Numerische Behandlung inverser Sturm-Liouville Probleme

Diplomarbeit

vorgelegt von

Thomas Dierkes

nach einer Aufgabenstellung von

Prof. Dr. F. Natterer

April 1995

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster
Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In der Physik treten häufig Gleichungen der Gestalt

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}y\right) + q(x)y &= \lambda r(x)y, \quad a \le x \le b, &(1.1)\\
y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha &= 0, &(1.2)\\
y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta &= 0 &(1.3)
\end{aligned}
$$

auf, so z.B. bei der Methode der Separation der Variablen zur Lösung der Wellengleichung eines schwingenden Systems [5]. Dabei sind $p(x)$ und $r(x)$ positive Funktionen, $q(x)$ eine reellwertige Funktion und λ ein (reeller) Parameter. Eine nicht identisch verschwindene Lösungsfunktionen $y(x)$ der Gleichung (1.1), die den homogenen Randbedingungen (1.2) - (1.3) genügen, beschreibt dann die Auslenkung bzgl. einer Richtung des schwingenden Systems. Im zweiten Kapitel wird gezeigt, daß dies nur für bestimmte Parameterwerte λ möglich ist. Diese speziellen Werte werden Eigenwerte des Randwertproblems (1.1) - (1.3) genannt. Das Eigenwertproblem besteht darin, diejenigen Eigenwerte λ zu bestimmen, für welche es eine nicht identisch verschwindene Lösungsfunktion gibt, die den homogenen Randbedingungen genügt. Die zu einem Eigenwert λ gehörigen nicht identisch verschwindenen Lösungsfunktionen werden Eigenfunktionen der Randwertaufgabe (1.1) - (1.3) genannt. Offensichtlich ist jedes multiplikative Vielfache einer Eigenfunktion wieder eine Eigenfunktion. Unter L^2-normierten Eigenfunktionen versteht man diejenigen Eigenfunktionen, deren L^2-Norm gleich eins ist.

Das so formulierte Problem wird auch nach den beiden Mathematikern Charles Sturm und Josef Liouville benannt, die um 1830 eine umfassende Theorie zu diesem Problemkreis entwickelt haben.

Unter gewissen Glattheitsvoraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen $p(x), q(x)$ und $r(x)$ kann man die Gleichung (1.1) durch Transformation der unabhängigen bzw. abhängigen Variablen auf eine einfache Normalform bringen [28]. Durch die sogenannte Liouville-Transformation

$$\xi = \xi(x) = \int_a^x \sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}\,dt, \quad l = \int_a^b \sqrt{\frac{r(t)}{p(t)}}\,dt, \quad u(\xi) = f(x)y(x), \quad f(x) = \sqrt[4]{p(x)r(x)}$$

gehen die Gleichungen (1.1) - (1.3) über in

$$
\begin{aligned}
-\frac{d^2}{d\xi^2}u + Q(\xi)u &= \lambda u, \quad 0 \le \xi \le l, && (1.4)\\
u(0)\cos\alpha + u'(l)\sin\alpha &= 0, && (1.5)\\
u(0)\cos\beta + u'(l)\sin\beta &= 0, && (1.6)
\end{aligned}
$$

wobei $Q(\xi)$ der Relation

$$
Q(\xi(x)) = \frac{f(x)}{r(x)}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{p(x)}{r(x)}}\frac{d}{dx}f(x)\right) + \frac{q(x)}{r(x)}
$$

genügt. Die Randbedingungen werden (bis auf die Intervallgrenzen) durch diese Transformation ihrer Form nach nicht verändert.

In dieser Arbeit werden nun Lösungsverfahren sogenannter inverser Probleme für Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgaben (1.4) - (1.6) hergeleitet und anhand numerischer Beispiele untersucht.

Inverse Probleme bestehen ganz allgemein in der Aufgabe, Parameter eines physikalischen Modells, z.B. Koeffizientenfunktionen oder Randbedingungen, so zu bestimmen, daß anhand des mit diesen Parametern gebildeten Modells gewisse charakteristische, messbare Werte des Modells zu berechnen sind, die mit tatsächlich gemessenen Größen übereinstimmen.

In dem hier bearbeiteten Fall der inversen Sturm-Liouville-Aufgabe ist die Koeffizientenfunktion $Q(\xi)$ gesucht, so daß die Gleichung (1.4) bzgl. bekannter Randbedingungen vorgegebene Eigenwerte besitzt. Dabei stellt sich neben der Frage der Existenz einer solchen Funktion $Q(\xi)$ die Frage nach der Eindeutigkeit dieser Aufgabenstellung: Gibt es eventuell mehrere Funktionen $Q_1(\xi), Q_2(\xi), \ldots$, so daß die entsprechenden Eigenwertaufgaben die gleichen Eigenwerte besitzen?

Diese Frage ist positiv zu beantworten [3]. Somit sind zusätzliche Bedingungen notwendig, damit die gesuchte Koeffizientenfunktion eindeutig aus den gegebenen Daten zu bestimmen ist. Eine dieser zusätzlichen Bedingungen ist bei Dirichletschen bzw. Neumannschen Randbedingungen für die Gleichung (1.4), d.h. $u(0) = u(l) = 0$ bzw. $u'(0) = u'(l) = 0$, die Vorgabe der Werte $u'(0)$ bzw. $u(0)$ der einzelnen L^2-normierten Eigenfunktionen. Somit lauten die untersuchten inversen Sturm-Liouville-Probleme wie folgt:

Seien die Eigenwerte λ und die Zahlen $u'(0)$ (bzw. $u(0)$) der L^2-normierten Eigenfunktionen der Eigenwertaufgabe (1.4) - (1.6) bzgl. Dirichlet-Randbedingungen (bzw. Neumann-Randbedingungen) gegeben. Bestimme die Funktion $Q(\xi)$, so daß die Eigenwertaufgabe (1.4) - (1.6) die gegebenen Werte besitzt.

Im zweiten Kapitel werden einzelne Aussagen über Randwertprobleme wiedergegeben, soweit sie zum Beweis der Eindeutigkeit einer Lösung dieser inversen Probleme benötigt werden.

Im dritten Kapitel werden drei verschiedene Ansätze zum Beweis der Eindeutigkeit dargestellt. Der erste Beweis gibt den klassischen Ansatz von I. M. Gel'fand und B. M. Levitan wieder [7], der zweite Beweis folgt den Ideen von N. Levinson [18] und der dritte Beweis schließlich stellt einen neueren Ansatz von W. Rundell und P. E. Sacks dar [27].

