläche $X \setminus \{y\} \times \{0\}$. Die Welle E_y ist gleich Null in F. Die ergänzung $K = X \times \mathbb{R}_+ \setminus F$ heißt das Konoid der Wellenausbreitung (oder Abhängigket). Das ist ein echter Kegel, falls das Operator die konstanten Koeffizienten hat.
Wir suchen die Grundlösung in der Form

$$E = \sum_1^m I(\phi_j, a_{(j)}). \tag{6.8}$$

wobei ist die Phase ϕ_j eine Lösung der Eikonalgleichung

$$h_j(x,t;d\phi_j) = 0,\ h_j(x,t;\tau,\xi) = \tau - \tau_j(x,t;\xi), \quad j = 1, ..., m$$

mit den Angangsbedingungen

$$\phi_j(x,0;\theta) = \phi_0(x;\theta) \quad h_j(x,0;d\phi_j) \equiv \frac{\partial \phi_j}{dt} - \tau_j(x,0;d_x\phi_j) = 0.$$

Wir finden eine Lösing des Angangswertproblem mit Verfahren der Abt. 4.6. (Andere Methode ist die Aussage 5.3.1 zur Mannigfaltigkeit Λ_j zu anwenden.) Dann finden wir die Amplituden $a_{(1)}, ..., a_{(m)}$ aus der Transportgleichungen. Das gibt eine Lösung der Gleichung $P(x,t;D)E = 0, \quad \mathrm{mod}\ \mathcal{E}(X \times \mathbb{R}_+)$.
Wir bestimmen die Anfangsdaten um die Anfangsbedingungen (6.2) zu erfüllen. Insbesondere setzen wir

$$\phi_0(x,\theta) = \theta x \equiv \sum_1^n \theta_i x_i,$$

d.h. jede Fourier Integral in (6.8) ist für $t = 0$ eine Fouriertransformation. Wir rechnen

$$E(x,0) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\imath\theta x) \sum_j a_{(j)}(x,0;\theta)d\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial t}E(x,0) = \int \exp(\imath\theta x) \sum_j [\tau_j(x,0;\theta)a_{(j)}(x,0;\theta) + \frac{\partial}{\partial t}a_{(j)}(x,0;\theta)]d\theta$$

wobei drücken wir die Ableitung $\partial/\partial t a_{(j)}(x,0;\theta)$ durch $a_{(j)}(x,0;\theta)$ aus, dank der Transportgleichung. Für beliebige $k < m$ ergibt es sich

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}E(x,0) = \int \exp(\imath\theta x) \sum_j [(\tau_j(x,0;\theta)^k + \sigma_{kj}(x,0;\theta)]a_{(j)}(x,0;\theta)d\theta, \quad (6.9)$$

wobei ist σ_{kj}, $j = 1, ..., k$ eine Summe der homogene Funktion des Grades $< k$. Wir substituiren (6.9) in (6.2):

$$\sum_j [\tau_j^k + \sigma_{jk}]a_{(j)} = \delta_k^{m-1}e,\ k = 0, ..., m-1, \quad e = (2\pi\imath)^{-n}\exp(-\imath\theta y) \quad (6.10)$$

Das ist eine lineare System für die Funktionen $a_{(1)}, ..., a_{(m)}$ mit der Matrix $T = \|\tau_{kj}\|$, $\tau_{kj} = \tau_j^k + \sigma_{kj}$. Das Hauptglied $\|\tau_j^k\|$ der Matrix ist die Vandermondesche Matrix. Das ist inversible. weil die Würzel $\tau_1, ..., \tau_m$ verschiedene sind (p ist strikt hyperbolish). Deswegen hat (6.10) eine Lösung

$$a_{(j)} = a_{(j),\nu} + a_{(j),\nu-1} + ... \quad \nu = 1 - m$$

Dabei haben die Hauptglieder das folgende Aussehen

$$a_{(j),\nu}(x,0;\theta) = e\left(\prod_{k\neq j}(\tau_k(x,0;\theta) - \tau_j(x,0;\theta))\right)^{-1}.$$

Mit der Phasen ϕ_j und Amplituden $a_{(j)}$, $j = 1, ..., m$ bekommen wir eine $\tilde{\Lambda}$-Distribution (6.8), die erfüllt die Gleichung (6.1) in einer Umgebung U und die Bedingung (6.2) modulo $\mathcal{E}$.
Unten der Voraussetzung des Satzes 5.6.2 kann man die Distribuion E weiter fortsetzen. In allgemeinem kann man nicht E weiter die Form (6.8) benutzen, weil für eine Zeit $t = \varepsilon$ wenn einer Punkt $\lambda \in \tilde{\Lambda}$, $t(\lambda) = \varepsilon$ auftritt so, daß $r(\lambda) < n$. Man fortsetzt diese Lösung für spätere Zeit $t > \varepsilon$ wie eine $\tilde{\Lambda}$-Distribution. Dabei findet man die Phasen ψ_α um die Mannigfaltigkeit $\tilde{\Lambda}$ mit den Stücken $\Lambda(\psi_\alpha)$ zu überdecken (siehe Aussage 5.3.1) und die Amplituden a_α um alle Transportgleichungen zu erfüllen.
Endlich bekommen wir eine $\tilde{\Lambda}$-Distribution in $X \times \mathbb{R}_+$, die erfüllt das Anfanbgswertproblem modulo $\mathcal{E}$. Die heißt ein *Parametrix* des Angangswertproblems. Man sucht die echte Grundösung in der Form $E_y = E + F$, wobei ist F eine glatte Dichte mit dem Trağer in K. Man findet eine F aus eine Integralgleichung des Volterrischen Typs. ⊡
Beispiel. Die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(x,t)\Delta u = w$$

mit der Geschwindigkeit $c(x,t) > 0$ ist eine strikt hyperbolische Gleichung, weil $\tau_1 = c(x,t)|\xi|$, $\tau_2 = -c(x,t)|\xi|$ gilt. Wir haben zwei Hamiltonische Funktionen $h_1 = \tau - c(x,t)|\xi|$, $h_2 = \tau + c(x,t)|\xi|$ und schließlich zwei Komponenten Λ_1, Λ_2 der Mannigfaltigkeit $\tilde{\Lambda}$ für beliebige Λ. Sei $\Lambda = T^*_y(X)$ für einen Punkt $y \in X$. Die Menge Λ ist symmetrische bei der Involution $\xi \mapsto -\xi$. Desewegen gilt die Beziehung $\phi_2(x,t;\theta) = -\phi_1(x,t;-\theta)$. Schließlich haben die entsprechende bicharakterische Streifen für h_1 und für h_2 gleiche Projektion auf $X \times \mathbb{R}$ und gilt $\pi(\Lambda_1) = \pi(\Lambda_2)$. Diese Menge ist gleich der singular Träger der Grundlösung E_y in $X \times \mathbb{R}_+$. Die Menge ssupp E_y ist Hyperfläche eventuell mit Singularitäten. Für ein beliebigen glatten Punkts P der Fläche wird die Grundlösung durch eine der Formel

$$E_y = e_0\delta^{(n-3)/2}(\phi) + F, \quad E_y = e_0\phi^{(1-n)/2} + F, \tag{6.11}$$

$$E_y = e_0 \phi_+^{(1-n)/2} + F \tag{6.12}$$

dargestellt. Dabei sind e_0, ϕ glatte Funktionen so, daß $\phi(x,t) = 0$ eine lokale Gleichung für $\operatorname{ssupp} E_y$ ist (d.h. eine Phase mit $N = 0$) und Das Restglied hat die folgende Entwicklung

$$F = e_1 h_1(\phi) + e_2 h_2(\phi) + ...,$$

wobei sind $e_1, e_2, ...$ glatte Funktionen und $h_1, h_2, ...$ sukzessive Primitive des Hauptprofils $h_0 = \delta^{(n-3)/2}, ...$ Formel (6.11) gelten für gerade $n+1 > 2$, dabei gilt die erste Variante für den Punkt P, der befindet sich auf einem Strahl S *bevor* der erste Kaustik. Nach der erste Kaustik gilt die zweite Variante (6.11). Nach der zweite Kaustik schaltet die zweite Formel um die erste und so weiter. Für ungerade $n+1$ gilt die Annäherung (6.12).
Für ein singularen Punkt $P \in \operatorname{ssupp} E_y$ kann man die Grundlösung mit andere spezielle verallgemeinerte Funktion darstellen.

5.7 Anhang
Lagrangesche Mannigfaltigkeiten im Bild

Erklärung der Bilden. Die Figuren stellen zwei Lösungen u_1, u_2 der Helmgoltz Gleichung

$$\Delta u + \frac{k^2}{c^2} u = 0$$

mit der Geschwindigkeit $c = 1$ im Kreis $K \subset E$ des Radius $r = 1$ in die Euklidischen Ebene E dar.
Erstes Bild Die erste Lösung erfüllt die Dirichletsche Randwertbedingungen:

$$u_1 = 1 \text{ auf das oberen Viertel } S \text{ des Randes des Kreises, sonst } u_1 = 0,$$

Die Lösung hat der Typus der stehende Wellen, dabei ist der wesentliche Träger der Welle u_1 die Vereinigung der Durchmessers D_s mit den Ende $s \in S$. Diese Menge ist die Projektionen einer entsprechende Lagrangesche Mannigfaltigkeiten $\Lambda_1 \subset T^*(E)$. Für eine Konstruktion betrachten wir einen beliebige Punkt $s \in S$ und zwei Intervalen $D_s^\pm$ in $T^*(E)$ nämlich

$$D_s^\pm = \{x \in D_s, \, \xi = \pm \frac{k}{2\pi} e\},$$

Hier ist e das Enheitvektor des Durchnessers D_s mit der Richtung von S.

Sei $\Lambda^\pm$ die Vereinigung der Intervalen $D_s^\pm$, $s \in S$. Wir kleben zwei Blätten $\Lambda_1^\pm$ über die gegegnwärtig Bogen $-S$ zusammen. Wir bekommen eine Fläche $\Lambda_1 \subset T^*(E)$. Das ist eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit. Tatsächlich werten wir die kanonische Form $\sigma = d\alpha = d\xi_1 \wedge dx_1 + d\xi_2 \wedge dx_2$ auf die tangentialen Vektoren $\tilde{e}, t \in T(\Lambda_1)$ aus so, daß $D\pi(\tilde{e}) = e$. Wir rechnen

$$\sigma(\tilde{e}, t) = -(e \cdot d\xi)(t) = \pm \frac{k}{2\pi} e \cdot t(e) = 0,$$

weil das Vektor $t(e)$ immer zu Einheitfeld $e(x)$ orthogonal ist. Schließlich ist die kanoniche Form $\alpha = \xi dx$ auf Λ abgeschloßen. Wir fixieren einen Punkt $\lambda_\bullet \in \Lambda_1^+$ und bestimmen eine Eikonalfunktion auf Λ_1^+

$$\phi^+(\lambda) = \int_{\lambda_\bullet}^{\lambda} \alpha \tag{7.1}$$

und auch auf Λ_1^-:

$$\phi^-(\lambda) = \int_{\lambda_\bullet}^{\lambda} \alpha + \frac{1}{2}$$

wobei substrahieren wir eine Halbe für jeden Übergang des Wegs γ durch den $-S$ (die änderung der Phase bei der Reflektion). Das Integral hängt nicht von dem Weg ab, weil Λ_1 einfach zusammengehängig ist. Die Summe

$$u_1 \approx a_+ \exp(2\pi\imath\phi_+(x)) + a_- \exp(2\pi\imath\phi_-(x)) \tag{7.2}$$

ist eine Annäherung zur Lösung des ersten Bilds für geiegnete Konstanten $a_\pm$.

Zweites Bild Die Lösung u_2 erfüllt die Dirichletsche Bedingung $u_2 = \delta_y$, wobei ist y der oberen Punkt des Randes. Der wesentliche Träger der u_2 ist das Ring $R = \{r \le |x| \le 1\}$. Wir betrachten alle Strahlen in dem Rand R, die sind tangentiale zum inneren Kreis $|x| = r$ und gegen die Uhr laufen. In einem beliebigen inneren Punkt $x \in R$ gibt es genau zwei Strahlen $S_\pm$. Wir bennenen durch $e_\pm$ die Einheitvektoren dieser Strahlen, wobei hat e_+ die Richtung... und setzen

$$\xi_\pm = \frac{k}{2\pi} e_\pm.$$

Wir bekommen zwei Blätten $\Lambda_2^\pm$ im Raum $T^*(E)$ die entdecken zweimal den Ring R. Wir kleben die Blätten über die Rände zusammen und bekommen eine abgeschloßene Mannigfaltigkeit Λ_2, die ist zum Torus topologisch equivalent. Das ist eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit, folglich ist die Form $\alpha = \xi dx$ auf Λ_2 abgeschloßen wie im vorigen Fall. Wir bestimmen zwei Periode

$$P_1(\Lambda_2) = \int_{\gamma_1} \alpha, \quad P_2(\Lambda_2) = \int_{\gamma_2} \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{4},$$

wobei ist γ_1 ein Zyklos in Λ_2, die ist zu einem Kreis $|x| = r'$, $r < r' < 1$ homotopisch equivalent. Der Zyklos γ_2 ist equivalent zur Vereinigung der zwei orientierte Intervalen $\{x : r \le x_1 \le 1,\ x_2 = 0\}$, wobei kreuzt der Zyklos γ den Zyklos $|x| = 1$ in dieselbe Richtung wie die reflektierende Strahlen durch. Die Zahl $1/2$ bedeutet wieder die Änderung der Phase wegen die Reflektion an dem außeren Rand und die Zahl $-1/4$ entspricht dem kaustische Verlust an dem untenen Rand $x = r$.

Die *Quantization* Bedingung: die beide Periode sind ganze Zahlen

$$P_1(\Lambda) = p_1,\ P_2(\Lambda) = p_2 \tag{7.3}$$

Das ist eine notwendige Bedingung für Existenze eine Lösung u_2 von Typus "flüsternde Galerie" (siehe [4]).

Die beide Bedingungen (7.3) erfüllen für Λ_2 mit $k = 33\pi/2$, $p_1 = 32$, $p_2 = 4$. Dann gilt die Annäherung wie (7.2). Dabei ist ϕ_+ eine Eikonalfunktionen wie in (7.1) und

$$\phi_-(\lambda) = \int_{\lambda_\bullet}^{\lambda} \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}.$$

Die Annäherung (2) ist tauglich im Ring $r + \varepsilon < |x| < 1$ für ein positives ε. In einer Umgebung der Kaustik $|x| = r$ ist eine andere Annäherung geeignet:

$$u_2(x) \approx a \exp(2\pi \imath \phi(\theta(x))) \operatorname{Ai}(\eta(|x|)k^{2/3}),$$

wobei gilt $\phi = \phi_\pm$ auf die Kaustik und bezeichent Ai die Airysche Funktion (siehe Kap.2); $\theta(x) = rx/|x|$ und η sind die *kaustische* Koordinate, dabei verschwindet $\eta(t)$ für $t = r$.

