Laudatio

anläßlich der Emeritierung von

Professor Dr. Colin W. Cryer

Eine Laudatio auf Colin Cryer zu halten, ist keine einfache Aufgabe. Erstreckt sich doch sein wissenschaftliches Werk über sehr viele Gebiete: Von der Rundungsfehleranalyse über Komplementaritätsprobleme, total positive Matrizen, Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen, Freie Randwertprobleme bis hin zu den Navier-Stokes-Gleichungen, um nur einige zu nennen. Die Aufgabe wird keineswegs einfacher dadurch, daß Colin Cryer die traditionellen Grenzen zwischen den Disziplinen laufend misachtet und keinerlei Scheu hat, sich als Numeriker mit Dingen wie den Druck in Lehm-Kugeln, die Grenze zwischen Öl und Wasserdampf bei Lubrikationsproblemen, der Beratung beim Kauf von Wertpapieren, oder gar der Modellierung von Herz und Kreislauf zu beschäftigen. Auf der anderen Seite ist es natürlich ein großes Vergnügen, ein derartig reichhaltiges wissenschaftliches Werk im Zusammenhang zu sehen, es in die Entwicklung des Faches einzuordnen und es wenigstens an Hand einiger Beispiele einem breiteren Publikum nahe zu bringen.

Beginnen wir mit einigen biographischen Anmerkungen. Colin Cryer wurde 1935 in Leeds/England geboren. Er studierte von 1954 bis 1958 in Pretoria/Südafrika Mathematik und promovierte in Cambridge/England 1962. Er arbeitete von 1955 bis 1963 für das *Council for Scientific and Industrial Research* in Pretoria und für das *Caltech* von 1963 bis 1965. Von 1965 bis 1983 lehrte er an der *University of Wisconsin* und war auch am *MRC in Madison* beteiligt. In diese Zeit fielen zwei längere Aufenthalte in *Oxford* und, als *IBM Research Fellow, in Cambridge*. Seit 1983 ist Colin Cryer hier in Münster. Man wird bemerken, daß die geographische Ausbreitung der Vita über 4 Staaten auf 3 Kontinenten der Breite des wissenschaftlichen Werks keineswegs nachsteht.

Colin Cryer erhielt die klassische Ausbildung eines Angewandten Mathematikers dieser Zeit, die etwa mit den Worten Differentialgleichungen, Integraltransformationen, Spezielle Funktionen umschrieben ist. In seiner ersten wissenschaftlichen Tätigkeit gelang ihm mit diesen Hilfsmitteln die Entdeckung eines paradoxen Phänomens, das man heute als Mandel-Cryer-Effekt bezeichnet: Man betrachte ein poröses Material, das mit Wasser vermischt ist, etwa

Lehm. Leitet man, etwa mit Hilfe eines Rohres, Wasser ab, so wird jeder vernünftige Mensch erwarten, daß der Druck innerhalb des Gemisches sinkt. Das war auch die Vorhersage des damals allgemein akzeptierten Modells. Colin Cryer verwendete 1962 ein feineres Modell und kam zu dem entgegengesetzten Schluß: Der Druck steigt erst einmal an. Dieser Mandel-Cryer-Effekt ist bis heute wichtig für geophysikalische Untersuchungen, insbesondere bei Erdbeben.

Nach diesem Auftakt kam Colin Cryer in das Fahrwasser der Numerik. Dort herrschte damals Aufbruchstimmung. Die Computer entwickelten sich von teuren Instrumenten für Spezialaufgaben zu allgemein verfügbaren Werkzeugen. Ihre Leistung stieg atemberaubend, und die Möglichkeiten zu numerischen Rechnungen wuchsen ins Unermessliche. Die Begeisterung von uns damals jungen Numerikern war mit der heutigen Internet-Euphorie durchaus vergleichbar. Am liebsten hätten wir alles berechnet.

Gleichzeitig erlebte die Theorie der Numerik einen Aufschwung ohnegleichen. Das war auch dringend notwendig, denn die bestehende Theorie war den Herausforderungen in keiner Weise gewachsen. Wilkinson veröffentlichte 1960 seine Arbeit über die Rückwärtsanalyse des Rundungsfehlers und stellte damit die Numerische Lineare Algebra auf sichere Füße, was den früheren Bemühungen berühmter Mathematiker wie John von Neuman und Alan Turing nicht gelungen ist. Innerhalb weniger Jahre entwickelte sich vor unseren staunenden Augen die Numerische Lineare Algebra von einem Gebiet, auf dem man Erfahrungen sammeln konnte, zu einer Wissenschaft mit eigenen Paradigmen und gesicherten Erkenntnissen und Methoden. Damals wurden die Voraussetzungen geschaffen für Programmbibliotheken wie NAG und IMSL, die wir heute als selbstverständliches Arbeitsmittel betrachten. Sichtbares Zeichen der neuen Numerik war etwa der QR-Algorithmus zur Eigenwertberechnung, der an Eleganz, Zuverlässigkeit und Effizienz alles übertraf, was man zuvor gekannt hatte.