Aus dem erste und dem dritte Eindeutigkeitsbeweis ergeben sich konkrete Algorithmen zur Lösung der betrachteten inversen Sturm-Liouville-Probleme, da diese Beweise konstruktiv sind. Darüberhinaus wird im dritten Kapitel ein weiteres Verfahren angegeben, daß auf der Lanczos-Methode beruht [22].

Zur Untersuchung der numerischen Algorithmen wurden die benötigten Daten (die Eigenwerte) durch Lösen bestimmter Eigenwertaufgaben generiert. Zu verschiedenen Funktionen $Q(\xi)$ sind die Eigenwerte λ und die Zahlen $u'(0)$ numerisch bestimmt worden. Die Resultate der mit diesen Daten ausgeführten Algorithmen sind in Kapitel 4 dargestellt. Durch die numerische Simulation der Eingabedaten sind die gesuchten Koeffizientenfunktionen a priori bekannt. Dies vereinfacht die Beurteilung der numerischen Ergebnisse der einzelnen Verfahren, weil damit auf eine Lösung der mit den punktweise rekonstruierten Funktionen gebildeten Eigenwertprobleme verzichtet werden kann.

Kapitel 2

Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

Die Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe ist ein spezielles Randwertproblem. In diesem Kapitel werden Aussagen über Randwertprobleme hergeleitet, soweit sie zum Beweis der Eindeutigkeit der betrachteten inversen Sturm-Liouville-Probleme benötigt werden.

So wird zunächst die Existenz von Eigenwerten bei Randwertproblemen und die Entwickelbarkeit von L^2-Funktionen nach Eigenfunktionen bewiesen. Danach wird das asymptotische Verhalten der Eigenwerte verschiedener Sturm-Liouville-Aufgaben geklärt. Schließlich wird gezeigt, daß bestimmte Funktionensysteme eine gewisse Vollständigkeitseigenschaft besitzen.

2.1 Definitionen

Gewöhnliche Differentialgleichungen, deren Lösungsfunktionen an den Endpunkten des zu betrachtenden Intervalls bestimmte Werte annehmen sollen, werden kurz Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen genannt. Dabei sind Ableitungen, die an den Intervallgrenzen auftreten, jeweils als einseitige Grenzwerte zu verstehen. Mit $\mathcal{C}^k[a,b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, sei die Menge aller Funktionen bezeichnet, die k-mal stetig differenzierbar im offenen Intervall (a,b) sind, und deren k-te Ableitung sich stetig von links in b bzw. von rechts in a fortsetzen läßt.

In dieser Arbeit werden ausschließlich lineare gewöhnliche Differentialgleichungen betrachtet. Daher ist es zweckmäßig, die allgemeine Definition für Randwertprobleme auf lineare Differentialoperatoren zu beschränken. Die jeweiligen Lösungsmengen der betrachteten Differentialgleichungen bilden dann mit der punktweisen Addition von Funktionen und der punktweisen Multiplikation von Skalaren mit Funktionen einen linearen Funktionenraum.

Definition 2.1.1 *(Randwertproblem) Sei n eine natürliche Zahl und $[a,b]$ ein endliches Intervall in $\mathbb{R}$. Sei $D : \mathcal{C}^n[a,b] \longrightarrow \mathcal{C}[a,b]$,*

$$Du := p_0 \frac{d^n}{dx^n} u + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} u + \cdots + p_n u \quad \text{mit } p_j \in \mathcal{C}^{n-j}[a,b], \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

und $p_0(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$, ein linearer Differentialoperator der Ordnung n.

Seien für $k = 1, 2, \ldots, n$ Operatoren $R_k : \mathcal{C}^n[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ der Gestalt

$$R_k u := \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_{kj} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} u(a) + \beta_{kj} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} u(b) \right)$$

mit α_{kj}, $\beta_{kj} \in \mathbb{C}$ gegeben.

Dann ist für jedes $f(x) \in \mathcal{C}[a,b]$ ein Randwertproblem dadurch gegeben, Funktionen $u(x) \in \mathcal{C}^n[a,b]$ zu bestimmen, die die Gleichungen

$$\begin{aligned} Du &= f, && (2.1) \\ R_k u &= 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, && (2.2) \end{aligned}$$

erfüllen.

Falls die Matrizen (α_{kj}) und (β_{kj}) wechselseitig verschiedene Nullzeilen besitzen, nennt man die Randbedingungen separiert. Im weiteren sollen stets alle Randbedingungen separiert sein.

In der Gleichung $Du = f$ stellt D einen linearen Operator dar. Analog zur Theorie der linearen Gleichungssysteme kann man daher nach den Eigenwerten von D fragen, die diesen Operator diagonalisieren. Man setzt also speziell $f := \lambda u$ auf der rechten Seite der Differentialgleichung mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$. Man gelangt so zu dem Begriff des Eigenwertes eines Randwertproblems.

Definition 2.1.2 *(Eigenwerte eines Randwertproblems) Ein Wert $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert eines linearen Randwertoperators D, falls die Gleichungen*

$$\begin{aligned} Du &= \lambda u, && (2.3) \\ R_k u &= 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, && (2.4) \end{aligned}$$

eine Lösung $u \neq 0$ in $\mathcal{C}^n[a,b]$ besitzen.

Jede solche Lösung u wird dann eine zum Eigenwert λ zugehörige Eigenfunktion genannt.

Das Gleichungssystem (2.3)–(2.4) wird kurz auch Eigenwertproblem (für gewöhnliche Differentialoperatoren) genannt.

Es ist keineswegs trivial, ob (2.3)–(2.4) überhaupt Lösungen besitzt, d.h. ob überhaupt Eigenwerte und damit zugehörige Eigenfunktionen für ein gegebenes Problem existieren. Zumindest für eine bestimmte Klasse von Eigenwertproblemen ist die Existenz von Eigenwerten gesichert. Dies ist die Klasse der selbstadjungierten Eigenwertprobleme, wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden soll.

Sei durch

$$(f,g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

eine Bilinearform für die auf dem Intervall $[a,b]$ Lebesgue-meßbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben. Bezeichnet $L^2(a,b)$ die Menge aller Funktionen $f(x)$, die auf $[a,b]$ Lebesgue-meßbar sind und deren Norm

$$||f||_{L^2(a,b)} := (f,f)^{1/2} < \infty$$

ist, dann kann man folgende Definition für selbstadjungierte Eigenwertprobleme geben:

Definition 2.1.3 *Ein Eigenwertproblem heißt selbstadjungiert, falls für alle $u, v \in \mathcal{C}^n[a,b]$ mit $R_k u = R_k v = 0,\ k = 1,\ldots,n$, die Gleichung*

$$(Du, v)_{L^2(a,b)} = (u, Dv)_{L^2(a,b)} \tag{2.5}$$

besteht. Hierbei ist $(\cdot,\cdot)_{L^2(a,b)}$ die Bilinearform

$$(u,v)_{L^2(a,b)} := \int_a^b u(t)\overline{v(t)}\,dt.$$

Mit diesen allgemeinen Definitionen stellen sich die sogenannten Sturm-Liouvilleschen Randwertaufgaben als spezielles Randwertproblem 2. Ordnung dar.