Danksagung. Die Bilder sind durch einen Algorithmus von Dr. Frank Wübbeling berechnet. Ich danke Dr.F. Wübbeling für seine Mitwirkung.

Literaturverzeichnis

[1] Duistermaat J.J. Fourier Integral Operators, Birkhäuser 1996

[2] Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV, Fourier Integral Operators, Springer-Verlag 1985

[3] Palamodov V.P. Distributions and Harmonic Analysis, Encyclopaedia of Mathematical Science, v.72, Springer-Verlag 1993.

[4] J.B.Keller, S.Rubinow, Asymptotic solution of eigenvalue problems, Annals of Physics, **9** N1 (1960); Erratum, Annals of Physics, **10** N2 (1960)

Kapitel 5

Fourier Integrale

28.03.1997

Inhaltsverzeichnis

5.1 Distributionen mit oszillierendem Kern

Wir betrachten eine durch das Integral

$$I(\phi, a)(\psi) = \int_\Theta \int_X \exp(\imath\phi(x,\theta))a(x,\theta)\psi(x)dxd\theta, \quad \psi \in \mathcal{D}(X) \tag{1.1}$$

bestimmte Distribution auf eine offene Menge $X \subset \mathbb{R}^n$. Wie im Kapitel 2 heißt die Funktion ϕ die *Phase* und die Funktion a die *Amplitude* des Integrals. Sie werden im Raum $X \times \Theta$ definiert, wo ist $\Theta = \mathbb{R}^N$ einer Hilfsraum.

Die Phase ist eine reelle Funktion und die Amplitude erfüllt die Ungleichung

$$|a(x,\theta)| \leq C(|\theta|+1)^{\mu},$$

Das Integral über Θ ist absolute konvergierbar, falls $\mu + N < 0$ gilt. und es erfüllt

$$|I(\phi,a)(\psi)| \leq C \int |\psi(x)| dx. \tag{1.2}$$

Wir benutzen die folgende technische Definition. Sei $q \geq 0$ eine ganze Zahl. Wir sagen, daß eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ von Singularordnung $\leq q$ ist, falls die folgende Ungleichung gilt:

$$|u(\psi)| \leq C(u)\|\psi\|^{(q)} \quad \|\psi\|^{(q)} = \sum_{|i|\leq q} \int_X \left|D^i \psi\right| dx$$

Die Ungleichung (1.2) impliziert, daß die Distribution $I(\phi,a)$ von Sungularordnung ≤ 0 ist.
Im allgemeinen kann man einen Sinn für diviergentes Integral (1.1) verleihen durch eine Regularisierungsmethode, falls die Phase eine homogene Funktion von θ des Grades 1 ist und die Amplitude eine besondere Bedingung erfüllt. Dabei meint man, daß eine Funktion f auf die Faserbündel $X \times \Theta \to X$ homogene des Grad $\deg f = \gamma \in \mathbb{R}$ ist, falls die Gleichung $f(x,t\theta) = t^{\gamma} f(x,\theta)$ für beliebige $t > 0$ gilt. Eines Differentialoperator A auf $X \times \Theta$ ist homogenes des Grads α, falls die Funktion Af homogene des Grades $\gamma + \alpha$ für beliebige homogene Funktion f des Grades γ ist. Insbesondere sind die Felder

$$b(x,\theta)\frac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1,...,n,\ c(x,\theta)\frac{\partial}{\partial \theta_j},\ j = 1,...,N$$

homogene Operatoren des Grades -1, falls die Funktionen $|\theta| b(x,\theta)$, $c(x,\theta)$ homogene des Grades Null sind.
Definition. Sei $\mu, \rho \in \mathbb{R}, 0 < \rho \leq 1$. Die Klasse $S^{\mu}_{\rho} = S^{\mu}_{\rho}(X \times \Theta)$ ist die Menge der Funktionen, in $X \times \Theta$, die erfüllen die folgende Reihe der Ungleichungen

$$L_k \cdot ... \cdot L_1 a(x,\theta) \leq C(|\theta|+1)^{\mu - k\rho},\ k = 0,1,... \tag{1.3}$$

erfüllt, wobei sind $L_1, ..., L_k$ beliebige Felder des Grades -1 und hängt die Konstante C von x, θ nicht ab.

Beispiel 1. Eine beliebige glatte homogene Funktion a des Grades μ auf $X \times \Theta$ gehört zur S_1^μ.

Definition. Wir sagen, daß eine Amplitude a asymptotisch homogene ist, von Ordnung μ, falls die folgende Entwicklung:

$$a = a_\mu + a_{mu-1} + \ldots + a_{\mu-q} + r_q,$$

für beliebige q gilt. Hier jede Glied a_ν ist eine glatte homogene Amplitude des Grades ν und $r_q \in S_1^{\mu-q-1}$. Sei S^μ der Raum der asymptotisch homogenen Amplituden von Ordnung μ.

Wir regularisieren das diviergente Integral (1.1) folgendeweise:

$$I(\phi, a)(\psi) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_X \int_\Theta \exp(\imath\phi(x,\theta) - \varepsilon|\theta|)a(x,\theta)\psi(x)d\theta dx. \tag{1.4}$$

Der Integrand ist offenbsichtlich summierbar für beliebige $\varepsilon > 0$.

Satz 5.1.1 *Seien ϕ eine beliebige glatte homogene reelle Funktion des Grades 1 ohne kritischen Punkten in $X \times (\Theta \setminus 0)$ und eine beliebige $a \in S_\rho^\mu$. Dann existiert die Grenze* (1.4) *für eine beliebige Grundfunktion ψ. Dabei ist $I(\phi, a)$ eine Distribution in X von Singularordnung $\leq k$, so daß die Ungleichung $\mu + N < k\rho$ gilt.*

Unter diesen Bedingungen bennenen wir das Funktional (1.4) *Fourier-Distribution*.

Beweis. Wir wählen eine Funktion $\chi \in \mathcal{D}(\Theta)$, so daß $\chi(\theta) = 1$ für $|\theta| \leq 1$. Wir stellen das Integral in (1.3) wie eine Summe der zwei Integrals mit dem Faktor χ, entsprechend $1 - \chi$ dar. Das erste ist ein eigenes Integral und die Grenze für $\varepsilon \to 0$ ist gleich die Distribution $[I_0 dx](\psi)$, wobei ist

$$I_0(x) = \int_{\operatorname{supp}\chi} \exp(\imath\phi(x,\theta))\chi(\theta)a(x,\theta)d\theta$$

eine gewöhnliche glatte Funktion von Ordnung ≤ 0. Sei L eines Feld des Grades -1, so daß $L\phi = -\imath$. (Hilfsatz 1). Wir schreiben das zweite Integral in der Form

$$\int\int \exp(\imath\phi - \varepsilon|\theta|)(1-\chi)a\psi dx d\theta = \int\int L(\exp(\imath\phi))\exp(-\varepsilon|\theta|)(1-\chi)a\psi dx d\theta$$

und integrieren teilweise:

$$\int\int L(\exp(\imath\phi))\exp(-\varepsilon|\theta|)(1-\chi)a\psi dx d\theta =$$

$$\int\int \exp(\imath\phi)L^*(\exp(-\varepsilon|\theta|)(1-\chi)a\psi)dxd\theta,$$

wobei L^* das konjungierte Differenzialoperator bezeichent (siehe (1.10)). Das ist eines Operator des Grades -1 und

$$L^*(\exp(-\varepsilon|\theta|)(1-\chi)a\psi) = -L(\exp(-\varepsilon|\theta|))(1-\chi)a\psi-$$

$$-\exp(-\varepsilon|\theta|)[L((1-\chi)) + \operatorname{div}(L)(1-\chi)]a\psi-$$

$$-\exp(-\varepsilon|\theta|)(1-\chi)L(a)\psi - \exp(-\varepsilon|\theta|)(1-\chi)aL(\psi).$$

Schließlich ergeben wir uns

$$\int\int \exp(\imath\phi_\varepsilon)(1-\chi)a\psi dxd\theta = \int\int \exp(\imath\phi_\varepsilon)\left[a_0\psi + \sum_j a_j\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right]dxd\theta, \tag{1.5}$$

wo bezeichnen wir $\phi_\varepsilon = \phi + \varepsilon|\theta|$, und

$$a_0 = a_0(\varepsilon; x, \theta) = [-\varepsilon\sum\frac{c_i\theta_i}{|\theta|} + L(1-\chi) + \operatorname{div}(L)(1-\chi)]a + L(a), \tag{1.6}$$

$$a_j = ab_j,\ j = 1, ..., n.$$

Die Amplitude $a_j,\ j = 1, ..., n$ gehört offenbar zur Klasse $S_\rho^{\mu-1}$, weil die Funktion b_j glatte homogene des Grades -1 ist. Jetzt abschätzen wir die Amplitude a_0. Die Summe im ersten Glied (1.6) ist eine homogene Funtion des Grades 0, schließlich ist sie auf Θ beschränkt. Das Produkt $\varepsilon\exp(-\varepsilon|\theta|)$ ist durch $C|\theta|^{-1}$ majoriert, weil ist die Funktion $\varepsilon|\theta|\exp(-\varepsilon|\theta|)$ gleichmäßig für $\varepsilon > 0, \theta \in \Theta$ beschränkt. Deswegen erfüllt die Amplitude die Abschätzung

$$|a_0|\exp(-\varepsilon|\theta|) \leq C|\theta|^{\mu-\rho}$$

gleichmäßig in Bezug auf $\varepsilon > 0$. Wir können auch die Ableitungen von a_0 gleichweise abschätzen und bekommen, daß die Funktion a_0 die Ungleichungen (1.3) mit $\mu - \rho$ statt μ gleichmäßig in Bezug auf $\varepsilon > 0$ erfüllt. Dabei gilt $L(a) \in S_\rho^{\mu-\rho}$,. Die Funktion $\operatorname{div}(L)$ ist homogene des Grades -1 und die Funktion $L(1-\chi)$ hat ein kompakes Träger. Falls die Ungleichung $\mu + N < \rho$ erfüllt, konvergieren die Integralen

$$\int \exp(\imath\phi_\varepsilon)|a_j|d\theta,\ j = 0, 1, ..., n$$

gleichmäßig in Bezug auf ε. Man kann zu Grenze in (1.5) übergehen. Deswegen bekommen wir endlich die Ungleichung

$$|\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\Theta\int_X \exp(\imath\phi_\varepsilon)a(x,\theta)\psi(x)dxd\theta| \le C\left[\int|\psi|dx+\sum_1^n\int\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right|dx\right].$$

Es folgt daraus, daß $I(\phi,a)$ eine Distribution der Ordnung ≤ 1 ist.
Wir wenden dieselbe Verfahren auf jede Glied (1.5) an und bekommen eine Darstellung

$$I(\phi_\varepsilon,a)(\psi)=\int\exp(\imath\phi)\sum_{ij}\left[a_{00}\psi+\sum a_{0j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+\sum a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}\right]dxd\theta.$$

wobei gehören die Amplituden a_{ij} zu $S_\rho^{\mu-2\rho}$ und erfüllen sie (1.3) gleichmäßig in Bezug auf ε. Wir wiederholen diese Verfahren k mal um die Ungleichung $\mu+N<k\rho$ erreichten.⊡

Hilfsatz 1 *Es gibt ein glattes Feld L des Grades -1 auf $X\times\Theta$, so daß $L(\phi)=-\imath$ gilt.*

Beweis. Wir setzen

$$L=\sum b_j\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum c_i\frac{\partial}{\partial\theta_i}, \tag{1.7}$$

wobei

$$b_j=-\frac{\imath}{\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x_j},\ c_i=-\frac{\imath|\theta|^2}{\nu}\frac{\partial\phi}{\partial\theta_i},\quad \nu=\sum\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right|^2+|\theta|^2\sum\left|\frac{\partial\phi}{\partial\theta_i}\right|^2.$$

gilt und verschwindet der Nenner ν nirgends. ⊡

Hilfsatz 2 *Seien V eine beliebige homogene Feld auf $X\times\Theta$ des Grades -1 und Ω eine beliebige glatte Form des höchsten Grades auf $X\times\Theta$, die verschwindet außer $K\times\Theta$ für eines Kompaktum $K\subset X$. Dann gilt die Gleichung*

$$\int L_V(\omega)=0 \tag{1.8}$$

falls Ω und $L_V\Omega$ summierbar sind.