Colin Cryer stand mitten in dieser lebhaften Entwicklung. Im Jahre 1968 erschien seine Arbeit "Pivotsize in Gaussian elimination" in der Zeitschrift *Numerische Mathematik*, welche damals die Speerspitze der modernen Numerik war. Gegenstand dieser Arbeit ist die Rückwärtsanalyse des Rundungsfehlers beim Eliminationsverfahren mit vollständiger Pivotisierung. Sei $Ax = b$ ein lineares System mit der (n, n)-Matrix A. Im Laufe des Eliminationsprozesses treten $(n-r, n-r)$-Systeme $A^{(r)}x^{(r)} = b^{(r)}$, $A^{(0)} = A$ auf. Die Wachstumsfaktoren

$$g(n, A) = \frac{\mathrm{Max}|a_{ij}^{(r)}|}{|a_{11}^{(0)}|}$$

sind entscheidend für den Einfluß der Rundungsfehler. Man kann nämlich zeigen (und das ist eben das Resultat der Rückwärtsanalyse), daß die tatsächlich berechnete Näherungslösung $\tilde{x}$ das System $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ erfüllt, wobei

$$|A - \tilde{A}| \leq 2n \frac{eps}{1 - eps} g(n, A)$$

mit der Maschinengenauigkeit eps. Für die Rückwärtsstabilität ist also das Verhalten von $g(n, A)$ für $n \to \infty$ entscheidend. Colin Cryer formulierte 1968 die Vermutung

$$g(n, A) \leq n \; .$$

Zwar schrieb er diese immer anderen Leuten zu, konnte aber nicht verhindern, daß außer ihm alle von der Cryer'schen Vermutung sprachen. Sie war die berühmteste Vermutung der Numerik dieser Zeit. Die Cryer'sche Vermutung hat sehr zur Verbreitung der Rückwärtsanalyse beigetragen. Ich selbst - ohne zu ahnen, daß Colin Cryer einmal für viele Jahre in einem Büro direkt neben meinem sitzen wird - habe mich damals in die Rückwärtsanalyse nur eingearbeitet, um die Bedeutung der Cryer'schen Vermutung zu verstehen.

Colin Cryer bewies seine Vermutung bis $n = 4$, und seine Beweismethoden hätten wohl auch für einige weitere Werte von n zum Ziel geführt. Aber 1990 fand Gould eine 13×13-Matrix A mit $g(13, A) = 13.0205$. Dies war das Ende der Cryer'schen Vermutung. Wäre sie richtig gewesen, hätte sie einen schönen Schlußstein der Rundungsfehleranalyse des Eliminationsverfahrens dargestellt. Die Falsifizierung wurde daher in der Fachwelt mit Bedauern und gar Bestürzung aufgenommen. Für die Bedeutung einer Vermutung ist es aber nicht so wichtig, ob sie richtig ist oder falsch. Entscheidend ist, welche wissenschaftlichen Potentiale sie mobilisiert, und so gesehen kann sich die Cryer'sche Vermutung leicht messen mit vielen anderen Vermutungen, die sich als richtig erwiesen haben.

Ein anderer Beitrag Colin Cryer's zur Numerischen Linearen Algebra betrifft das Komplementaritätsproblem: Sei A eine positiv definite Matrix und b ein Vektor. Man finde Vektoren x, $y \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} Ax &= b + y \\ x^T y &= 0 \, , \quad x \geq 0 \, , \; y \geq 0 \; . \end{aligned}$$

Äquivalent hierzu ist das Minimieren von

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b$$

unter der Nebenbedingung $x \geq 0$. Läßt man die Nebenbedingung weg, so hat man einfach $Ax = b$ zu lösen. Dies kann zum Beispiel iterativ geschehen durch das SOR-Verfahren

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \omega D^{-1}(b - Lx^{k+1} - Rx^k) + (1-\omega)x^k \; , \quad 0 < \omega < 2 \\ A &= \begin{pmatrix} \ddots & & R \\ & D & \\ L & & \ddots \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Colin Cryer schlug für das Problem mit der Nebenbedingung $x \geq 0$ vor:

$$x^{k+1} = \Big(\omega D^{-1}(b - Lx^{k+1} - Rx^k) + (1-\omega)x^k \Big)_+$$

und bewies Konvergenz. Man nennt dies heute das projezierte SOR-Verfahren.