Definition 2.1.4 *(Sturm-Liouvillesche Randwertaufgabe) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall und $q(x)$ eine stetige Funktion auf $[a,b]$. Sei $L : \mathcal{C}^2[a,b] \longrightarrow \mathcal{C}[a,b]$,*

$$Lu := -u'' + q(x)u, \quad a \le x \le b, \quad q(x) \in \mathcal{C}[a,b],$$

ein Differentialoperator 2. Ordnung (Sturm-Liouvillescher Differentialoperator). Dann ist mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} R_0 u &:= \alpha_{00}u(a) + \beta_{00}u(b) + \alpha_{01}u'(a) + \beta_{01}u'(b), \\ R_1 u &:= \alpha_{10}u(a) + \beta_{10}u(b) + \alpha_{11}u'(a) + \beta_{11}u'(b) \end{aligned}$$

und einer Funktion $f(x) \in \mathcal{C}^2[a,b]$ durch die Gleichungen

$$Lu = f, \tag{2.6}$$
$$R_0 u = R_1 u = 0 \tag{2.7}$$

eine (reguläre) Sturm-Liouvillesche Randwertaufgabe gegeben.

Eine sogenannte irreguläre Sturm-Liouville-Aufgabe ergibt sich, falls das Intervall der Differentialgleichung nicht endlich ist oder die Koeffizientenfunktion nicht stetig ist. Diese Fälle sollen jedoch in dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden.

Partielle Integration auf der linken Seite von (2.5) zeigt, daß Sturm-Liouvillesche Eigenwertprobleme mit separierten Randbedingungen selbstadjungiert sind.

Zuletzt sei zur bequemeren Handhabung eine Definition für Eigenwerte der Sturm-Liouville-Aufgabe für bestimmte separierte Randbedingungen gegeben.

Definition 2.1.5 *(Dirichlet- und Neumann-Eigenwerte)*
Eigenwerte eines Sturm-Liouvilleschen Differentialoperators

$$Lu = -u'' + q(x)u, \quad a \leq x \leq b,$$

unter den Randbedingungen

$$u(a) = u(b) = 0$$

sollen im folgenden kurz Dirichlet-Eigenwerte genannt werden.

Die Eigenwerte des Operators L unter den Randbedingungen

$$u'(a) = u'(b) = 0$$

sollen hingegen Neumann-Eigenwerte heißen.

Dirichlet-Neumann-Eigenwerte seien dementsprechend die Eigenwerte von L unter den Randbedingungen

$$u(a) = u'(b) = 0.$$

2.2 Existenz von Eigenwerten

In diesem Abschnitt soll die Existenz von Eigenwerten bei selbstadjungierten Eigenwertproblemen geklärt werden. Der Beweis hierzu setzt grundlegende Eigenschaften der sogannten Greenschen Funktion eines selbstadjungierten Randwertproblems voraus, die z.B. in [4] zu finden sind. Dort wird folgender Satz bewiesen:

Satz 2.2.1 *(Greensche Funktion) Sei l kein Eigenwert eines Randwertproblems (2.1)-(2.2) und $\Omega := [a,b] \times [a,b]$.*

Dann gibt es eine Funktion $G_l : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ (Greensche Funktion) mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Für $k = 0, 1, \ldots, n-2$ sind die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial^k G_l(x,y)}{\partial x^k}$ stetig auf Ω.*

   Für $k = n-1$ hat man Stetigkeit nur, falls $x \neq y$ ist. Es gilt:

$$\frac{\partial^{n-1} G_l(x+0,x)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{n-1} G_l(x-0,x)}{\partial x^{n-1}} = \frac{1}{p_0(x)}$$

2. *Für die Funktion $u(x) := G_l(x,y)$ mit festem $y \in [a,b]$ gelten die Gleichungen $Du = lu$ und $R_k u = 0$, falls $x \neq y$ ist.*

3. *Die Funktion $u(x) := \int_a^b G_l(x,t)f(t)\,dt$ löst das Randwertproblem (2.1)-(2.2).*

4. *Ist das zugehörige Eigenwertproblem selbstadjungiert und $l \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$G_l(x,y) = \overline{G_l(y,x)}.$$

Anhand dieser Eigenschaften der Greenschen Funktion kann gezeigt werden, daß

$$(\mathcal{G}v)(x) := \int_a^b G_l(x,t)v(t)\,dt$$

ein kompakter, hermitischer Operator in $L^2(a,b)$ ist [4]. Für diese Operatoren ist die Existenz von Eigenwerten bewiesen [1]. Somit ist die Existenz der Eigenwerte selbstadjungierter Eigenwertprobleme auf die Existenz von Eigenwerten bei kompakten, selbstadjungierten Operatoren zurückgeführt. Dies ist die wesentliche Idee zum Beweis des folgenden Satzes.

Satz 2.2.2 *Sei*

$$\begin{aligned} Du &= \lambda u, && (2.8)\\ R_k u &= 0, \qquad k = 1,2,\ldots,n, && (2.9) \end{aligned}$$

ein selbstadjungiertes Eigenwertproblem. Dann gilt:

1. *Das Eigenwertproblem besitzt abzählbar unendlich viele reelle Eigenwerte $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

2. *Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.*

3. *Die Eigenwerte lassen sich betragsmäßig anordnen und häufen sich höchstens im Unendlichen:*
$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n| \leq \cdots.$$

Beweis: Zunächst soll bewiesen werden, daß die Eigenwerte reell sind und Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind.

Seien u, v Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ bzw. μ. Dann gilt wegen der Selbstadjungiertheit
$$0 = (Lu,v)_{L^2} - (u,Lv)_{L^2} = (\lambda - \bar{\mu})(u,v)_{L^2}.$$

Für $u = v$ und $\lambda = \mu$ ergibt sich daraus $\lambda = \bar{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$.

Falls $\lambda \neq \mu$ ist, folgt $(u,v)_{L^2} = 0$, d.h. $u(x)$ ist orthogonal zu $v(x)$.