Das Symbol L_V bedeutet die Lie Ableitung des Felds V entlang (siehe Kap.4).
Beweis. Wir setzen zuerst voraus, daß die Form Ω hat einen kompakten Träger und bestätigen die Gleichung

$$\int \Phi_t^*(\omega) = \int \omega \tag{1.9}$$

für kleine t, wobei ist Φ_t der durch das Feld V erzeugender Flüß. Tatsächlich ist das Integral einer Form des höchsten Grades invariant in Bezug auf beliebigen Isomorphismus der Mannigfaltigkeit. Wir differenzieren (1.9) und bekommen (1.8). Für gegebene Form Ω setzen wir $\Omega_k = \chi_k \Omega$, wobei $\chi_k(\theta) = \chi(k^{-1}\theta)$ gilt. Offenbar strebt das Integral $\int \Omega_k$ gegen $\int \Omega$. Wir berechnen

$$0 = \int L_V(\Omega_k) = \int V(\chi_k)\Omega + \int \chi_k L_V(\Omega).$$

Dabei gilt $V(\chi_k) = O(k^{-1})$ gleichmäßig auf $X \times \Theta$, weil die Funktionen $V(\theta_i)$, $i = 1, ..., N$ homogene des Grades -1 sind. Deswegen strebt das Integral $\int V(\chi_k)\Omega$ gegen Null. Wir schließen daß auch $\int \chi_k L_V(\Omega) \to 0$. $\boxdot$
Wir substituiren $\Omega = fg dx \wedge d\theta$ in (1.8) und bekommen

$$\int V(f) g dx d\theta = \int f V^*(g) dx d\theta \tag{1.10}$$

wobei gilt

$$V^* = -V - \operatorname{div} V,\ \operatorname{div} V \equiv \frac{L_V(dx \wedge d\theta)}{dx \wedge d\theta} = \sum \frac{\partial b_j}{\partial x_j} + \sum \frac{\partial c_i}{\partial \theta_i}$$

Dabei prüfen wir die letzte Gleichung mit Hilfe der Leibnitzsche Formel und des Satzes 4.3.1:

$$L_V(fg dx \wedge d\theta) = V(f) g dx \wedge d\theta + f V(g) dx \wedge d\theta + fg L_V(dx \wedge d\theta)$$

$$L_V(dx \wedge d\theta) = d(V \vee (dx \wedge d\theta)) = \sum_j (-1)^{j-1} d(b_j dx_1 \wedge ...\hat{j}... \wedge dx_n \wedge d\theta) +$$

$$\sum_i (-1)^{n+i-1} d(c_i dx \wedge d\theta_1 \wedge ...\hat{i}... \wedge d\theta_N) = \operatorname{div} V dx \wedge d\theta.$$

$\boxdot$
Bemerkung. Man kann statt die Folge $E_\varepsilon = \exp(-\varepsilon|\theta|)$ andere ähnliche

folge der Funktionen für Regularisierung des Integrals (1.1) benutzen. Z.B. taugt die Folge $E_\varepsilon = \exp(-\varepsilon|\theta|^2)$ auch. Dabei bleibt der Limes (1.4) fest.
Nichtentartete Phase Sei ϕ eine Phase in $X \times \Theta$. Wir betrachten die Menge

$$C(\phi) = \{(x,\theta) : d_\theta\phi = 0, \iff \frac{\partial\phi}{\partial\theta_1} = \ldots \frac{\partial\phi}{\partial\theta_N} = 0\}.$$

Das ist die kritische Menge der Phase auf jeder Faser $p^{-1}(x)$ des Bündels $p : X \times \Theta \to X$.
Definition. Die Phase ϕ heißt *nichtentartete*, falls sie eine glatte homogene Funktion des Grades 1 ohne kritischen Punkten ist und die Formen

$$d\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta_1}\right), \ldots, d\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta_N}\right)$$

linear unabhängig in jedem Punkt der Menge $C(\phi)$ sind. Sei ϕ nichtentartete Phase. Die kritische Menge $C(\phi)$ ist eine kegelsche Untermannigfaltigkeit in $X \times \Theta$ von Dimension $n + N - N = n$. Das foglt aus dem Implizitfunktionssatz. Wir betrachten die Abbildung der Bündel

$$\phi_* : C(\phi) \to T^*(X), \quad (x,\theta) \mapsto (x, d_x\phi(x,\theta)).$$

und die Abbildung $X \to T^*(X)$, $x \mapsto (x, 0)$.

Aussage 5.1.1 *Für beliebige nichtentartete Phase ϕ ist die Abbildung*

$$\phi_* : C(\phi) \to T^*(X) \setminus X$$

gut bestimmt und homogene des Grades 1. Dabei ist das Differential $D\phi_*$ eine Bijektion in jedem Punkt.

Beweis. Die Phase hat kein kritischen Punkt, deswegen verschwindet die Form $d_x\phi$ nirgends auf $C(\phi)$. Die zweite Behauptung bedeutet die Gleichung $d_x\phi(x, t\theta) = t d_x\phi(x,\theta)$, $t > 0$. Sie gilt, weil ϕ und schließlich die Form $d_x\phi$ homogene des Grades 1 ist. Die letzte Behauptung ist equivalent zur folgende Implikation:

$$v \in T_{(x,\theta)}(C(\phi)),\ D\phi_*(v) = 0 \implies v = 0.$$

Wir schreiben $v = t + \tau$, $t \in T_x(X)$, $\tau \in T_\theta(\Theta)$ und rechnen

$$0 = D\phi_*(v) = \left(t; v\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right), \ldots, v\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)\right) \in T_\omega(T^*(X)) \tag{1.11}$$

wo bezeichnen wir $\omega = (x, d_x\phi(x,\theta))$ und benutzen ein natürliches Isomorphismus $T_\omega(T^*(X)) \cong T_x(X) \oplus T_x^*(X) \cong T_x(X) \oplus \mathbb{R}^n$. Wir schließen aus (1.11), daß $t = 0$ und

$$\tau\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) = 0,\ j = 1, ..., n \tag{1.12}$$

gelten. Jetzt bedeutet die Inklusion $\tau \in T(C(\phi))$ die folgende System

$$\tau\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta_i}\right) = 0,\ i = 1, ..., N.$$

Diese Gleichungen zusammen mit (1.12) impliziert, daß $\sum \tau_i d(\partial\phi/\partial\theta_i) = 0$, wobei $\tau = \sum \tau_i \partial/\partial\theta_i$ gilt. Darum gilt $\tau = 0$, weil die Phase nichtentartete ist. $\boxdot$

Aussage 5.1.2 *Die Menge $\Lambda(\phi) = \phi_*(C(\phi))$ ist eine kegelsche Lagrangesche Mannigfaltigkeit, falls die Bedingung $\phi_*(p) \neq \phi(p')$ für beliebige $p \neq p'$ erfüllt.*

Beweis. Das Bild des jeden kleinen Stück $C' \subset C(\phi)$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit $\Lambda' = \phi_*(C')$ der Dimension n. Das folgt aus Aussage 5.1.2 dank dem Implizitfunktionssatz. Nach der obigen Voraussetzung ist die Vereinigung $\Lambda(\phi)$ der Stücke Λ' auch eine Mannigfaltigkeit. Jetzt prüfen wir, daß $\alpha|\Lambda(\phi) = 0$ gilt. Sei w ein tangentiales Vektor auf $\Lambda(\phi)$ in einem Punkt (x, ξ). Dabei haben wir $\xi = d_x\phi(x,\theta)$ für einen Punkt $(x,\theta) \in C(\phi)$ und gilt $w = D\phi_*(v)$ für eines Vektor $v \in T_{(x,\theta)}(C(\phi))$. Die letzte Inklusion bedeutet, daß $v(f) = 0$ für beliebige Funktion $f \in \mathcal{I}$, wo bezeichnet $\mathcal{I}$ der Raum (das Ideal) der Funtkionen $f \in \mathcal{E}(M)$ die verschwinden auf $C(\phi)$. Wir berechnen

$$\alpha(w) = \xi dx(t) = d_x\phi(t) = t(\phi) = v(\phi)$$

wo bedeutet t die Projektion des Vektors w auf X. Es folgt aus die Beziehung $\pi \cdot \phi_* = p$, daß t gleich die Projektion des Vektors v ist. Die Gleichung $t(\phi) = v(\phi)$ erfüllt wegen die Gleichung $(v - t)\phi = \sum c_i \partial\phi/\partial\theta_i = 0$. Endlich bemerken wir die Eulersche Indentität $\phi = \sum \theta_i \partial\phi/\partial\theta_i$, die impliziert daß ϕ zum Raum $\mathcal{I}$ gehört. Deswegen gilt die Gleichung $v(\phi) = 0$. $\boxdot$

5.2 Wellenfront der Distribution

Definition. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ heißt *glatte* in einem Punkt $x \in X$, falls u mit einer beliebig oft differenziebare Funktion f in einer Umgebung von x zusammenfällt. Die Menge der Punkten x, so daß u nicht glatte ist, heißt der Singularträger der Distribution u. Man beteichnet der Singularträger durch $\operatorname{ssupp} u$. Das ist eine abgeschloßene Menge. Insbesondere ist der Singularträger leer dann und nur dann, wenn u eine glatte Dichte ist.
Mit Hilfe des Begriffs der Wellenfront kann man ein "Mikroanalisys" der Singularität einer Distribution durchführen.
Definition. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $u \in \mathcal{D}'(X)$ und $\omega = (x_0, \xi_0)$ ein Punkt in $T^*(X) \setminus X$. Wir sagen, daß die Distribution u im Punkt ω *mikroglatte* ist, falls für eine Umgebung X' des Punktes x_0 eine kegelsche Umgebung U des Punktes ξ_0 und beliebige Funktion $h \in \mathcal{D}(X')$ die Fouriertransformation

$$F(hu)(\xi) = u(h(x)\exp(-2\pi\imath\xi x))$$

schnell auf Unendlichkeit verschwindet. Das bedeutet, daß die Abschätzung

$$F(hu) = O(|\xi|^{-q}),\ |\xi| \to \infty,\ \xi \in U \tag{2.1}$$

für jede q gilt. Die Distribution u ist auch in jedem Punkt $\omega' \in X' \times U$ mikroglatte. Daher ist die Menge G der Punkten, wo u mikroglatte ist, eine offene Untermenge von $T^*(X)$. Die Ergänzung

$$WF(u) = T^*(X) \setminus (G \cup X)$$

heißt *Wellenfront* der Distribution u. Das ist eine abgeschloßene kegelsche Menge.

Aussage 5.2.1 *Das Bild der Projektion $\pi : WF(u) \to X$ fällt mit* $\operatorname{ssupp} u$ *zusammen.*

Beweis. Für eine beliebigen Funktion $h \in \mathcal{D}(X \setminus \operatorname{ssupp} u)$ ist das Produkt hu eine beliebig oft differenzierbare Dichte. Deswegen erfüllt (2.1) für ganze $U = \mathbb{R}^{n*}$. Schließlich ist u mikroglatte in jedem Punkt (x, ξ), $x \in X \setminus \operatorname{ssupp} u$. Umgekehrt, sei $x_0 \in X \setminus \pi(WF(u))$, d.h. u ist in jedem Punkt (x_0, ξ) mikroglatte. Wir prüfen, daß u in x_0 glatt ist. Es gibt für jede ξ eine kegelsche Umgebung $U(\xi)$, wo (2.1) gilt. Die Menge $\{U(\xi)\}$ ist eine kegelsche Überdeckung von $\mathbb{R}^{n*} \setminus 0$. Man kann eine endliche Überdeckung $\{U(\xi_j),\ j =$

$1, ..., J\}$ wählen. Seien X_j, $j = 1, ..., J$ die entsprechende Umgebungen des Punktes x_0. Der Durchschnitt $X' = \cap X_j$ ist auch eine Umgebung. Schließlich gilt (2.1) für jede $h \in \mathcal{D}'(x')$ in ganze Raum $\mathbb{R}^{n*}$.$\boxdot$

Beispiel 2. Für beliebige Mannigfaltigkeit X und $y \in X$ gilt $WF(\delta_y) = T_y^*(X)$.

Beispiel 3. Sei f eine holomorphe Funktion in einem Streifen $0 < y < y_o$ in komplexe Ebene und $[f(x + 0\imath)dx] \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ihr Grenzwert auf reelle Achse (siehe Ab.3.3). Die Inklusion

$$WF([f(x + 0\imath)dx]) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

gilt. Ähnlich gilt $WF([g(x - 0\imath)dx] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*$ für beliebige holomorphe Funktion g in einem Streifen $y_o < y < 0$, die der Grenzwert auf reelle Achse hat. Dabei ist der Grenzwert glatt in einem offenen Interval $I \subset \mathbb{R}$, falls die Funktion f, entsprechend g eine analytische Fortsetzung durch I hat. Insbesondere gilt

$$WF((x \pm 0\imath)^\lambda = \{0\} \times \mathbb{R}_\pm^*, \ \lambda \in \mathbb{C}, \ \lambda \neq 0, 1, 2, ...$$

Beispiel 4. Für die Ebenewelle $(\omega x + 0\imath)^\lambda$, $\omega \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ in $X = \mathbb{R}^n$ (siehe Ab.3.8) ist die Wellenfront gleich $\{0\} \times \{t\omega, t \in \mathbb{R}_+\}$.

Beispiel 5. Für beliebige n gilt

$$WF(|x|^\lambda) = T_0^*(\mathbb{R}^n), \ \lambda \neq 0, 2, 4, ...$$

Der Satz 3.8.1 entspricht der Zerlegung der Faser $T_0^*(\mathbb{R}^n)$ in Strahlen $\{t\omega, t \in \mathbb{R}_+\}$, wobei ω über die Einheitskugel läuft.

Satz 5.2.1 *Seien ϕ eine nichtentartete Phase und $a \in S_\rho^\mu$. Wir haben $WF(I(\phi, a)) \subset \Lambda(\phi)$.*

Beweis. Sei $\omega = (x_0, \xi_0)$ einer Punkt außerhalb $\Lambda(\phi)$. Wir beweisen, daß die Funktion (ϕ, a) mikroglatte in ω ist. Es gibt eine Umgebung X' des Punktes x_0 und eine kegelsche Umgebung U des Punktes ξ_0, so daß der Schluß der Menge $X' \times U$ leer Durchschnitt mit $\Lambda(\phi)$ hat. Wir prüfen (2.1) für beliebige q und $h \in \mathcal{D}(X')$. Dafür benutzen wir eine vollständige Induktion in Bezug auf reelle μ und natürliche q.

Wir nehmen zuerst ab, daß $\mu + N + q < 0$ gilt. Dann gilt die Gleichung $v(I(\phi, a)) = I(\phi, b)$ für beliebige glatte Feld v auf $\mathbb{R}^n$, wobei $b = \imath v(\phi)a + v(a)$

gilt. Das Produkt $v(\phi)a$ gehört zur $S_\rho^{\mu+1}$ und die Amplitude $v(a)$ zur engeren Klasse $S_\rho^{\mu+1-\rho}$. Folglich gilt $b \in S_\rho^{\mu+1}$ und auch

$$D^i I(\phi, a) = I(\phi, a_i),\ a_i \in S_\rho^{\mu+q}$$

für beliebige $i = (i_1, ..., i_n)$, $|i| = i_1 + ... + i_n = q$. Die rechte Seite ist eine Distribution ist von Ordnung ≤ 0 (siehe den Anfang der Ab.5.1). Das gilt auch für die Distribution $D^i(hI(\phi, a))$ für beliebige $h \in \mathcal{D}(X')$. Wir betrachten die folgende Gleichung für $I = I(\phi, a)$:

$$D^i(hI)(\exp(-2\pi\imath\xi x)) = (-1)^{|i|} I(hD^i(\exp(-2\pi\imath\xi x)) =$$
$$(2\pi\imath)^{|i|}\xi^i hI(\exp(-2\pi\imath\xi x)) = (2\pi\imath)^{|i|}\xi^i F(hI)(\xi).$$

Die linke Seite ist beschränkt gemäß (1.2). Das impliziert die Abschätzung (2.1) für $u = I(\phi, a)$.
Jetzt setzen wir voraus, daß die Abschätzung (2.1) für $\mu, q-1$ und für $\mu-\rho, q$ gilt und beweisen sie für μ, q. Wir schreiben

$$F(hI) = \int_{X'}\int_\Theta \exp(\imath\Phi(x, \theta, \xi))a(x, \theta)(1 - \chi(\theta))h(x)d\theta dx, \qquad (2.2)$$

wobei $\Phi(x, \theta, \xi) = \phi(x, \theta) - 2\pi\xi x$ gilt und das Faktor $\exp(-\varepsilon|\theta|)$ für Knappheit weglasst wird. Die Phase Φ ist homogene des Grades 1 in Bezug auf Veränderlichen (θ, ξ). Wir erbauen eines Feld V in $X' \times \Theta \times \mathbb{R}^{n*}$ des Grades -1, so daß $V(\Phi) = -\imath$. Wir suchen V in der Form (1.7), wobei gilt

$$b_j = -\frac{\imath}{\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j},\ c_i = -\frac{\imath|\theta|^2}{\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_i}, \quad \nu = \sum\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right|^2 + |\theta|^2\sum\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_i}\right|^2.$$