Nicht-Numeriker mag das Cryer'sche Verfahren einfach erscheinen. Das ist richtig - glücklicherweise. Denn in der Numerik ist die Einfachheit eines Algorithmus ein erstrebenswertes Ziel. Und weiter: Einfachheit des Algorithmus bedeutet keineswegs Einfachheit der zugehörigen Theorie. Der Konvergenzbeweis von Cryer für dieses Verfahren ist zwar nur zwei Seiten lang, aber er hat es in sich. Noch nach fast 30 Jahren ist es ein Vergnügen, ihn zu lesen. Ursprünglich von Herrn Cryer für ein Lubrikationsproblem entwickelt, ist es heute ein Standard-Verfahren der Numerik und wird z.B. in der Finanzmathematik beim Berechnen Amerikanischer Optionen verwendet. Dabei hat man das Komplementaritätsproblem der Black-Scholes-Gleichung zu lösen. Für den Wert $P(S,t)$ einer Amerikanischen Put-Option muß entweder

$$P = E - S \ , \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP < 0$$

oder

$$P > E - S \ , \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0$$

gelten. (σ Volatilität, r Zinssatz, E exercise price). Nach Diskretisierung führt dies auf ein Komplementaritätsproblem für Matrizen, genau in der von Cryer behandelten Form.

Ein weiteres numerisches Verfahren, das mit dem Namen Cryer belegt ist, stammt aus einem ganz anderen Bereich, nämlich der Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Sei $\dot{x}(t) = -\lambda x(t)$ eine solche, und sei $\lambda > 0$. Dann gilt natürlich $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Ein lineares m-Schritt-Verfahren ist von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu x_{k+\nu} = h \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu \dot{x}_{k+\nu} \ ,$$

wo x_k eine Approximation an $x(kh)$ ist. Cryer nannte 1973 ein solches Verfahren A_0-stabil, wenn die Wurzeln des Polynoms

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^{m} (\alpha_\nu + q\beta_\nu) z^\nu$$

für alle $q > 0$ im Einheitskreis liegen. Die Klasse der A_0-stabilen Verfahren enthält andere Stabilitätsklassen, wie etwa die Dahlquist'schen Klassen $A(0)$, $A(\alpha)$. Alle diese Stabilitätsdefinitionen implizieren, daß sich die Approximationen x_k qualitativ ebenso verhalten wie die exakte Lösung, nämlich mit $k \to \infty$ gegen 0 streben. Dies ist von Bedeutung, wenn man Systeme von Differentialgleichungen lösen möchte, die ganz verschiedene Zeitkonstanten enthalten ("stiff systems").

Die Cryer'schen Verfahren sind A_0-stabile Verfahren hoher Konsistenzordnung, also hoher Genauigkeit. Sie sind von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu z^\nu = (z + d)^m$$

mit geeigneten $d \geq 2^{m+1}$; die β_ν werden so bestimmt, daß das Verfahren die Konsistenzordnung m hat.

Ich möchte nun nicht weiter in detaillierter Weise über Resultate von Colin Cryer berichten. Ich überspringe seine Arbeiten zu Freien Randwertproblemen, Total Positive Matrizen, seine Kooperation mit lokalen Banken bei der Erstellung eines Software-Pakets zur Wertpapierberatung, und vieles andere mehr. Ich möchte aber noch auf seine neuesten Aktivitäten eingehen.

Seit 1993 arbeitet Colin Cryer, zusamen mit Professor Lunkenheimer von der Klinik für Thorax und Gefäßchirurgie, an der Modellierung des Herz- und Kreislaufsystem des Menschen. Ziel dieses anspruchsvollen Projekts ist die Simulation des Herz- und Kreislaufsystems. Ich greife nur einzelne Punkte dieses umfangreichen Programmes heraus, die zusammen mit Diplomanden und Doktoranden bereits bearbeitet wurden.

Zunächst mußte der Verlauf der Faserung in der Herzwand genau bestimmt werden. Die Fasern wurden mechanisch abgetastet und in den Rechner eingegeben. Es wurde geeignete Software entwickelt, die die Bestimmung des Imbrikationswinkels, also des Winkels zwischen den einzelnen Faserschichten, erlaubte. Dabei zeigte sich, daß dieser Winkel nicht, wie allgemein angenommen, bei 11° liegt, sondern bei 35°. Diese Untersuchungen waren die Voraussetzung für eine zuverlässige Berechnung der Wandspannung des Herzens und stellen einen ersten Versuch einer theoretischen Fundierung der Batista-Operation dar, welche bei krankhafter Vergrößerung des Herzens durchgeführt wird.

Die weiteren Projekte (z.B. Kammerfunktion nach Ausfall von Wandsegmenten, Ausbreitung elektrischer Impulse, Strömung um künstliche Herzklappen und in Arterien und Venen, Sauerstoffaustausch in der Lunge) verlangen ein anspruchsvolles mathematisches Instrumentarium, das von Differentialgeometrie über Elastizitätstheorie und Strömungsmechanik bis zu Reaktions-Diffusionsgleichungen reicht.

Es ist klar, daß diese beeindruckende, wenn nicht gar furchterregende Liste von Problemen nicht von heute auf morgen abgearbeitet werden kann. Ich bin sicher, daß Colin Cryer, nachdem der nun von der Last des Alltags eines Hochschullehrer befreit ist, die Entwicklung auf diesem Gebiet energisch vorantreiben wird, und daß es bald weitere Cryer'sche Effekte und Verfahren gibt. Das jedenfalls wünsche ich ihm ganz herzlich.