Zum Beweis der Aussage, daß sich die Eigenwerte höchstens im Unendlichen häufen, sei
$$\{\Phi_1(x,l),\ldots,\Phi_n(x,l)\}$$

ein Fundamentalsystem zu $(D-l)u = 0$ [11]. Die Funktionen Φ_j sind analytisch in l. Es gilt die Äquivalenz

$$l \text{ ist Eigenwert von } D \quad \Longleftrightarrow \quad \det(R_k\Phi_j) = 0.$$

Als Linearkombination von analytischen Funktionen ist $d(l) := \det(R_k\Phi_j)$ wieder analytisch. Sei nun $p \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt der Eigenwerte von D, so wäre nach dem Identitätssatz für analytische Funktionen $d(l) \equiv 0$. Die Existenz der Eigenwerte vorausgesetzt, kann es keine Häufungspunkte der Eigenwerte von D im Endlichen geben.

Zur Existenz der Eigenwerte sei $l = 0$ kein Eigenwert von D. Dies kann man durch Addieren einer Konstanten zu D stets erreichen. Man definiere nun den Operator

$$(\mathcal{G}u)(x) := \int_a^b G(x,t)u(t)\,dt,$$

wobei $G(x,y)$ die Greensche Funktion für $l = 0$ des Eigenwertproblems ist.

Offensichtlich sind die Eigenwerte des Operators $\mathcal{G}$ genau die Kehrwerte der Eigenwerte des Differentialoperators D zu den gleichen Eigenfunktionen.

Man zeigt, daß $\mathcal{G}$ ein kompakter, hermitischer Operator in $L^2(a,b)$ ist [4]. Dann ist entweder

$$||\mathcal{G}|| = \sup_{||u||_{L^2}=1} |(\mathcal{G}u,u)_{L^2}| \neq 0 \tag{2.10}$$

oder $-||\mathcal{G}||$ ein Eigenwert von $\mathcal{G}$, der mit μ_0 bezeichnet werden soll. Die zugehörige normierte Eigenfunktion sei $u_0(x)$.

Der Operator

$$(\mathcal{G}_1u)(x) := \int_a^b G_1(x,t)u(t)\,dt$$

mit dem Kern

$$G_1(x,y) := G(x,y) - \mu_0 u_0(x)\overline{u_0(y)}$$

ist dann wiederum kompakt und hermitisch.

Falls

$$||\mathcal{G}_1|| = \sup_{||u||_{L^2}=1} |(\mathcal{G}_1u,u)_{L^2}| \neq 0$$

ist, sei μ_1 Eigenwert von $\mathcal{G}_1$ und $u_1(x)$ die zugehörige normierte Eigenfunktion. Der Fall $||\mathcal{G}_1|| = 0$ wird zum Schluß des Beweises behandelt.

Für $u \in L^2(a,b)$ beliebig ergibt sich

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}_1u,u_0)_{L^2} &= \int_a^b (\mathcal{G}_1u)(t)\overline{u_0(t)}\,dt \\
&= \int_a^b\int_a^b G(t,s)u(s)\overline{u_0(t)}\,ds\,dt - \mu_0\int_a^b\int_a^b u_0(t)\overline{u_0(s)}u(s)\overline{u_0(t)}\,ds\,dt \\
&= \int_a^b u(s)\int_a^b \overline{G(s,t)u_0(t)}\,dt\,ds - \mu_0\int_a^b u(s)\overline{u_0(s)}\underbrace{\int_a^b u_0(t)\overline{u_0(t)}\,dt}_{=1}\,ds \\
&= (u,\mathcal{G}u_0)_{L^2} - \mu_0(u,u_0)_{L^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Setzt man hierbei $u = u_1$, folgt $(u_1, u_0)_{L^2} = 0$. Somit erhält man durch eine analoge Rechnung

$$\mathcal{G}u_1 = \mathcal{G}_1 u_1 = \mu_1 u_1.$$

μ_1 ist also auch ein Eigenwert von $\mathcal{G}$ und wegen (2.10) gilt

$$|\mu_1| = |(\mathcal{G}_1 u_1, u_1)_{L^2}| = |(\mathcal{G}u_1, u_1)_{L^2}| \leq ||\mathcal{G}|| = |\mu_0|.$$

Durch Bildung der Operatoren $\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, ...$ analog zu $\mathcal{G}_1$ folgt, daß der Operator $\mathcal{G}$ die Eigenwerte

$$|\mu_0| \geq |\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \cdots > 0$$

besitzt, falls $||\mathcal{G}_m|| \neq 0$ ist.

Wäre nun ein Eigenwert $\mu_m = 0 = ||\mathcal{G}_m||$, so würde aus der Gleichung

$$0 = (\mathcal{G}_m f)(x) = (\mathcal{G}f)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \mu_k u_k(x)(f, u_k)_{L^2}$$

durch Anwenden des Differentialoperators D die Gleichung

$$0 = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} u_k(x)(f, u_k)_{L^2}$$

für jede beliebige Funktion $f \in L^2(a,b)$ folgen. Somit wäre $\dim L^2(a,b) = m < \infty$. Dies ist ein Widerspruch zu der Tatsache, daß $\dim L^2(a,b) = \infty$ ist. Somit sind die Eigenwerte μ_k betragsmäßig größer Null.

Damit ist alles gezeigt. □

2.3 Reihenentwicklung nach Eigenfunktionen

In diesem Abschnitt soll die Entwickelbarkeit von L^2-Funktionen nach den Eigenfunktionen selbstadjungierter Eigenwertprobleme gezeigt werden. Dazu ist eine Aussage über die Summierbarkeit der Quadrate der sogenannten Fourierkoeffizienten nützlich, die mit der sogenannten Besselschen Ungleichung folgt.

Lemma 2.3.1 *(Besselsche Ungleichung) Sei $f(x) \in L^2(a,b)$ und $\{u_k(x); k \in \mathbb{N}\}$ eine orthonormale Folge von Eigenfunktionen eines selbstadjungierten Eigenwertproblems.*

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2, \quad c_k := (f, u_k)_{L^2} = \int_a^b f(t)\overline{u_k(t)}\, dt.$$

Es besteht die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq ||f||_{L^2}^2 < \infty. \tag{2.11}$$

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Orthonormalität der $u_k(x)$

$$0 \leq ||f - \sum_{k=1}^{n} c_k u_k||_{L^2}^2 = ||f||_{L^2}^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2,$$

woraus die Behauptung des Lemmas folgt. □

Satz 2.3.1 *Seien $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, die orthonormalen Eigenfunktionen des selbstadjungierten Eigenwertproblems*

$$\begin{aligned} Du &= \lambda u, \\ R_j u &= 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

n-ter Ordnung. Sei $f(x) \in \mathcal{C}^n[a,b]$ und es gelte $R_j f = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x)\,, \quad c_k := \int_a^b f(t)\overline{u_k(t)}\,dt,$$

auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen $f(x)$.