Die Funktion $\nu = \nu(x, \theta, \xi)$ verschwindet in dem Schlüß der Menge $X' \times \Theta \times U$ nicht. In der Tat impliziert die Gleichung $\partial\Phi/\partial\theta = 0$, daß (x, θ) zur Menge $C(\phi)$ gehört. Im vorliegenden Fall verschwindet die Form $d_x\Phi(x, \theta, \xi) = d_x\phi(x, \theta) - 2\pi\xi$ nicht. Das folgt aus der Wahl von Umgebungen X', U. Schließlich sind die Koeffizienten b_j, c_i glatte und homogene im Gebiet $|\theta| + |\xi| > 0$, wobei gilt $\deg b_j = -1$, $\deg c_i = 0$, $\deg \operatorname{div}(V) = -1$. Wir stellen $\exp(\imath\Phi) = V(\exp(\imath\Phi))$ in (2.2) unter und integrieren teiweise (siehe (1.10)):

$$F(hI) = \int\int \exp(\imath\Phi)\left[-V(ha)(1-\chi) + ah(V(\chi) - \operatorname{div}(V))\right] d\theta dx. \quad (2.3)$$

Hier haben wir $ha \in S_\rho^\mu$ und $V(a) \in S_\rho^{\mu-\rho}$, weil V eines Feld des Grades -1 ist. Auch gilt $\operatorname{div}(V)a \in S_\rho^{\mu-1}$. Schließlich lässt die linke Seite die Abschätzung (2.1) nach der Induktionsvoraussetzung. $\boxdot$

5.3 Lagrange-Distributionen

Definition. Seien X eine Mannigfaltigkeit und Λ eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit in $T^*(X)$. Eines Element $u \in \mathcal{D}'(X)$ heißt *Lagrange* Λ-Distribution (oder einfach Λ-Distribution), falls es eine Darstellung

$$u = \sum I(\phi_j, a_j) + w \tag{3.1}$$

mit der folgenden Eigenschaften zulässt:

I ist ϕ_j für jede j eine nichtentartete Phase,

II gilt $\Lambda(\phi_j) \subset \Lambda$ für jede j,

III gehört jede Amplitude a_j zur Klasse $S^{\mu_j}(X \times \mathbb{R}^{N_j})$, d.h. a_j asymptotisch homogene ist;

IV ist die Summe (3.1) lokal endlich auf X;

V ist w eine glatte Dichte auf X.

Eine verallgemeinerte Funktion w wird Λ-Funktion bennent, falls das Produkt $u = wdV$ mit einem glatten Maß dV eine Λ-Distribution ist.
Für einen Punkt $x \in X$ bennent man die Zahl

$$\nu = \max\{\mu_j + \frac{N_j}{2}, \, x \in \operatorname{supp} I(\phi_j, a_j)\}$$

die Ordnung der Lagrange-Distribution (3.1) in x. Wir erklären in Ab.5.4, warum benutzt man die Summe $\mu_j + N_j/2$ um die Ordnung der Fourier-Distribution zu rechnen.
Beispiel 6. Sei δ_Y die Delta-Distribution auf einer abgeschloßenen Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$. Sie ist eine Λ-Distribution für $\Lambda = N_Y^*$. Mit Hilfe einer glatten Zerlegung der Einheit kann man diese Behauptung zur Mannigfaltigkeit X' reduzieren, wobei ist X' eine kleine Karte in Umgebung eines Punkts $x_0 \in Y$. Mit Hilfe einer Variablensubstitution führt mann die Behauptung zum Fall $Y = \{x_1 = ... = x_k = 0\}$, $1 \leq k \leq n$ zurück. Jetzt schreiben wir

$$\delta_Y = \int \exp(2\pi\imath\theta x')d\theta = I(\phi, 1), \; \phi(x, \theta) = \theta x' = \sum_1^k \theta_j x_j$$

Beispiel 7. Wir setzen $X = \mathbb{R}^n$ und $u = I(\phi, a)$, $a \in S^\mu$,

$$\phi(x; \theta_1, \theta_2) = p(\eta, x)\theta_2,\ \eta = \frac{\theta_1}{\theta_2},$$

wobei

$$p(\eta, x) = \eta^{n+1} + x_1\eta^{n-1} + ... + x_{n-1}\eta + x_n$$

eines Polynom von η ist. Im kegelschen Gebiet $\Theta = \{\theta_2 \neq 0\}$ ist das System $\partial\phi/\partial\theta_1 = \partial\phi/\partial\theta_2 = 0$ zum System $p = \partial p/\partial\eta = 0$ equivalent. Deswegen gilt

$$C(\phi) = \{p = \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0,\ \theta \in \Theta\}. \tag{3.2}$$

und $d_x\phi(x, \theta) = \theta_2 d_x p(x, \theta) = \theta_2(\eta^{n-1}, ..., \eta, 1)$ Daher gilt die Gleichung $\Lambda(\phi) = p_*(C(\phi))$ und schlißlich die Inklusion $\pi(\Lambda(\phi)) \subset \operatorname{Diskr} p$, wobei $\operatorname{Diskr} p$ die reelle diskriminante Menge des Polynoms p bezeichnet, d.h. die Menge der Punkten x so, daß das Polynom $p = p(\eta, x)$ zumindest eine reelle mehrfache Nullstelle η hat. Phase ist in $X \times \Theta$ nichtentartete. Schließlich gilt die Inklusion

$$\operatorname{ssupp} u \subset \operatorname{Diskr} p.$$

für beliebige Λ-Distribution u.
Sei $n = 1$. Wir haben $\operatorname{Diskr} p = \{x_1 = 0\}$ und $\phi(x, \theta) = (\eta^2 + x_1)\theta_2$. Wir wenden der Satz 2.5.1 für das Fourier-Distribution u an und bekommen eine Entwicklung

$$u = u_{-\mu-1/2} + u_{\mu+1/2} + ... + u_{-\mu-1/2+k} + r_k,\ k = 0, 1, ...$$

wo ist u_λ für jede λ eine homogene Distribution des Grades λ und hat das Restglied r_k stetige Ableitungen bis zur Ordnung $k - [\mu]$ (siehe Folgerung 5.4.3).
Insbesondere gilt $u = (c_+ x_+^{-3/2} + c_- x_-^{-3/2} + r_k)dx$ für $a = 1$ mit einigen Konstanten $c_\pm$.
Sei $n = 2$. Dann ist die Menge $\operatorname{Diskr} p$ gleich die Kurve

$$d(x) \equiv 4x_1^3 + 27x_2^2 = 0.$$

Die heißt "Schnabel" (cusp) Kurve. Die Distribution u hat die fogende Entwicklung in der Nähe der Kurve:

$$u = u_{-\mu-3/2}(d)\omega_0 + u_{\mu-1/2}(d)\omega_1 + ... + r_k$$

wobei sind $\omega_0, \omega_1, ...$ glatte Dichten und ist u_k für beliebige k eine homogene verallgemeinerte Funktionen auf $\mathbb{R}$ des Grades k. Das Restglied ist glatt wie nach oben. Das gilt außerhalb der Spitze $(0,0)$ der Schnabel (siehe Folgerung 5.4.3). Die Singularität in der Spitze ist mehr kompliziert.
Sei $n = 3$. Dann heißt der Menge $\operatorname{Diskr} p$ der "Schwalbeschwanz".
Eigenschaften. Wir bennenen durch $\mathcal{D}'_\Lambda$ die Menge der Λ-Distributionen für eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit Λ. Das ist einer Vektorraum. Für beliebige $u \in \mathcal{D}'_\Lambda$ ist eine beliebige Ableitung $D^i u$ und das Produkt hu, $h \in \mathcal{E}(X)$ auch Λ-Distributionen. Die Inklusion $WF(u) \subset \Lambda$ folgt aus dem Satz 5.2.1. Die Vereinugung der Mengen $WF(u)$ ist in der Tat gleich Λ.

Aussage 5.3.1 *Sei Λ eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit und $\lambda \in \Lambda$. Es gibt eine nichtentartete Phase ϕ so, daß $\lambda \in \Lambda(\phi) \subset \Lambda$ gilt.*

Beweis. Wir bezeichnen

$$r(\lambda; \Lambda) = \operatorname{rank} d\pi : T_\lambda(\Lambda) \to T_x(X),\ x = \pi(\lambda). \tag{3.3}$$

Nach dem Satz 4.6.2 es gibt eine erzeugende Funktion für Λ im Punkt λ. Sie hat die folgende Form $f(x', \xi'') = -\sum_{r+1}^n \xi_j x_j(x', \xi'')$, mit die Bezeichnungen $x' = (x_1, ..., x_r)$, $\xi'' = (\xi_{r+1}, ..., \xi_n)$, $r = r(\lambda)$ Wir setzen

$$\phi(x, \theta) = \theta x'' + f(x', \theta) = \sum_{r+1}^n \theta_j (x_j - x_j(x', \theta)),\ \theta = (\theta_{r+1}, ..., \theta_n)$$

Das ist eine homogene Funktion des Grades 1 in Bezug auf Veränderlichen θ, wobei

$$C(\phi) = \left\{ x'' = -\frac{\partial f}{\partial \theta} \right\}$$

gilt und

$$d_x \phi = (d_{x'} f, d_{x''} f) = \left(\frac{\partial f(x', \theta)}{\partial x'}, \theta \right).$$

Es folgt daraus, daß durch f erzeugende Mannigfaltigkeit ist gleich Λ in einer Umgebung von λ. $\boxdot$

Satz 5.3.1 *Für eine beliebige Lagrangesche Mannigfaltigkeit Λ und einen beliebigen Punkt $\lambda \in \Lambda$ gibt es eine Distribution $u \in \mathcal{D}'_\Lambda$ so, daß $\lambda \in WF(u)$.*

Entwurf des Beweis. Wir wählen eine Phase wie in nexter Aussage. Sei (x_0, θ_0) der Punkt, der im λ umwandelt. Dann gilt $\lambda \in WF(I(\phi, a))$ für eine beliebige glatte homogene Amplitude $a = a(x, \theta)$ so, daß $a(x_0, \theta_0) \neq 0$. Im Falle $r(\lambda) = \dim X - 1$ benutzen wir den Beispiel 2 und setzen $u = h\delta_Y$, wobei gilt $Y = \pi(\Lambda')$ für einer Umgebung Λ' des Punktes λ in Λ. Dabei ist Y eine abgeschloßene Hyperfläche in einer Umgebung X' des Punktes x und $h \in \mathcal{D}(X')$. Das ist einfach zu prüfen, daß $\lambda \in WF(u)$, falls $h(x) \neq 0$ gilt. $\boxdot$

5.4 Berechnung der Fourier-Distributionen

Integrierung über die Strahlen. Man kann ein beliebiges Fourier-Distribution durch die Integration über die Strahlen im Hilfsraum Θ faktorisieren. Diese Integration ist in der Tat eine Fouriertransformation. Darum kann man das Fourier-Distribution umwandeln. Wir führen eines Skalarprodukt in $\Theta = \mathbb{R}^N$ ein und bezeichnen durch Σ die Einheitsphäre.

Aussage 5.4.1 *Seien ϕ eine beliebige nichtentartete Phase und a eine beliebige glatte homogene Amplitude des Grades $\mu - N$. Dann gilt die Gleichung*

$$I(\phi, a) = \imath^{-\mu}\Gamma(\mu) \int_{\Sigma)} (\phi(x, \omega) + 0\imath)^{-\mu} a(x, \omega) d\omega, \tag{4.1}$$

wo bedeutet $(\phi + 0\imath)^{-\mu}$ das Urbild der Funktion $(t + 0\imath)^{-\mu}$ bei der Abbildung $t = \phi$.

Beweis. Wir rechnen das innere Integral in (1.4) mit Hilfe der Polarkoordinaten $\rho = |\theta|, \omega = |\theta|^{-1}\theta$. Wir haben $d\theta = \rho^{N-1} d\rho d\omega$ für die Volumenformen $d\theta$, $d\omega$ auf Θ und S. Folglich gilt die Gleichung

$$I(\phi_\varepsilon, a) = \int_\Sigma a(x, \omega) \left(\int_0^\infty \exp(\imath\rho(\phi_\varepsilon(x, \omega))\rho^{\mu-1} d\rho \right) d\omega.$$

mit der Bezeichnung $\phi_\varepsilon = \phi + \varepsilon\imath$. Das inneres Integral ist gleich $\Gamma(\mu)(\imath\phi_\varepsilon)^{-\mu}$ nach Kapitel 3,(5.4). Für $\varepsilon \to 0$ bekommen wir (4.1). $\boxdot$

Folgerung 5.4.1 *Für beliebige ganze Zahl $\mu > 0$ gilt*

$$I(\phi, a) + I(-\phi, (-1)^\mu a) = 2\imath^{-\mu}\Gamma(\mu) \int_\Sigma \phi(x,\omega)^{-\mu} a(x,\omega) d\omega \tag{4.2}$$

$$I(\phi, a) - I(-\phi, (-1)^\mu a) = -2\pi\imath^{-\mu+1}\Gamma(\mu) \int_\Sigma \delta^{(\mu-1)}(\phi(x,\omega)) a(x,\omega) d\omega. \tag{4.3}$$

Für beliebige halbganze Zahl μ gilt

$$I(\phi, a) + I(-\phi, (-1)^\mu a) = 2\imath^{-\mu}\Gamma(\mu) \int_\Sigma \phi(x,\omega)_+^{-\mu} a(x,\omega) d\omega \tag{4.4}$$

Beweis. Für halbganze Zahl μ benutzen wir die Formel

$$(t + 0\imath)^{-\mu} + (-1)^{-\mu}(-t + 0\imath)^{-\mu} = 2t_+^{-\mu}.$$

Wir verwenden das Urbildoperation bei der Abbildung $t = \phi$ und integrieren gegen die Dichte $ad\theta$. Das gibt (4.3). Für ganze Zahl $\mu > 0$ wenden wir die Formel (3.4) von Kapitel 3 und die Ableitungen dieser Formel. ⊡
Die Lagrange-Distributionen (4.2)-(4.4) heißen *paarige* Fourier-Distributionen.
Verminderung des Hilfsraums. Man kann beliebiges Fourier-Distribution zum einem Integral $I(\phi, a)$ reduzieren so, daß Differenzial $d_\theta^2\phi$ in einen gegebenen Punkt veschwindet. Sei u und v einige Distributionen und Y eine offene Menge in X. Wir schreiben $u = v \pmod{\mathcal{E}(Y)}$, falls die Differenz $u - v$ eine glatte Dichte in Y ist.

Satz 5.4.1 *Für eine beliebige nichtentartete Phase ϕ und einen beliebigen Punkt $\lambda \in \Lambda(\phi)$ gilt die Ungleichung $N \geq n - r$ mit $r = r(\lambda, \Lambda(\phi))$. Es gibt eine nichtentartete Phase ψ auf $X' \times Z$, $\dim Z = n - r$, die besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(i) X' ist eine Umgebung des Punktes x_0;

(ii) $\Lambda(\psi) = \Lambda(\phi)$ gilt in einer Umgebung von λ.

(iii) Es gibt eine kegelsche Umgebung $X' \times \Theta'$ des Punktes $(x_0, \theta_0) = \phi_*^{-1}(\lambda)$ so, daß für eine beliebige Amplitude $a \in S^\mu(X' \times \Theta)$ so, daß $\operatorname{supp} a \subset X' \times \Theta'$ gibt es eine Amplitude $b \in S^\nu(X' \times Z)$ so, daß

$$I(\phi, a) = I(\psi, b) \pmod{\mathcal{E}(X')} \quad \nu + \frac{n-r}{2} = \mu + \frac{N}{2}. \tag{4.5}$$

gilt.

Beweis. Sei s der Rang der quadratische Form $H = \mathrm{Hess}_\theta\, \phi(x_0, \theta_0)$. Wir finden lineare Koordinaten $\theta = (\theta_1, ..., \theta_N)$ in Θ, die diagonalisieren die Form H, wobei

$$\frac{\partial^2 \phi(x_0, \theta_0)}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \neq 0, \quad \text{nur für} \quad i = j = 1, ..., s \tag{4.6}$$

gilt. Wegen (4.6) kann man mit Hilfe des Implizitfunktionsatzes die Lösungen $\theta_1 = \eta_1(x, \zeta), ..., \theta_s = \eta_s(x, \zeta)$ des Systems

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta_1} = ... = \frac{\partial\phi}{\partial\theta_N} = 0 \tag{4.7}$$

finden. Wir bezeichnen $\eta = (\theta_1, ..., \theta_s)$; $\zeta = (\theta_{s+1}, ..., \theta_N)$. Die Abbildung $\eta = \eta(\zeta)$ ist im Raum $X' \times Z$ bestimmt, wobei X' eine Umgebung des Punktes x_0 und Z eine kegelsche Umgebung des Punktes $\zeta(\theta_0)$ ist. Wir haben dabei $\zeta(\theta_0) \neq 0$, sonst gehörte der Strahl $\eta = t\eta(\theta_0), t > 0$, $\zeta = 0$ zu $C(\phi)$. Das widerspricht die Gleichung $\eta = \eta(\zeta)$.

Hilfsatz 3 *Es gilt* $N - s = n - r$.

Beweis. Seien $x_1, ..., x_r$ eines Koordinatensystem in X so, daß die Formen $\pi^*(dx_1), ..., \pi^*(dx_r)$ auf $T_\lambda(\Lambda(\phi))$ unabhängig sind. Die Abbildung $\phi_* : C(\phi) \to \Lambda(\phi)$ ist eine invertierbare Abbildung der Mannigfaltigkeiten, die die Gleichung $\pi \cdot \phi_*(x, \theta) = x$ erfüllt. Dann sind die Formen $p^*(dx_1), ..., p^*(dx_r)$ auch auf $T_{(x_0,\theta_0)}(C(\phi))$ unabhängig. Sie bilden mit der Formen $d\theta_{s+1}, ..., d\theta_N$ ein vollständiges System in $T^*_{(x_0,\theta_0)}(C(\phi))$, weil $d\theta_1, ..., d\theta_s$ abhängig von diese Differentialen sind. Schließlich haben wir die Ungleichung $N - s + r \geq n$. Im Falle $N - s + r > n$ haben wir eine lineare Gleichung

$$\sum_{s+1}^{N} a_j d\theta_j + \sum_{1}^{r} b_i dx_i = 0$$

auf den Raum $T_{(x_0,\theta_0)}(C(\phi))$. Dieser Raum ist gleich den Durchschnitt der Hyperebenen $\mathrm{Ker}\, d(\partial\phi/\partial\theta_i)$, $i = 1, ..., N$ im Raum $T_{(x_0,\theta_0)}(X \times \Theta)$. Daher ist die linke Seite gleich eine Summe $\sum c_i d(\partial\phi/\partial\theta_i)$. Aus (4.6) folgt, daß $a_j = 0$, $j = s + 1, ..., N$. Darum gelten auch $b_i = 0$, $i = 1, ..., r$ dank der Eigenschaft der Koordinaten $x_1, ..., x_r$. Der Hilfsatz ist beweisen.⊡

Wir setzen $\psi(x, \zeta) = \phi(x; \eta(x, \zeta), \zeta)$. Das ist eine nichtentartete Phase in $X' \times Z$ gemäß (4.6). Wir setzen auch $\chi(x, \theta) = \phi(x, \theta) - \psi(x, \zeta)$. Das ist eine glatte homogene Funktion so, daß $\operatorname{rank}\operatorname{Hess}_\eta \chi((x_0,\theta_0) = s$. Das Integral

$$b(x,\zeta) = \int_{\mathbb{R}^s} \exp(\imath\chi(x;\eta,\zeta))a(x;\eta,\zeta)d\eta. \tag{4.8}$$

hat einen Sinn als eine Fourier-Distribution wie in Ab.5.1. Sie wird eine Lösung der Gleichung (4.5). Wir können voraussetzen, daß die Amplitude a homogene des Grades μ ist und führen die Koordinaten $\rho = |\zeta|$, $\omega = \rho^{-1}\zeta$, $\eta' = \rho^{-1}\eta$ in (4.8) ein:

$$b(x,\zeta) = \rho^{\mu+s}\int \exp(\imath\rho\chi(x;\eta',\omega))a'(x;\eta',\omega)d\omega, \tag{4.9}$$

Wir bezeichnen hier $a'(x;\eta',\zeta) = \rho^{-\mu}a(x,\theta)$. Das letzte Integral hat ein groß Parameter ρ und wir wenden der Sattelpunktmethode (Ab.2.5) an. Zuerst finden wir eine glatte Abbildung $\gamma = \gamma(x;\eta',\omega)$ in eine Umgebung des Punktes (x_0,θ_0) so, daß die Jacobische Matrix $J = \partial\gamma/\partial\eta'$ invertierbar ist und die Gleichung

$$\chi(x;\eta,\zeta) = \beta(x;\gamma,\zeta)$$

gilt, wobei $\beta = 1/2\operatorname{Hess}_\gamma \chi(x;\eta(\omega),\omega)$ eine quadratische Form in Bezug auf Koordinaten γ ist. Die Abbildung γ konstruieren wir mit Hilfe der Morse Lemma (Ab.2.6), dabei wenden wir diese Lemma zur Funktion mit Parameter x,ζ an. Dann substituiren wir $\eta' = \eta'(\gamma)$ in (4.8) und bekommen

$$b(x,\zeta) = \rho^{\mu+s}\int \exp(\imath\beta(x;\gamma,\omega))a''(x;\gamma,\omega)d\gamma$$

mit der Bezeichnung $a''(x;\gamma,\omega) = a'(x;\eta'(\gamma),\omega)|J(x;\eta',\omega)|$. Jetzt gibt der Satz 2.5.1 die Darstellung

$$b(x,\zeta) = \rho^{\mu+s/2}\frac{(2\pi)^{\frac{s}{2}}\exp(\frac{\imath\pi\sigma}{4})}{\sqrt{|\det\operatorname{Hess}\beta|}}\sum_{0\le j<q}\frac{1}{j!}\beta^*(\partial/\partial\gamma)^j a''(x;0,\omega)\left(\frac{2\pi\imath}{\rho}\right)^j + r_q(x,\zeta), \tag{4.10}$$

für $q = 0,1,2,...$, wo bezeichet $\sigma = \sigma(\beta)$ die Signature und β^* die duale quadratische Form. Man kann einfach prüfen, daß j-te Glied der Summe gehört zur Klasse $S^{\mu+s/2-j}(X'\times Z)$ für $j = 0,1,...,q-1$ und $r_q = O(\rho^{\mu+s/2-2q})$. Dabei bleibt die letzte Abschätzung fest auch für Ableitungen $L_1\cdot\ldots\cdot L_k b_q$, wobei sind $L_1,...,L_k$ beliebige Felder des Grades 0 auf $X'\times Z$. Deswegen gehört r_q zur Klasse $S_1^{\mu+s/2-2q}$. Schließlich die rechte Seite von (4.10) ist eines

Element von $S^{\mu+s/2}$. $\boxdot$
Bemerkung. Seien $\phi = \phi(x,\theta)$, $\phi'(x,\theta')$ nichtentartete Phasen so, daß $\Lambda(\phi) = \Lambda(\phi')$ in einer Umgebung eines Punktes λ, dabei hängen die beide Phasen von $n - r(\lambda)$ Hilfsveränderlichen. Dann existiert eine glatte homogene Abbildung η des Grades 1 von einer kegelsche Umgebung W des Punktes $\phi_*^{-1}(\lambda)$ auf eine Umgebung W' des Punktes $(\phi')_*^{-1}(\lambda)$ so, daß

$$\psi'(x,\eta(\theta)) = \psi(x,\theta)$$

gilt. Deswegen hat man für eine beliebige Amplitude $a \in S^\mu(X \times \Theta')$ die Vergleichung

$$I(\phi,a) = I(\phi',a') \pmod{\mathcal{E}(X')}$$

in einer Umgebung X' des Punktes $\pi(\lambda)$ gilt. Dabei ist die Amplitude $a \in S^\mu(X \times \Theta)$ durch die Formel

$$a(x,\theta) = a'(x,\eta(\theta)) \left|\det \frac{\partial \eta}{\partial \theta}\right|$$

berechnet. Darum kann man eine beliebige Λ-Distribution u als eine Fourier-Distribution mit einer gegebenen Phase ϕ, die nur von $n-r(\lambda)$ Hilfsveränderlichen abhängt, darstellen: $u = I(\phi,a) \pmod{\mathcal{E}(X')}$. Das ist möglich, falls der Kegel $T_{x_0}(X) \cap \Lambda$ enthält nur einen Strahl $\mathbb{R}_+\xi$.

Folgerung 5.4.2 *Seien Λ eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit und $\lambda = (x_0,\xi_0) \in \Lambda$ ein Punkt so, daß $T^*_{x_0}(X) \cap \Lambda = \mathbb{R}_+\xi_0$ und $r(\lambda) = \dim X - 1$ gelten. Dann hat eine beliebige Λ-Distribution u von Ordnung ν die folgende Darstellung*

$$u = \int_0^\infty \exp(\imath\rho f(x)) a(x,\rho) d\rho dx \pmod{\mathcal{E}} \tag{4.11}$$

in einer Umgebung des Punktes x_0 mit $a \in S^{\nu-1/2}$. Die Phase f ist eine glatte Funktion in X, die auf $\pi(\Lambda)$ verschwindet.

Beweis. Das ist eine Fourier-Distribution mit $N = 1$ mit einer Phase $f(x) = \psi(x,1)$. $\boxdot$

Folgerung 5.4.3 *Unter Bedingungen der vorigen Folgerung hat die Λ-Distribution* (4.11) *von Ordnung ν die folgende Darstellung*

$$u = (f + 0\imath)^{-\nu-1/2} w,\ w = w_0 + f w_1 + ... + f^q w_q + r_q, \tag{4.12}$$

falls $-\nu - \frac{1}{2} \neq 0, 1, 2, ...$ *gilt. Dabei gilt* $w_0(x) = c_\nu a(x, 1)$ *und sind* $w_1, w_2, ...$ *einige glatte Dichten in einer Umgebung des Punktes* x_0*. Das Restglied* r_q *hat stetige Ableitungen von Ordnung* $\leq q$*.*
Im Falle $-\nu - 1/2 = 0, 1, 2, ...,$ *gibt es eine ähnliche Darstellung*

$$u = (f + 0\imath)^{-\nu-1/2} \log(f + 0\imath)w$$

mit einer Dichte w *wie nach oben.*

Beweis. Wir wenden die Formeln Kap.3 (5.4), (5.5) auf (4.11) an. Das gibt uns die Darstellung (4.12). Für besondere Fälle $-\nu - 1/2 = 0, 1, 2, ...$ muss man Fouriertransformation der nichtnormalisierten Hadamardschen Kernes $x_+^\lambda dx$, $\lambda = -1, -2, ...$ berechnen. $\boxdot$
Im allgemeinen hat eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit Λ eine Stratifikation $\Lambda = \cup_0^{n-1} \Lambda_k$ mit abgeschloßenen Straten $\Lambda_k = \{\lambda \in \Lambda, \, r(\lambda) \geq k$. Schließlich gilt die Darstellung $\Lambda = \cup(\Lambda_k \setminus \Lambda_{k+1})$, wobei $F_k = \pi(\Lambda_k) \subset X$, $k = 0, 1, 2, ...$ eine abgeschloßene Menge der Dimension k ist. Insbesondere ist die Menge $F_{n-1} \setminus F_{n-2}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit, eventuell mit einem Selbstdurchschnitt. Das ist der glatte Teil der Front $\pi(\Lambda)$. In einem beliebigen Punkt $x \in F_{n-1}$ hat beliebige Λ-Distribution u die Darstellung von Fogerungen 5.4.2, 5.4.3. Der Schlüß der Menge $F_{n-1} \setminus F_{n-2}$ enthält den singular Teil der Front F_{n-2}. Für einen Punkt $x \in F_{n-2} \setminus F_{n-3}$ braucht man eine Darstellung von Muster (1.1) für u mit einem Hilfsraum Θ der Dimension 2 und so weiter.