Bemerkung 2.3.1 *Die Zahlen $c_k = (f, u_k)_{L^2}$ heißen verallgemeinerte Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x)$ bzgl. des Differentialoperators D.*

Indem man die Gleichung

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x)$$

mit $f(x)$ multipliziert und anschließend von a bis b integriert, erhält man wegen der gleichmäßigen Konvergenz

$$||f||_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2. \tag{2.12}$$

Diese Gleichung wird auch Parsevalsche Gleichung oder Vollständigkeitsrelation genannt.

Zum Beweis des Satzes benötigt man zwei Lemmata:

Lemma 2.3.2 *Für die Eigenwerte $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Operators*

$$(\mathcal{G}v)(x) = \int_a^b G(x,t)v(t)\,dt\,, \quad v \in \mathcal{C}[a,b],$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 0. \tag{2.13}$$

Beweis: Wegen der Selbstadjungiertheit folgt für festes $x \in [a,b]$ aus der Gleichung

$$\int_a^b \overline{G(t,x)} u_k(t)\,dt = \mu_k u_k(x),$$

daß $\mu_k \overline{u_k(x)}$ der k-te Fourierkoeffizient der Funktion $h(t) := G(t,x) = \overline{G(x,t)}$ ist. Also liefert die Besselsche Ungleichung (2.11) für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k^2 |u_k(x)|^2 \leq \int_a^b |G(t,x)|^2\,dt.$$

Integriert man diese Ungleichung nach x und läßt n gegen Unendlich gehen, erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \leq M^2(b-a)^2\,, \quad M := \sup_{a \leq x,t \leq b} |G(t,x)|.$$

Damit folgt $|\mu_n| \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$. □

Lemma 2.3.3 *Für jedes $v(x) \in \mathcal{C}[a,b]$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathcal{G}v - \sum_{k=1}^{n} \mu_k (v, u_k)_{L^2} u_k||_{L^2} = 0. \tag{2.14}$$

Beweis: Für die Integraloperatoren

$$(\mathcal{G}_n v)(x) := \int_a^b G_n(x,t) v(t)\,dt$$

mit den Kernen

$$G_n(x,t) = G(x,t) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k(x) \overline{u_k(t)}$$

gilt laut Beweis des Satzes 2.2.2 die Relation $||\mathcal{G}_n|| = |\mu_{n+1}|$. Daher folgt wegen (2.13)

$$||\mathcal{G}v - \sum_{k=1}^{n} \mu_k (v,u_k)_{L^2} u_k||_{L^2} = ||\mathcal{G}_n v||_{L^2} \leq |\mu_{n+1}| ||v||_{L^2} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

□

Beweis: (zu Satz 2.3.1) Wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich $|(\mathcal{G}v)(x)|^2 \leq M^2(b-a)^2 ||v||_{L^2}^2$ und damit für $0 < l < m$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=l}^{m} \mu_k (v,u_k)_{L^2} u_k(x) \right|^2 &= \left| \left(\mathcal{G} \sum_{k=l}^{m} (v,u_k)_{L^2} u_k \right)(x) \right|^2 \\ &\leq M^2(b-a) \sum_{k=l}^{m} |(v,u_k)_{L^2}|^2. \end{aligned}$$

Die letzte Summe konvergiert wegen der Besselschen Ungleichung (2.11) für $l, m \to \infty$ gegen Null. Somit konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (v, u_k)_{L^2} u_k(x)$$

für $x \in [a, b]$ gleichmäßig gegen eine Funktion aus $\mathcal{C}[a, b]$. Da $\mathcal{G}v$ stetig ist, muß wegen (2.14)

$$(\mathcal{G}v)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (v, u_k)_{L^2} u_k(x) \tag{2.15}$$

für alle $x \in [a, b]$ gelten. Für $f \in \mathcal{C}^n[a, b]$ mit $R_j f = 0$ ist durch $v := Df$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$ definiert und es gilt $f = \mathcal{G}v$. Die Rechnung

$$\begin{aligned} \mu_k (v, u_k)_{L^2} &= (v, \mu_k u_k)_{L^2} \\ &= (v, \mathcal{G}u_k)_{L^2} \\ &= (\mathcal{G}v, u_k)_{L^2} \\ &= (f, u_k)_{L^2} \end{aligned}$$

zeigt, daß mit (2.15) die Behauptung des Satzes folgt. □

Schließlich überträgt sich die Entwickelbarkeit nach den Eigenfunktionen auch auf L^2−Funktionen wie folgt. Allerdings ist dann die Konvergenz der Entwicklung nicht mehr gleichmäßig, sondern besteht nur noch in der L^2−Norm. Der Operator

$$Pf := \sum_{k=1}^{\infty} (f, u_k)_{L^2} u_k$$

stellt eine orthogonale Projektion $P : L^2 \longrightarrow \mathcal{C}_0^\infty$ dar, denn erstens gilt

$$Pf = f \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{C}_0^\infty(a, b),$$

wie gerade gezeigt, und zweitens ergibt sich mit der Besselschen Ungleichung (2.11)

$$||P|| = \sup_{||u||_{L^2}=1} ||Pu||_{L^2} = 1.$$

Somit ist P surjektiv auf $L^2(a, b)$, da $\mathcal{C}_0^\infty(a, b)$ dicht in $L^2(a, b)$ liegt. Daraus erhält man die Gültigkeit von Satz 2.3.1 auch für L^2-Funktionen, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert sind.

2.4 Asymptotik der Eigenwerte

Für die Eigenwerte einer regulären Sturm-Liouville-Aufgabe kann man zeigen, daß sie nach unten beschränkt sind [11]. Dadurch lassen sich die Eigenwerte der Größe nach anordnen, etwa $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$. In diesem Abschnitt soll das Wachstum der Eigenwerte näher beschrieben werden. Die Kenntnis über die Asymptotik der Eigenwerte wird später zum Beweis der Eindeutigkeit der Lösung des inversen Problems benötigt.

Zur Asymptotik der Eigenwerte sind zwei Sätze von zentraler Bedeutung. Anhand eines Vergleichssatzes können die Eigenwerte zweier Randwertprobleme gegeneinander abgeschätzt werden. Der Beweis dieses Satz ist sehr einfach mittels einer Charakterisierung der Eigenwerte als Maximum-Minimumwerte zu erbringen [5].

Satz 2.4.1 *(Courantsches Maximum-Minimumprinzip) Sei das Eigenwertproblem*

$$Du = \lambda u, \quad R_k u = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

selbstadjungiert. Ferner seien die Eigenwerte von D nach unten beschränkt und $V :=< v_1, \ldots, v_{j-1} >$ ein $(j-1)$-dimensionaler Vektorraum, der von stückweise stetigen Funktionen $v_1, \ldots, v_{j-1}$ mit $R_k v_m = 0$, $k = 1, \ldots, n$, $m = 1, \ldots, j-1$, erzeugt wird.

Dann berechnen sich die Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ anhand der Formel

$$\lambda_j = \max_{\dim(V)=j-1} \min_{\substack{\|u\|_{L^2}=1, \\ R_k u=0, \\ u \perp V}} (Du, u)_{L^2}.$$

Beweis: Seien $u_1, u_2, \ldots, u_{j-1}$ die zu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{j-1}$ gehörigen, orthonormierten Eigenfunktionen von D und $V :=< u_1, \ldots, u_{j-1} >$ der von $u_1, \ldots, u_{j-1}$ aufgespannte $(j-1)$-dimensionale Vektorraum. Im Fall $j = 1$ sei V der Nullraum $\{0\}$. Ferner sei

$$\lambda_j(V) := \min_{\substack{\|u\|_{L^2}=1, \\ R_k u=0, \\ u \perp V}} (Du, u)_{L^2}.$$

Damit ergibt sich:

1. Es gilt $\lambda_j(V) = \lambda_j$. Denn aus $u \perp V$ folgt $u = \sum_{l=j}^{\infty} c_l u_l$. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \lambda_j(V) &= \min_{\|u\|_{L^2}=1} \left(\sum_{l=j}^{\infty} c_l D u_l, \sum_{l=j}^{\infty} c_l u_l \right)_{L^2} \\ &= \min_{\sum c_l^2=1} \left(\sum_{l=j}^{\infty} c_l \lambda_l u_l, \sum_{l=j}^{\infty} c_l u_l \right)_{L^2} \\ &= \min_{\sum c_l^2=1} \sum_{l=j}^{\infty} c_l^2 \lambda_l \\ &= \lambda_j, \quad \text{da} \quad \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \ldots. \end{aligned}$$

2. Für jeden von $j-1$ linear unabhängigen, auf $[a,b]$ stückweise stetigen Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_j$ aufgespannten Vektorraum $\tilde{V}$ der Dimension $j-1$ gilt
$$\lambda_j(\tilde{V}) \leq \lambda_j.$$
Denn es gibt eine Funktion u mit $u \perp \tilde{V}$, $||u||_{L^2} = 1$ und $R_k u = 0$:
Setzt man
$$u := \sum_{l=1}^{j} d_l u_l,$$
so ergeben die Bedingungen $u \perp \tilde{V}$ und $||u||_{L^2}^2 = \sum_{l=1}^{j} d_l^2 = 1$ insgesamt j Gleichungen für die j Variablen d_l, $l = 1, \ldots, j$. Damit sind die Zahlen d_l eindeutig bestimmbar und man erhält die Abschätzung
$$\begin{aligned} \lambda_j(\tilde{V}) &= \min_{\substack{||u||_{L^2}=1,\\ R_k u=0,\\ u\perp\tilde{V}}} (Du, u)_{L^2} \\ &\leq \sum_{l=1}^{j} \lambda_l d_l^2 \\ &\leq \lambda_j \sum_{l=1}^{j} d_l^2 = \lambda_j. \end{aligned}$$

Mit 1. und 2. folgt die Behauptung des Satzes. □

Aus diesem Prinzip folgt, wie schon angedeutet, unmittelbar der erwähnte Vergleichssatz.

Satz 2.4.2 *(Vergleichssatz) Seien*
$$D_1 u = \lambda u, \quad D_2 u = \lambda u$$
zwei selbstadjungierte Eigenwertprobleme mit den gleichen Randbedingungen $R_k u = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Das erste Problem habe die Eigenwerte
$$\lambda_1^{(1)} \leq \lambda_2^{(1)} \leq \cdots.$$
Für alle Funktionen $u(x)$ mit $R_k u = 0$, $k = 1, \ldots, n$, gelte die Beziehung
$$(D_1 u, u)_{L^2} \leq (D_2 u, u)_{L^2}.$$
Dann hat das zweite Eigenwertproblem die Eigenwerte $\lambda_1^{(2)} \leq \lambda_2^{(2)} \leq \cdots$ und es gilt
$$\lambda_j^{(1)} \leq \lambda_j^{(2)}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Beweis: Mit dem Maximum-Minimumprinzip gilt

$$\begin{aligned}\lambda_j^{(1)} &= \max_{\dim(V)=j-1} \min_{\substack{\|u\|_{L^2}=1,\\ R_k u=0,\\ u\perp V}} (D_1 u, u)_{L^2} \\ &\leq \max_{\dim(V)=j-1} \min_{\substack{\|u\|_{L^2}=1,\\ R_k u=0,\\ u\perp V}} (D_2 u, u)_{L^2} = \lambda_j^{(2)}.\end{aligned}$$

□

Eine Anwendung des Vergleichssatzes 2.4.2 auf den Operator $Du := -u'' + q(x)u$ liefert eine Abschätzung für die Eigenwerte von D.

Sei dazu $\tilde{q}(x)$ eine stetige Funktion auf $[a_1, a_2]$. Definiert man mit

$$\tilde{D}u := -u'' + \tilde{q}(x)u \quad \text{und} \quad d := \max_{[a_1,a_2]} |q(x) - \tilde{q}(x)|$$

die beiden Operatoren

$$D_1 u := \tilde{D}u - du \quad \text{und} \quad D_2 := \tilde{D}u + du,$$

so folgt

$$(D_1 u, u)_{L^2} \leq (Du, u)_{L^2} \leq (D_2 u, u)_{L^2}.$$

Wegen des Vergleichssatzes 2.4.2 gilt dann

$$\tilde{\lambda}_n - d \leq \lambda_n \leq \tilde{\lambda}_n + d,$$

wobei $\tilde{\lambda}_n$ die Eigenwerte von $\tilde{D}$ sind. Die letzte Abschätzung ist ein Hilfsmittel für den Beweis des nächsten Satzes, der asymptotische Formeln für die Eigenwerte verschiedener Randwertprobleme liefert.