5.5 Anwendung zur Radontransformation

Sei E ein Euklidraum der Dimension n, $\tilde{E}$ die Menge der Hyperebenen H in E. Die Radontransformation einer beschränkten Funktion f mit kompakten Träger ist die Funktion

$$Rf(H) = \int_H f dV(H) \tag{5.1}$$

auf $\tilde{E}$, wobei $dV(H)$ die Euklidische Volumenform in H bezeichent. Wir geben eine beliebige Hyperebene in der Form $H = H_{\omega,p} = \{x : \omega x = p\}$ auf, wo gehört ω zum Einheitskugel S in E und läuft p über $\mathbb{R}$. Wir stellen die Euklidische Volumenform folgendeweise $dV = dp \wedge dV(H_{\omega,p})$ dar. Damit können wir die Transformation (5.1) auch für gewöhnliche Dichten fdV bestimmen:

$$R(fdV) = \int_H \frac{fdV}{dp}, \tag{5.2}$$

wo bedeutet der Bruch eine Dichte g so, daß $dp \wedge g = fdV$ gilt.
Man kann die Transformation (5.2) auf Distributionen mit kompaktem Träger fortsetzen. Die Menge $\tilde{E}$ homeomorph zum "Möbius Blatt" $S \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}_2$, wobei die Gruppe $\mathbb{Z}_2$ durch die Involution $(\omega, p) \mapsto (-\omega, -p)$ auf $S \times \mathbb{R}$ dargestellt wird (die Hyperebenen $H_{-\omega,-p}$ und $H_{\omega,p}$ sind identisch). Dabei wird $\tilde{E}$ mit der Struktur der glatte Mannigfaltigkeit ausgestattet. Insbesondere, ist $S' \times \mathbb{R}$ für eine beliebige Halbkugel $S' \subset S$ eine Karte auf $\tilde{E}$.
Sei $\mathcal{D}(\tilde{E})$ der Raum der Grunddichten in $\tilde{E}$. Wir schreiben eine beliebige Grundichte in der Form

$$\rho = \psi d\sigma \wedge dp \in \mathcal{D}(\tilde{E}), \tag{5.3}$$

wo bedeutet $d\sigma, dp$ die Euklidichen Volumenformen in S entsprechend in $\mathbb{R}$. Man setzt das Operator (5.2) auf den Raum $\mathcal{E}(E)'$ der Distributionen Funktion mit kompatken Träger fort:

$$Ru(\rho) = \int_S u(\psi(\omega, \omega x))d\sigma, \quad \rho = \psi d\sigma \wedge dp$$

Dabei ist Ru eines stetiges Funktional auf den Raum $\mathcal{D}(\tilde{E})$ der Grundichten, d.h. Ru ist eine verallgemeinerte Funktion. Die Transformation (5.3) fällt mit (5.2) zusammen, falls u eine gewöhnliche Dichte ist.
Wir benutzen den folgenden geometrische Konstruktion um die Transformation (5.3) zu untersuchen. Für beliebigen Punkt $(x, \xi) \in T^*(E)$ entspricht die Hyperebene $H(x, \xi) \in \tilde{E}$ die enthält den Punkt x und ist zu ξ orthogonal. Diese Hyperebene hat die Koordinaten $\omega_0 = |\xi|^{-1}\xi$, $p_0 = \omega x$. Wir bekommen eines Kovektor im Punkt $H(x, \xi)$ folgendeweise. Die Funktion

$$\tilde{x}(H_{\omega,p}) = p - \omega x$$

auf $\tilde{E}$ verschwindet im Punkt (ω_0, p_0). Wir betrachten ihres Differenzial $d\tilde{x} = dp - xd\omega$ und setzen

$$\mathcal{R}(x, \xi) = (\omega_0, p_0; |\xi| d\tilde{x}).$$

Das ist eine homogene Abbildung der Bündel $\mathcal{R} : T^*(E) \to T^*(\tilde{E})$. Wir bennenen es *geometrische* Radontransformation. Das Bündel $T^*(\tilde{E})$ ist mit einer kanonischen 1-Form $\tilde{\alpha}$ ausstattet, wobei $\tilde{\alpha} = \eta d\omega + \eta_0 dp$ gilt. Dabei sind die Koordinaten $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$ überzählig: für $\eta = c\omega$ verschwindet die Form $\eta d\omega$.

Aussage 5.5.1 *Die Abbildung $\mathcal{R}$ behält die kanonische 1-Form bei, d.h.*

$$\mathcal{R}^*(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

Beweis. Wir haben $\mathcal{R}^*(\tilde{\alpha}) = \eta d\omega + \eta_0 p$, wobei $\eta = -|\xi|x$, $\eta_0 = |\xi|$ die Koeffizienten der Form $d\tilde{x}$ sind. Wir berechnen

$$\eta d\omega + \eta_0 dp = -|\xi| x d\omega + |\xi| d(\omega dx) = |\xi| \omega dx = \xi dx.$$

$\boxdot$

Es folgt daraus, daß die Abbildung $\mathcal{R}$ behält auch die Volumenform bei: $\mathcal{R}^*(\wedge^n d\tilde{\alpha}) = \wedge^n d\alpha$, schließlich ist Abbilding $\mathcal{R}$ invertierbar.

Satz 5.5.1 *Seien Λ eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit in $T^*(E)$, $\tilde{\Lambda} = \mathcal{R}(\Lambda)$ und u eine Λ-Distribution mit kompaktem Träger. Dann ist die Radontransformation Ru eine $\tilde{\Lambda}$-verallgemeinerte Funktion.*
Die ähnliche Behauptung erfüllt für die inverse Radontransformation.

Beispiel 8. Sei u eine Indikatorfunktion eines kompakten Gebiets $G \subset E$ mit glattem Rand ∂G. Die Dichte udV ist eine Λ-Distribution für konormale Bündel $\Lambda = N^*_{\partial G}$. Dann ist das Radontransformierte Ru eine Lagragesche verallgemeinerte Funktion für Lagrangesche Mannigfaltigkeit $\tilde{\Lambda} = \mathcal{R}(N^*_{\partial G}$. Die Inklusion $WF(Ru) \subset \tilde{\Lambda}$ folgt aus dem Satz 5.2.1. In der Tat ist das eine Gleichung.

5.6 Hyperbolische Anfangswertproblem

Wir betrachten eine hyperbolische Differentialgleichung m-te Ordnung im Zeit-Raum $X \times \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^n$

$$P(x, t; D)u \equiv P\left(x, t; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = w \tag{6.1}$$

mit Anfangswerten auf Hyperebene $t = 0$. Wir schreiben $P = p_m + p_{m-1} + ... + p_0$, wobei p_k, $k = 0, 1, ...$ ein homogenes Operator des Grades k ist. Man bennent *Hauptsymbol* des Operators das homogene Polynom $p_m(x,t;\imath\xi,\imath\tau)$. Wir entwickelen das Hauptsymbol in der Form eines Produkt

$$p_m(x,t;\xi,\tau) = \prod_1^m [\tau - \tau_j(x,t;\xi)],$$

wobei $\tau_1, ..., \tau_m$ homogene Funktion von ξ des Grades 1 sind. Das Operator (6.1) heißt *strikt hyperbolish*, falls $\Im\tau_1 = ... = \Im\tau_m = 0$ und $\tau_i \neq \tau_j$, $i \neq j$ für reelle ξ gelten.
Das Anfangswertproblem (Cauchy Probleme) für $t > 0$ ist das folgende:

$$u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), ..., \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}(x,0) = u_{m-1}(x) \qquad (6.2)$$

wo sind $u_0, ..., u_{m-1}$ gegebene Funktionen.
Sei $E_y^j \in \mathcal{D}'(X \times \mathbb{R}_+)$, $j = 0, ..., m-1$ eine Lösung des Anfangswertproblems mit $w = 0$, $u_i = \delta_i^j \delta_y$. Die Folge $E_y^0, E_y^1, ..., E_y^{m-1}$ der Distributionen auf $X \times \mathbb{R}_+ \times X$ heißt das *Grundsystem der Lösungen* der Gleichung (6.1). Man kann das Anfangswertproblem (6.2) mit beliebigen Daten mit Hilfe des Grundsystem lösen (wie für gewöhnliche Gleichung). Auch reduziert das allgemeine Anfangswertproblem zum Fall $w = 0$ nach der Duhamelsche Methode. Dabei kann man das ganze System aus E_y^{m-1} aufführen, falls die Koeffizienten des Operators P von Zeit t unabhängig sind: $E_y^k = q_{m-1-k}(y,D)E_y^{m-1}$, $k < m-1$, wobei q_j eines Differenzialoperator von Ordnung j ist. Die Distribution $E_y = E_y^{m-1}$ heißt die Grundlösung. Die Grundlösung ist eine Lagrange-Distribution. Wir beschreiben diese Lösung in einem allgemeinen Kontext.
Sei $\Lambda \in T^*(X)$ beliebige Lagrangesche Mannigfaltigkeit. Wir betrachten für einen beliebigen Nummer $j, 1 \leq j \leq m$ die Hamiltonische Funktion $h_j(x,t;\tau,\xi) = \tau - \tau_j(x,t,\xi)$ auf $T^*(X \times \mathbb{R}_+)$. Wir "heben" Λ in dem Bündel $T^*(X \times \mathbb{R})$ auf und zwar betrachten wir eine Mannigfaltigkeit

$$W_j = \{(x,0;\xi,\tau_j(x,0)) : (x,\xi) \in \Lambda\}.$$

Sie gehört zur Hyperfläche $h_j = 0$. Jetzt erbauen wir den Hamiltonischen Flüß

$$\frac{dx}{dt} = (h_j)'_\xi, \quad \frac{dt}{dt} = (h_j)'_\tau = 1, \quad \frac{d\xi}{dt} = -(h_j)'_x \quad \frac{d\tau}{dt} = -(h_j)'_t,$$

mit Anfangswerten auf W_j. Wir bezeichnen Λ_j die Vereinigung der Trajektorien. Das ist eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit in $T^*(X \times \mathbb{R})$ gemäßdem Satz 4.5.2. Die Vereinigung $\tilde{\Lambda} = \cup_1^m \Lambda_j$ ist auch eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit, eventuell mit einem Selbstdurchschnitt.

Satz 5.6.1 *Seien $u_0, ..., u_{m-1}$ Λ-Distributionen. Dann gibt es eine Umgebung U der Hyperfläche $X \times 0$ so, daß das Angangswertproblem mit $w = 0$ eine und nur eine Lösung in $\mathcal{D}'(U)$ hat. Dabei ist die Lösung eine $\tilde{\Lambda}$-Distribution in U.*

Für eines globalen Ergebnis braucht man eine weitere Voraussetzung. Sei $(x,t) \in X \times \mathbb{R}_+$. Der Gebiet der Abhängigkeit $A(x,t)$ ist die Menge der Punkten $y \in X$ so, daß eine bicharakteristische Kurve[1] für $\tilde{\Lambda}$ von $(y, 0)$ bis (x,t) läuft.

Satz 5.6.2 *Wir setzen voraus, daß für beliebigen Punkt (x,t) die Menge $A(x,t)$ eines Kompaktum ist. Dann gilt die Behauptung des vorigen Satzes für $U = X \times \mathbb{R}_+$.*

Entwurf des Beweises. Wir besprechen in kurzen Worten eine Konstruiren der Grundösung E_y des Anfangswertproblems.
Zuerst lösen wir die Gleichung

$$P(x,t;D)I(\phi,a) = 0 \mod \mathcal{E}(X \times \mathbb{R}) \tag{6.3}$$

für eines Fourier-Distribution mit einer nichtentarteten Phase ϕ und einer Amplitude $a \in S^\nu$, die hat die folgende Entwicklung

$$a = a_\nu + a_{\nu-1} + ... + a_{\nu-k} + r_k,$$

mit einige homogene Glieder a_k und einem Restglied $r_k \in S_1^{\nu-k-1}$. Wir schreiben die linke Seite (6.3) in der Form

$$\int \exp(\imath\phi)[b_{\nu+m} + b_{\nu-m-1} + ... + b_k + r'_k]d\theta \tag{6.4}$$

wobei b_k auch eine homogene Amplitude des Grades k ist. Wir berechnen einfach das Glied des höchsten Grades

$$b_{\nu+m}(x,t;\theta) = \imath^m p_m(x,t;d_{x,t}\phi)a_\nu(x,t;\theta).$$

Das muss wegen (6.3) auf $C(\phi)$ verschwinden. Das bedeutet, daß die Phase die Eikonalgleichung

$$p_m(x,t;d_{x,t}\phi) = 0$$

[1] siehe Ab.4.6

auf $C(\phi)$ erfüllt. Sei ϕ eine Lösung für der Eikonalgleichung. Man kann die linke Seite folgendeweise darstellen

$$p_m(x,t;d_{x,t}\phi) = \sum q_j(x,t;\theta)\frac{\partial\phi(x,t;\theta)}{\partial\theta_j}$$

weil die Phase ϕ nichtentartete ist. Hier sind $q_1, ..., q_N$ einige glatte homogene Funktionen des Grades $\nu + m$. Jetzt integrieren wir das Hauptglied in (6.4) teilweise:

$$\int \exp(\imath\phi)p_m(x,t;d_{x,t}\phi)a_\nu(x,t;\theta)d\theta = \imath\int \exp(\imath\phi)\sum \frac{\partial}{\partial\theta_j}(q_j a_\nu)d\theta.$$

Das ist eines Fourier-Distribution mit einer Amplitude des Grades $\nu+m-1$. Folglich muss man die folgende Gleichung

$$\sum \frac{\partial}{\partial\theta_j}(q_j a_\nu) + b_{\nu+m-1} = 0 \tag{6.5}$$

auf $C(\phi)$ lösen. Nach Berechnung des Gleids $b_{\nu+m-1}$ bekommt man die folgende Gleichung:

$$-\imath\sum \frac{\partial p_m}{\partial\xi_i}\frac{\partial a_\nu}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 p_m}{\partial\xi_j\partial\xi_k}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_k}a_\nu + \imath\sum \frac{\partial}{\partial\theta_j}(q_j a_\nu) + p_{m-1}a_\nu = 0$$

Das ist eine Differetialgleichung erste Ordnung auf $C(\phi)$. Man trägt diese Gleichung nach Lagrangesche Mannigfaltigkeit Λ beim Isomorphismus $\phi_* : C(\phi) \to \Lambda$ über, wo kann man sie in eine invariante Form darstellen:

$$L_{p_m}\tilde{a}_\nu + Q\tilde{a}_\nu = 0. \tag{6.6}$$

Hier ist L_{p_m} die Lie Ableitung in Bezug auf das Hamiltonischen Feld für die Hamiltonische Funktion $p_m(x,t;d_{x,t}\phi)$ und gilt

$$Q = \imath p_{m-1}(x,t;d_{x,t}\phi) - \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 p_m(x,t;d_{x,t}\phi)}{\partial x_j\partial\xi_j}.$$

Die Unbekannte ist eine Halbdichte $\tilde{a}_\nu$ in Λ. Eine *Halbdichte* in Λ ist einer Ausdrück $\alpha = a_y\sqrt{|dy_1\wedge ... \wedge dy_{n+1}|}$, wo ist a_y eine Funktion und $y = (y_1, ..., y_{n+1})$ eines symplektische Koordinatensystem auf Λ (siehe Ab.4.7).