Satz 2.4.3 *(asymptotisches Verhalten der Eigenwerte)*
Sei $q \in \mathcal{C}^2[a_1, a_2]$. Seien $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die Eigenwerte des Problems

$$-u'' + q(x)u = \lambda u \quad \text{für } a_1 \leq x \leq a_2$$

mit den Randbedingungen

$$u(a_j)\cos\alpha_j + u'(a_j)\sin\alpha_j = 0, \quad 0 \leq \alpha_j < \pi, \quad j = 1, 2.$$

Dann genügen die Eigenwerte λ_n den folgenden asymptotischen Ausdrücken:

1. *Für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (Dirichletsche Randbedingungen) gilt*

$$\lambda_n = c_1^2 n^2 + c_2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Für $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ oder $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ (gemischte Randbedingungen) gilt

$$\lambda_n = c_1^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + c_2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Für $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ (Neumannsche Randbedingungen) gilt

$$\lambda_n = c_1^2 (n-1)^2 + c_2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Hierbei sind c_1 und c_2 Konstanten, die von n unabhängig sind:

$$c_1 = \frac{\pi}{a_2 - a_1}, \quad c_2 = \frac{1}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{a_2} q(t)\, dt.$$

Beweis: Zum Beweis soll die WKB-Methode verwendet werden [13]. Dazu wählt man

$$v(x) = A(x) \sin \Phi(x)$$

als Ansatz für eine Eigenfunktion. Es folgt

$$-v'' + q(x)v = -\left(\frac{A''}{A} - (\Phi')^2 - q(x)\right) v - (2A'\Phi' + A\Phi'') \cos \Phi. \tag{2.16}$$

Für $A(x) = \Phi'(x)^{-1/2}$ verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite in (2.16), falls $\Phi'(x) > 0$ für alle $x \in [a_1, a_2]$ gilt. Dies ist sicherlich der Fall, wenn man für hinreichend großes λ

$$\Phi'(x) = \sqrt{\lambda} - \frac{q(x)}{2\sqrt{\lambda}}$$

setzt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} -v'' + q(x)v &= \left((\Phi')^2 + q(x) + \frac{3}{4}\frac{(\Phi'')^2}{(\Phi')^2} - \frac{1}{2}\frac{\Phi'''}{\Phi'}\right) v \\ &= \left(\lambda - q(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + q(x) + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) v \\ &= \left(\lambda + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) v. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Um den Vergleichssatz 2.4.2 anwenden zu können, werden jetzt die Randwerte $\Phi_j := \Phi(a_j)$, $j = 1, 2$, so bestimmt, daß die Eigenfunktion $v(x)$ in den verschiedenen Fällen die Randbedingungen erfüllt.

Man erhält aus

$$\begin{aligned} 0 &= v_j \cos \alpha_j + v_j' \sin \alpha_j \\ &= (\Phi_j')^{-1/2} \sin \Phi_j \cos \alpha_j + \left((\Phi_j')^{1/2} \cos \Phi_j - \frac{\Phi_j''(\Phi_j')^{1/2}}{2(\Phi_j')^2} \sin \Phi_j\right) \sin \alpha_j \\ &= \left((\Phi_j')^{-1/2} \cos \alpha_j - \frac{\Phi_j''(\Phi_j')^{1/2}}{2(\Phi_j')^2}\right) \sin \Phi_j + (\Phi_j')^{-1/2} \sin \alpha_j \cos \Phi_j \end{aligned}$$

für den Fall, daß $\sin\alpha_j \neq 0$ ist (Neumannsche Randbedingungen), durch einige Umformungen (man beachte $\Phi_j' > 0$) mit

$$g_j := \frac{\cot\alpha_j}{\Phi_j'} - \frac{\Phi_j''}{2(\Phi_j')^2}, \quad j = 1, 2,$$

und $l < m \in \mathbb{Z}$ das Ergebnis

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi + \arctan g_1,\\ \Phi_2 &= \left(m - \frac{1}{2}\right)\pi + \arctan g_2.\end{aligned}$$

Falls $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = 0$ ist (Dirichletsche Randbedingungen), ergibt sich

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= l\pi\\ \Phi_2 &= m\pi.\end{aligned}$$

Durch Kombination dieser beiden Fälle erhält man entsprechende Formeln für Φ_1 und Φ_2 bei gemischten Randbedingungen.

Seien $\lambda = \tilde{\lambda}_n$ Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned}\Phi_2 - \Phi_1 &= \int_{a_1}^{a_2} \Phi'(t)\,dt\\ &= (a_2 - a_1)\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_{a_1}^{a_2} q(t)\,dt,\end{aligned} \tag{2.18}$$

für die, wie oben vorausgesetzt, $\Phi'(x) > 0$ ist. Die Funktion $v = (\Phi')^{-1/2}\sin\Phi$ hat im offenen Intervall (a_1, a_2) genau $(k - l - 1)$ Nullstellen, da Φ streng monoton steigend ist und für die Randwerte $l\pi < \Phi_1 < (l+1)\pi$, $(k-1)\pi < \Phi_2 < k\pi$ $(0 \leq l < k)$ gilt. Daher nimmt $\Phi(x)$ in (a_1, a_2) genau $(k - l - 1)$-mal den Wert eines ganzzahligen Vielfachen von π an. Da v nach (2.17) die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}-v'' + q(x)v &= (\lambda + h(x, \lambda))v,\\ h(x, \lambda) &:= \frac{q^2(x)}{4\lambda} - \frac{q''(x)}{4\lambda - 2} - \frac{3}{4}\frac{(q'(x))^2}{(2\lambda - q(x))^2},\end{aligned}$$

erfüllt, sind die $\tilde{\lambda}_n$ genau die Eigenwerte dieser Gleichung. Wegen des Vergleichssatzes 2.4.2 genügen die Eigenwerte λ_n der Abschätzung

$$\tilde{\lambda}_n + \min_{x\in[a_1,a_2]} h(x, \tilde{\lambda}_n) \quad\leq\quad \lambda_n \quad\leq\quad \tilde{\lambda}_n + \max_{x\in[a_1,a_2]} h(x, \tilde{\lambda}_n).$$

Aus (2.18) ergibt sich

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_n} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{2(a_2 - a_1)\sqrt{\tilde{\lambda}_n}}\int_{a_1}^{a_2} q(t)\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Phi_2-\Phi_1}{a_2-a_1} + \frac{1}{2(\Phi_2-\Phi_1)(1+O(1/\tilde{\lambda}_n))}\int_{a_1}^{a_2} q(t)\,dt \\
\Longrightarrow \quad \tilde{\lambda}_n &= \left(\frac{\Phi_2-\Phi_1}{a_2-a_1}\right)^2 + \frac{1}{a_2-a_1}\int_{a_1}^{a_2} q(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_n}\right).
\end{aligned}
$$

Da für alle $x \in [a_1, a_2]$ die Abschätzung $h(x,\lambda) = O(1/\lambda)$ gültig ist und $\arctan g_j$ die Größenordnung $O(1/\sqrt{\lambda})$ hat, sind die asymptotischen Entwicklungen für alle drei Randbedingungen bewiesen. □

Desweiteren sind Aussagen zur Asymptotik der Eigenfunktionen bezüglich großer Eigenwerte für die weitere Untersuchung des inversen Sturm-Liouville-Problem von Interesse. Folgender Satz wird in [18] zitiert.