Dabei wechselt die Funktion a_y beim Übergang zum symplektische Koordinatensystem $z = (z_1, ..., z_{n+1})$ folgendeweise

$$a_z = a_y \sqrt{\left| \frac{\partial y}{\partial z} \right|}.$$

Die Invariante Gleichung (6.6) hat die folgende wichtige Eigenschaft: sie setzt auf ganze Mannigfaltigkeit $\tilde{\Lambda}$ fort, während die Gleichung (6.5) nur auf einen Stück $\phi_*(C(\phi))$ gilt. Wir lösen (6.6) wie eine gewöhnliche Gleichung längst jedem bicharakteristische Streifen (Trajektorie) mit einem Anfangswert und substituiren die Lösung in (6.3). Jetzt verschwinden $b_{\nu+m}$ und $b_{\nu+m-1}$ in (6.4). Die Gleichung $b_{\nu+m-2} = 0$ ist equivalent zur folgende

$$L_h \tilde{a}_{\nu-1} + Q \tilde{a}_{\nu-1} = S \tilde{a}_\nu, \tag{6.7}$$

wobei S eines Differenzialoperator zweiter Ordnung ist. Wir wählen eine Lösung $a_{\nu-1}$ und bekommen eine ähnliche Gleichung für $a_{\nu-2}$ und so weiter. Eine Gleichung wie (6.6) oder (6.7) heißt die *Transportgleichung*. Für die Amplituden $a_\nu, a_{\nu-1}, ...$ die erfüllt alle Transportgleichungen, gilt auch (6.3). Dabei können wir die Anfangswerten für Transportgleichungen wählen.
Für jede j ist die Mannigfaltigkeit Λ_j gleich die Vereinigung der Trajektorien der Hamiltonische Feld H_{h_j} mit Anfangswerten $x(0) = y$, $t(0) = 0$, $\tau(0) = \tau_j(y, 0; \xi), \xi(0) = \xi$, wo läuft ξ über den Raum $T_y^*(X)$. Das Hamiltonische Feld H_{p_m} ist zu jede Trajektorie des Felds H_{h_j} tangential, aber die Geschwindigkeiten unterscheiden. Die Projektion der Mannigfaltigkeit $\tilde{\Lambda}$ im Zeit-Raum $X \times \mathbb{R}_+$ heißt die charakteristiche Fläche. Diese Fläche schneidet der Raum $X \times \mathbb{R}_+$ in einige zusammenhängende Komponenten. Eine (äßere) Komponente F enthält die Fläche $X \setminus \{y\} \times \{0\}$. Die Welle E_y ist gleich Null in F. Die Ergänzung $K = X \times \mathbb{R}_+ \setminus F$ heißt das Konoid der Wellenausbreitung (oder der Abhängigkeit). Das ist ein echter Kegel, falls das Operator die konstanten Koeffizienten hat.
Wir suchen die Grundlösung in der Form

$$E = \sum_1^m I(\phi^{(j)}, a^{(j)}). \tag{6.8}$$

wo ist jede Phase ϕ_j eine Lösung der Eikonalgleichung

$$h_j(x, t; d_{x,t}\phi^{(j)}) = 0,\ h_j(x, t; \tau, \xi) = \tau - \tau_j(x, t; \xi), \quad j = 1, ..., m$$

mit den Angangsbedingungen

$$\phi^{(j)}(x,0;\theta) = \phi_0(x;\theta) \quad h_j(x,0;d_{x,t}\phi^{(j)}) \equiv \frac{\partial \phi^{(j)}}{dt} - \tau_j(x,0;d_x\phi^{(j)}) = 0.$$

Wir finden eine Lösing des Angangswertproblems mit Verfahren aus Ab.4.6. (Andere Methode ist die Aussage 5.3.1 zur Mannigfaltigkeit Λ_j zu anwenden.) Dann finden wir die Amplituden $a^{(1)}, ..., a^{(m)}$ aus der Transportgleichungen. Das gibt eine Lösung der Gleichung $P(x,t;D)E = 0, \quad \mathrm{mod}\ \mathcal{E}(X \times \mathbb{R}_+)$. Wir bestimmen die Anfangswerten für Transportgleichungen um die Anfangsbedingungen (6.2) zu erfüllen. Insbesondere setzen wir

$$\phi_0(x,\theta) = \theta x \equiv \sum_1^n \theta_i x_i,$$

d.h. jede Fourier-Distribution in (6.8) ist für $t = 0$ eine Fouriertransformation. Wir berechnen

$$E(x,0) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\imath\theta x) \sum_j a^{(j)}(x,0;\theta) d\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E(x,0) = \int \exp(\imath\theta x) \sum_j [\tau_j(x,0;\theta) a^{(j)}(x,0;\theta) + \frac{\partial}{\partial t} a^{(j)}(x,0;\theta)] d\theta$$

wobei wir die Ableitung $\partial/\partial t a^{(j)}(x,0;\theta)$ durch $a^{(j)}(x,0;\theta)$ dank der Transportgleichung ausdrücken. Für beliebige $k < m$ ergibt es sich

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} E(x,0) = \int \exp(\imath\theta x) \sum_j [(\tau_j(x,0;\theta)^k + \sigma_{kj}(x,0;\theta)] a^{(j)}(x,0;\theta) d\theta, \quad (6.9)$$

wobei σ_{kj}, $j = 1, ..., k$ eine Summe der homogenen Funktion des Grades $< k$ ist. Wir substituiren (6.9) in (6.2):

$$\sum_j [\tau_j^k + \sigma_{jk}] a^{(j)} = \delta_k^{m-1} e, \; k = 0, ..., m-1, \quad e = (2\pi\imath)^{-n} \exp(-\imath\theta y) \quad (6.10)$$

Das ist ein lineares System für die Funktionen $a^{(1)}, ..., a^{(m)}$ mit der Matrix $T = \|\tau_{kj}\|$, $\tau_{kj} = \tau_j^k + \sigma_{kj}$. Das Hauptglied $\|\tau_j^k\|$ der Matrix ist die Vandermondesche Matrix. Das ist invertierbar, weil die Würzel $\tau_1, ..., \tau_m$ verschiedene sind (p ist strikt hyperbolish). Deswegen hat (6.10) eine Lösung

$a^{(j)} = a^{(j)}_\nu + a^{(j)}_{\nu-1} + ... \quad \nu = 1-m,\ j = 1,...,m$ mit Hauptglieder:

$$a^{(j)}_\nu(x,0;\theta) = e\left(\prod_{k\neq j}(\tau_k(x,0;\theta) - \tau_j(x,0;\theta))\right)^{-1}.$$

Mit der Phasen $\phi^{(j)}$ und Amplituden $a^{(j)}$, $j = 1,...,m$ bekommen wir eine $\tilde{\Lambda}$-Distribution (6.8), die erfüllt die Gleichung (6.1) in einer Umgebung U und die Bedingung (6.2) modulo $\mathcal{E}$.
Unter der Voraussetzung des Satzes 5.6.2 kann man die Distribuion E weiter fortsetzen. Im allgemeinen kann man nicht E weiter die Form (6.8) benutzen, weil für eine Zeit $t = \varepsilon$ wenn einer Punkt $\lambda \in \tilde{\Lambda}$, $t(\lambda) = \varepsilon$ auftritt so, daß $r(\lambda) < n$. Man fortsetzt diese Lösung für spätere Zeit $t > \varepsilon$ wie eine $\tilde{\Lambda}$-Distribution. Dabei findet man die Phasen ψ_α um die Mannigfaltigkeit $\tilde{\Lambda}$ mit den Stücken $\Lambda(\psi_\alpha)$ zu überdecken (siehe Aussage 5.3.1) und die Amplituden a_α um alle Transportgleichungen (6.6),(6.7) zu erfüllen.
Endlich bekommen wir eine $\tilde{\Lambda}$-Distribution in $X \times \mathbb{R}_+$, die erfüllt das Anfanbgswertproblem modulo $\mathcal{E}$. Die heißt ein *Parametrix* des Angangswertproblems. Man sucht die echte Grundösung in der Form $E_y = E + F$ mit einer glatten Dichte F so,daß supp $F \subset K$. Man findet eine F aus eine Integralgleichung des Volterrischen Typs. $\boxdot$

5.7 Anwendung zur Wellengleichung

Grundlösung. Sei X ein n-dimensionaler Euklidraum. Die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(x,t)\Delta u = w, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

in Zeit-Raum $X \times \mathbb{R}$ mit einer Geschwindigkeit $c(x,t) > 0$ ist eine strikt hyperbolische Gleichung, weil $\tau_1 = c(x,t)|\xi|$, $\tau_2 = -c(x,t)|\xi|$ gelten. Wir haben zwei Hamiltonische Funktionen $\sigma_\pm = \tau \pm c(x,t)|\xi|$ und schließlich zwei Komponenten $\Lambda_\pm$ der Mannigfaltigkeit $\tilde{\Lambda}$ für beliebige Λ. Sei $\Lambda = T^*_y(X)$ für einen Punkt $y \in X$. Die Menge Λ ist symmetrische bei der Involution $\xi \mapsto -\xi$. Desewegen gilt die Beziehung $\phi_-(x,t;\theta) = -\phi_+(x,t;-\theta)$. Schließlich haben die entsprechende bicharakterische Streifen für $S_\pm \subset \Lambda_\pm$ gleiche bicharakteristische Kurven (Strahlen) S in $X \times \mathbb{R}$. Die Menge $\pi(\tilde{\Lambda})$ ist gleich der singular Träger der Grundlösung E_y in $X \times \mathbb{R}_+$. Die Menge $\operatorname{ssupp} E_y$ ist eine Hyperfläche eventuell mit Singularitäten. Für einen Teil $\tilde{\Lambda}_0$ der Lagrangesche Mannigfaltigkeit, wo gilt die Gleichung $r(\lambda) = n$ (siehe (3.4)), ist die Projektion $H = \pi(\tilde{\Lambda}_0)$ eine glatte Hyperfläche. Für einen beliebigen Punkt $P \in H$ wird die Grundlösung durch eine der Formeln

$$E_y = e_0 \delta^{(n-3)/2}(\Phi) + F, \quad E_y = e_0 \Phi^{(1-n)/2} + F, \tag{7.1}$$

$$E_y = e_0 \Phi_+^{(1-n)/2} + F \tag{7.2}$$

dargestellt. Dabei gilt Φ, e_0 glatte reelle Funktionen in einer Umgebung des Punktes P so, daß $\Phi(x,t) = 0$ eine lokale Gleichung für $\operatorname{ssupp} E_y$ ist. Das Restglied hat die folgende Entwicklung

$$F = e_1 h_1(\Phi) + e_2 h_2(\Phi) + ...,$$

wobei sind $e_1, e_2, ...$ glatte Funktionen und $h_1, h_2, ...$ sukzessive Stammfunktionen des Hauptprofils $h_0 = \delta^{(n-3)/2}, ...$ Formel (7.1) gelten für gerade $n+1 > 2$, dabei gilt die erste Variante für den Punkt P, der befindet sich auf einem Strahl S *bevor* der erste Kaustik. Nach der erste Kaustik gilt die zweite Variante (7.1). Nach der zweite Kaustik schaltet die zweite Formel um die erste und so weiter. Für ungerade $n+1$ gilt die Annäherung (7.2). Für ein singularen Punkt $P \in \operatorname{ssupp} E_y$ kann man die Grundlösung mit andere spezielle verallgemeinerte Funktion darstellen.

Erhaltung der Energie. Jetzt betracten wir die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2(x)\Delta u = 0 \tag{7.3}$$

mit einer zeitunabhängigen Geschwindigkeit $c(x) > 0$. Sei $\Lambda \subset T^*(X)$ eine beliebige Lagrangesche Mannigfaltigkeit, die symmetrisch in Bezug die Involution $(x, \xi) \mapsto (x, -\xi)$ ist. Sei $\tilde{\Lambda} \subset T^*(X \times \mathbb{R})$ die durch Λ erzeugende Lagrangesche Mannigfaltigkeit wie im Satz 5.6.1 und u eine Lösung von (7.3), die eine $\tilde{\Lambda}$-Funktion von Ordnung 0 ist. Die Distribution u ist glatte außer der Hyperfläche $H = \pi(\tilde{\Lambda})$, die im allgemeinen Singularitäten hat. Sei H_0 ein regulärer Teil von H. Nach Bemerekung 2 Ab.5.4 hat die Funktion in Umgebung von H_0 eine Darstellung

$$u = I(\phi_+, a_+) + I(\phi_-, a_-)$$

mit $C(\phi_\pm) \subset \Lambda_\pm$. Die zwei Glieden entsprechen zwei symmetrischen Teilen $\Lambda_\pm$ von $\tilde{\Lambda}$.
Sei dV die Euklidische Maß in X. Sie ist gleich $|dx_1 \wedge ... \wedge dx_n|$ für beliebige Euklidische Koordinatensystem. Wir betrachten die Halbdichte

$$U = \frac{u}{c}\sqrt{dV}.$$

Im allgemeinen gehört das die Dichte $|U|^2$ nicht zu L_{loc} in Umgebung von H. Wir bestätigen aber, daß eine singuläre Teil der Dichte ist konstante bei der Ausbreitung der Welle. Die Ausbreitung ist eine Bewegung den Strahlen entlang, die aus dem Hamiltonische Flüß Ψ_t in X herkommt, die durch Hamiltonische Funktion σ_+ oder σ_- erzeugent wird.
Für eine exakte Behauptung betrachten wir eine Annäherung für die Lösung

$$u_\varepsilon = u_{+\varepsilon} + u_{-\varepsilon},\ u_{\pm\varepsilon} = I(\phi_{\pm\varepsilon}, a_\pm),$$

mit Phasen $\phi_\varepsilon(x, \theta) = \phi(x, \theta) + \imath\varepsilon|\theta|$. Das Integral

$$\int_K \left|\frac{u_\varepsilon}{c}\right|^2 dV$$

konvergiert für ein beliebigen Kompaktum $K \subset X \times \mathbb{R}$, dabei gilt

$$\int_K \left|\frac{u_\varepsilon}{c}\right|^2 dV = -\log\varepsilon \int_K \Sigma + O(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

für eine singuläre Dichte $\Sigma = \Sigma(|U|^2)$ in Zeit-Raum. Wir heißen die Dichte $\Sigma(|U|^2)$ der *singuläre Teil* der Dichte $|U|^2 = |u/c|^2 dV$. Wir haben $\operatorname{supp}\Sigma \subset H$, weil $\operatorname{ssupp} u \subset H$ gilt (siehe Satz 5.2.1).

Aussage 5.7.1 *Der singulär Teil Σ behält bei der Bewegung die charakteristische Kurven bei, d.h.*

$$\int_{\Psi_t(K)} \Sigma(U) = \text{Konst}$$

für ein beliebiges Kompaktum $K \subset H$ gilt.

Beweis. Wir setzen zuerst voraus, daß $u = u_+$ gilt. Dabei gilt $\phi_\pm(x, t; \tau) = \pm\tau(t - \phi(x))$, wo ist $\phi = \phi(x)$ eine Eikonalfunktion (Aussagen 4.8.1 und 5.3.1). Die Amplitude a ist eine Lösung der Gleichung (6.6):

$$L_{p_m}\tilde{a} + Q\tilde{a} = 0,\ p_m = \tau^2 - c^2|\xi|^2,\ Q = -2\operatorname{grad} c\xi,$$

für eine Halbdichte $\tilde{a}$ in $\tilde{\Lambda}$. Nach dem Satz 4.7.1 kann man das symplektische Koordinatensystem $x_1, ..., x_n, \tau$ in einer Umgebung des Bundels B benutzen. Daher kann man schreiben

$$\tilde{a} = a(x, \tau)\sqrt{|d\tau \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_n|} = a(x, \tau)\sqrt{d\tau \wedge dV}. \tag{7.4}$$

Gemäß (7.4) haben wir

$$-2c^2\xi \operatorname{grad} \tilde{a} + 2c \operatorname{grad} c\xi\tilde{a} = 0.$$

Dabei bleiben die Koordinate τ und die Form $d\tau$ fest, weil $d\tau/dt = -(\sigma_\pm)'_t = 0$ nach dem Hamiltonssystems. Darum erfüllt die Gleichung auch für die Halbdichte $a_0\sqrt{dV}$, $a_0(x) = a(x, 1)$. Sie ist equivalent zur folgende Gleichung

$$\xi \operatorname{grad} \frac{a_0}{c}\sqrt{dV} = 0.$$

Das bedeutet die Erhaltung der Halbdichte $a_0/c\sqrt{dV}$ beim Hamiltonischen Flß̈. Der Bruch

$$\frac{a_0}{c}\sqrt{\frac{dV}{d\phi}} \tag{7.5}$$

ist auch eine Invariante, weil

$$Ld/dt(d\phi) = d(d\phi(d/dt)) = d(\operatorname{grad}\phi(\sigma_+)'_\xi) = d(2c^2|\operatorname{grad}\phi|^2) = d2 = 0,$$

wegen die Gleichungen $\xi = \operatorname{grad} \phi(x)$, $c(x)|\operatorname{grad} \phi(x)| = 1$ (siehe Ab.4.6). Dank der Folgerung 5.4.3 bekommen wir die Gleichung

$$u = C_0(t - \phi(x) + 0\imath)^{-1/2}[a_0(x) + (t - \phi(x))a_1(x,t) + (t - \phi(x))^2 a_2(x,t) + ...], \tag{7.6}$$

dabei sind $a_1, a_2, ...$ einige glatte Funktionen und hängt die Konstante C_0 von u nicht ab. Schließlich gilt

$$u_\varepsilon = C_0(t - \phi + \varepsilon\imath)^{-1/2}(a_0 + (t - \phi + \varepsilon\imath)a_1 + ...),$$

dabei gibt nur das Glied mit a_0 einen Beitrag in Σ. Sei $B \subset H$ eines Bundel der Strahlen so, daß der Durchschnitt $F_s = B \cap \{t = s\}$, $s > 0$ immer eines Kompaktum ist. Wir betrachten die Familie der Kompaktumen $K_t = B \cap \{t \leq \phi \leq t + \varepsilon\}$, $t > 0$. Wir integrieren mit Hilfe des Fubinische Satzes:

$$\int_{K_t} \left|\frac{u_\varepsilon}{c}\right|^2 dV = |C_0|^2 \int |(t - \phi + \varepsilon\imath)|^{-1} \left|\frac{a_0}{c}\right|^2 dV + O(1) =$$

$$= |C_0|^2 \int_{0 \leq s \leq \varepsilon} |s + \varepsilon\imath|^{-1} \left(\int_{F_{t-s}} \left|\frac{a_0}{c}\right|^2 \frac{dV}{d\phi}\right) ds + O(1). \tag{7.8}$$

Das innere Integral hängt nicht von t ab, weil (7.5) eine Invariante ist. Das Kern $|s + \varepsilon\imath|^{-1}$ hängt auch nicht von Bewegung ab und gibt das Hauptglied $C \log \varepsilon$ der Asymptotische Entwicklung, mit einer Konstante C. Das prüft die Aussage für den gegebene Fall.
Im allgemeinen Fall haben wir $u = u_+ + u_-$, wobei $\phi_(x, t; \tau) = -\tau(-\phi(x))$. Daher gilt die Darstellung wie (7.6) für u_- mit $-\varepsilon$ statt ε. Wir betrachten das Integral

$$\int_{K_t} \frac{u_{+\varepsilon}\overline{u_{-\varepsilon}}}{c^2} dV = |C_0|^2 \int (t - \phi + \varepsilon\imath)^{-1} \frac{a_1 \overline{a_2}}{c^2} dV + O(1)$$

Das Integral ist beschränkt für $\varepsilon \to 0$, weil die Familie der Distributionen $(t - \phi + \varepsilon\imath)^\lambda dV$ für beliebige λ einer Limes hat. Daher bekommen wir

$$\int_K \left|\frac{u}{c}\right|^2 dV = \int_K \left|\frac{u_+}{c}\right|^2 dV + \int_K \left|\frac{u_-}{c}\right|^2 dV + O(1)$$

schließlich

$$\Sigma\left(\left|\frac{u}{c}\right|^2 dV\right) = \Sigma\left(\left|\frac{u_+}{c}\right|^2 dV\right) + \Sigma\left(\left|\frac{u_-}{c}\right|^2 dV\right).$$

$\boxdot$

Aussage 5.7.2 *Sei v eine beliebige Lösung von (7.3) die eine Lagrange-Funktion von Ordnung -1. Der singuläre Teil $\Sigma(\|\operatorname{grad}_{x,t} v\|^2 dV)$ ist eine Invariante beim Hamiltonischen Flüß. Dabei setzen wir*

$$\|\operatorname{grad}_{x,t} v\|^2 = \left|\frac{v'_t}{c}\right|^2 + \|\operatorname{grad}_x v\|^2$$

Beweis ist wie für vorige Aussage. Dabei benutzen wir die Gleichung $|\operatorname{grad}\phi| = c^{-1}$.$\boxdot$
Die Dichte $\|\operatorname{grad}_{x,t} v\|^2 dV$ heißt die *Energiedichte* der Lösung. So drückt diese Aussage den Gesetz der Erhaltung der Energie für eine singuläre Lösung der Wellengleichung aus.

Erkenntlichkeit. *Dr.T.Dirkes und Dr. H.Siedlhof haben mir bei der Vorbereitungs der Vorlesungensskripta geholfen. Ich danke Tomas Dirkes und Helmut Siedlhof für gedeihliche Mitwirkung.*

Literaturverzeichnis

[1] Duistermaat J.J. Fourier Integral Operators, Birkhäuser 1996
[2] Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV, Fourier Integral Operators, Springer-Verlag 1985
[3] Palamodov V.P. Distributions and Harmonic Analysis, Encyclopaedia of Mathematical Science, v.72, Springer-Verlag 1993.

Anhang: Lagrangesche Mannigfaltigkeiten im Bild

Die folgende Figuren bilden zwei Lösungen u_1, u_2 der Helmholtz Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) u + \frac{k^2}{c^2} u = 0$$

mit der Geschwindigkeit $c = 1$ im Einheitskreisscheibe K in einer Euklidischen Ebene E.

Erste Figur. Die erste Lösung erfüllt die Dirichlet-Randdaten:

$$u_1 = 1 \text{ auf einen oberen Viertel } B \text{ des Kreises } |x| = 1, \quad \text{sonst } u_1 = 0,$$

Die Lösung hat der Typus der stehende Wellen, dabei ist der wesentliche Träger der Welle u_1 gleich die Vereinigung zwei Sektoren = die Vereinigung der Durchmessers D_b mit den Ende $b \in B$. Diese Menge ist die Projektion einer Lagrangesche Mannigfaltigkeit $\Lambda_1 \subset T^*(E)$. Für einen beliebigen Punkt $b \in B$ betrachten wir zwei Intervallen in $T^*(E)$ und zwar

$$D_b^{\pm} = \{(x = tb, \, \xi = \pm\frac{k}{2\pi}b), -1 \leq t \leq 1\}.$$

Sei $\Lambda_1^{\pm}$ die Vereinigung der Intervallen $D_b^{\pm}$, $b \in B$. Beide sind Lagrangesche Mannigfaltigkeiten. Tatsächlich, ist jedes Intervall $D_b^{\pm}$ gleich einer Stück einer Nullstreifen der durch Hamiltonian

$$a(\xi) = -\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{k^2}{8\pi^2} \tag{1}$$

erzeugende Flüß:

$$\frac{dx}{dt} = -\xi, \; \frac{d\xi}{dt} = 0.$$

mit der Anfangmannigfaltigkeiten $W^{\pm} = \{(x, \xi) : \, x \in B, \xi = \pm\frac{k}{2\pi}x\}$. Offenbar gilt die Gleichung $a = 0$ auf $W^{\pm}$ und verschwindet die kanonische Form σ, weil $\dim W^{\pm} = 1$. Schließlich ist $\Lambda_1^{\pm}$ eine Lagrangische Mannigfaltigkeit dank dem Satz 4.6.1.

Wir kleben zwei Blätten $\Lambda_1^{\pm}$ über die gegenwärtig Bogen $-B$ zusammen. Wir bekommen eine Fläche $\Lambda_1 \subset T^*(E)$ mit dem Rand $W^+ \cup W^-$. Das ist eine Mannigfaltigkeit mit der singulare Kante über $-B$. Wir fixieren einen Punkt $\lambda_0 \in \Lambda_1^+$ und bestimmen eine Eikonalfunktion auf Λ_1^+

$$\phi^+(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \alpha \tag{2}$$

und auch auf Λ_1^-:

$$\phi^-(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \alpha + \frac{1}{2}$$

wobei addieren wir eine Halbe für jeden Übergang des Wegs γ durch die Kante $-B$. Das ist notwendig wegen änderung der Phase bei der Reflektion am Rand. Das Integral hängt nicht von dem Weg ab, weil Λ_1 einfach zusammengehängig ist. Die Summe

$$u_1 \approx a_+ \exp(2\pi\imath\phi_+(x)) + a_- \exp(2\pi\imath\phi_-(x)) \tag{3}$$

ist eine Annäherung zur Lösung des ersten Bilds für geeignete Konstanten $a_\pm$.

Zweite Figur Die Lösung u_2 erfüllt die Dirichlet-Bedingung

$$u_2 = \delta_y,$$

wobei y der oberen Punkt des Randes bedeutet. Der wesentliche Träger der Lösung u_2 ist das Ring $R = \{r \leq |x| \leq 1\}$. Wir betrachten alle Strahlen im Ring R, die tangentiale zum inneren Kreis $|x| = r$ sind und gegen die Uhr laufen. In einem beliebigen inneren Punkt $x \in R$ gibt es genau zwei Strahlen $S_\pm$. Wir bennenen durch $e_\pm$ die Einheitsvektoren dieser Strahlen, wobei e_+ die Richtung zum außeren Rand des Rings hat und e_- zum Berührungspunkt mit dem inneren Rand ist. Wir setzen

$$\xi_\pm = \frac{k}{2\pi} e_\pm.$$

Wir bekommen zwei Blätten $\Lambda_2^\pm$ im Raum $T^*(E)$, die zweimal das Ring R entdecken. Wir kleben die Blätten über die Kreise $|x| = 1$, $|x| = r$ zusammen und bekommen eine abgeschloßene Mannigfaltigkeit Λ_2, die ist zum Torus homeomorph. Das ist eine Mannigfaltigkeit mit einer singularen Kante $|x| = 1$, dabei ist der klein Kreis $|x| = r$ kein singular Teil von Λ_2. Das ist eine Lagrangesche Mannigfaltigkeit, weil die Strahlen die Trajektorien des Hamiltonischen Flüß für Hamiltionan (1) sind. Folglich ist die Form $\alpha = \xi dx$ auf Λ_2 abgeschloßen. Wir bestimmen zwei Periode

$$P_1(\Lambda_2) = \int_{\gamma_1} \alpha, \quad P_2(\Lambda_2) = \int_{\gamma_2} \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{4},$$

wobei γ_1 ein Zyklos in Λ_2, die zu einem Kreis $|x| = r'$, $r < r' < 1$ homotopisch equivalent ist. Der Zyklos γ_2 ist gleich die Vereinigung der zwei Bögen, die über eines Intervall $\{x : r \leq x_1 \leq 1,\ x_2 = 0\}$ liegen. Dabei liegt einer Bogen auf Λ_2^+ und anderer auf Λ_2^-. Der orientierte Zyklos γ_2 kreuzt den Zyklos

$|x| = 1$ in dieselbe Richtung wie die reflektierende Strahlen durch. Die Zahl $1/2$ bedeutet wieder die Änderung der Phase wegen die Reflektion an dem außeren Kreis und die Zahl $-1/4$ entspricht dem kaustische Verlust an dem untenen Kreis $x = r$.
Die *Quantization* Bedingung: die beide Periode sind ganze Zahlen

$$P_1(\Lambda) = p_1,\ P_2(\Lambda) = p_2 \tag{4}$$

Das ist eine notwendige Bedingung für Existenze eine Lösung u_2 von Typus it "flüsternde Galerie" (siehe [1]).
Die beide Bedingungen (4) erfüllen für Λ_2 mit $k = 33\pi/2$, $p_1 = 32$, $p_2 = 4$. Dann gilt die Annäherung wie (3). Dabei ist ϕ_+ eine Eikonalfunktionen wie in (2) und

$$\phi_-(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}.$$

Die Annäherung (3) ist tauglich im Ring $r + \varepsilon < |x| < 1$ für ein positives ε. In einer Umgebung der Kaustik $|x| = r$ ist eine andere Annäherung geeignet:

$$u_2(x) \approx a \exp(2\pi\imath\phi(\theta(x)))\,\mathrm{Ai}(\eta(|x|)k^{2/3}),$$

wobei gilt $\phi = \phi_\pm$ auf die Kaustik und bezeichent Ai die Airysche Funktion (siehe Ab.2.4); $\theta(x) = rx/|x|$ und η sind die *kaustische* Koordinate, dabei verschwindet $\eta(t)$ für $t = r$.

Erkenntlichkeit. *Die Bilder sind durch einen Algorithmus von Dr. Frank Wübbeling berechnen. Ich danke Dr.F. Wübbeling für gedeihliche Mitwirkung.*

Literaturverzeichnis

[1] J.B.Keller, S.Rubinow, Asymptotic solution of eigenvalue problems, Annals of Physics, **9** N1 (1960); Erratum, Annals of Physics, **10** N2 (1960)