Satz 2.4.4 *Sei $q(x) \in \mathcal{C}[a_1, a_2]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda = s^2$, $s = \sigma + i\tau$. Die Funktion $u(x,\lambda)$ sei eine Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$
\begin{aligned}
u'' + \lambda u = q(x)u, &\qquad a_1 \le x \le a_2, \\
u(a_1,\lambda) = \gamma_1, & \\
u'(a_1,\lambda) = \gamma_2. &
\end{aligned}
$$

Dann existiert eine Konstante $s_0 > 0$, so daß für $(\gamma_1,\gamma_2) = (0,1)$ und $|s| > s_0$ die Abschätzungen

$$u(x,\lambda) = \frac{\sin s(x-a_1)}{s} + O\left(\frac{e^{|\tau|(x-a_1)}}{|s|^2}\right)$$

und

$$u'(x,\lambda) = \cos s(x-a_1) + O\left(\frac{e^{|\tau|(x-a_1)}}{|s|}\right)$$

für alle $x \in [a_1, a_2]$ gelten.

Für $(\gamma_1,\gamma_2) = (1,0)$ existiert eine Konstante $\tilde{s}_0 > 0$, so daß mit $|s| > \tilde{s}_0$ die Abschätzungen

$$\tilde{u}(x,\lambda) = \cos s(x-a_1) + O\left(\frac{e^{|\tau|(x-a_1)}}{|s|}\right)$$

und

$$\tilde{u}'(x,\lambda) = -s\sin s(x-a_1) + O(e^{|\tau|(x-a_1)})$$

für alle $x \in [a_1, a_2]$ gelten.

Beweis: O.B.d.A kann man annehmen, daß mit $l := a_2 - a_1$ die Intervallgrenzen $a_1 = 0$, $a_2 = l$ lauten, da durch eine Verschiebung des Intervalls die Lösungen $u(x,\lambda)$ der Anfangswertaufgabe entsprechend verschoben werden. Für die Funktionen $u(x,\lambda)$ und $\tilde{u}(x,\lambda)$ gelten die Integralgleichungen (s. [26])

$$u(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-t)q(t)u(t,\lambda)\,dt, \tag{2.19}$$

$$\tilde{u}(x,\lambda) = \cos sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-t)q(t)\tilde{u}(t,\lambda)\,dt. \tag{2.20}$$

Setzt man $u(x,\lambda) = e^{|\tau|x} f(x)$, so ist zu zeigen, daß $f(x) = O(1/|s|)$ für alle $0 \le x \le l$ gilt. Aus (2.19) folgt zunächst

$$f(x) = \frac{\sin sx}{s} e^{-|\tau|x} + \frac{1}{s} \int_0^x e^{-|\tau|(x-t)} \sin s(x-t) q(t) f(t)\, dt.$$

Setzt man $M := \sup\limits_{0 \le x \le l} |f(x)|$, so ergibt sich die Abschätzung

$$M \le \frac{1}{|s|} + \frac{M}{|s|} \int_0^x |q(t)|\, dt.$$

Es folgt

$$M \le \frac{1}{|s|} \left(1 - \frac{1}{|s|} \int_0^l |q(t)|\, dt \right)^{-1}$$

unter der Bedingung, daß der rechts stehende Kehrwert positiv ist. Dies ist sicherlich erfüllt, falls

$$|s| > \int_0^l |q(t)|\, dt$$

gilt. Damit erhält man für die Funktion $u(x,\lambda)$ die Abschätzung

$$u(x,\lambda) = O(|s|^{-1} e^{|\tau|x}). \tag{2.21}$$

Anhand (2.20) erhält man für die Funktion $\tilde{u}(x,\lambda)$ durch analoge Rechnung das Ergebnis

$$\tilde{u}(x,\lambda) = O(e^{|\tau|x}). \tag{2.22}$$

Indem man diese Abschätzungen in die Integralgleichungen (2.19), (2.20) eingesetzt, ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} u(x,\lambda) &= \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|s|^2} \right), \\ \tilde{u}(x,\lambda) &= \cos sx + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|s|} \right). \end{aligned}$$

Differenziert man die Integralgleichungen (2.19), (2.20) nach x, so erhält man

$$\begin{aligned} u'(x,\lambda) &= \cos sx + \int_0^x \cos s(x-t) q(t) u(t,\lambda)\, dt, \\ \tilde{u}'(x,\lambda) &= -s \sin sx + \int_0^x \cos s(x-t) q(t) \tilde{u}(t,\lambda)\, dt. \end{aligned}$$

Mit (2.21) bzw. (2.22) leitet man daraus die asymptotischen Abschätzungen

$$\begin{aligned} u'(x,\lambda) &= \cos sx + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|s|} \right), \\ \tilde{u}'(x,\lambda) &= -s \sin sx + O\left(e^{|\tau|x} \right) \end{aligned}$$

her. □

Mit den bisherigen Resultaten lassen sich nun Aussagen über das asymptotische Verhalten der Anfangsbedingungen der normierten Eigenfunktionen Sturm-Liouvillescher Eigenwertprobleme treffen.

Satz 2.4.5 *Sei* $q(x) \in \mathcal{C}[a_1, a_2]$. *Seien* $\lambda_n,\ n = 1, 2, \ldots$, *die Eigenwerte des Problems*

$$-v'' + q(x)v = \lambda v$$

mit den Randbedingungen

$$v(a_j)\cos\alpha_j + v'(a_j)\sin\alpha_j = 0, \quad 0 \le \alpha_j < \pi, \quad j = 1, 2.$$

Dann gelten für die normierten Eigenfunktion $v_n(x)$ *folgende asymptotische Beziehungen:*

1. *Falls* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ *ist, gilt*
$$|v_n'(a_1)| = \sqrt{\lambda_n}\left(\sqrt{\frac{2}{a_2 - a_1}} + O(\frac{1}{n})\right).$$
2. *Falls* $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ *ist, gilt*
$$|v_n(a_1)| = \sqrt{\frac{2}{a_2 - a_1}} + O(\frac{1}{n}).$$

Beweis: Da nach Satz (2.2.2) die Eigenwerte $\lambda_n,\ n = 1, 2, \ldots$, reell sind, ergibt sich wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Anfangswertaufgabe aus Satz 2.4.4

$$v_n(x) = v_n'(a_1)\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}(x - a_1) + O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\right)$$

bzw.

$$v_n(x) = v_n(a_1)\left(\cos\sqrt{\lambda_n}(x - a_1) + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{1/2}}\right)\right),$$

falls $\lambda_n > \max\{s_0, \tilde{s}_0\}$ ist.

Integration über das Quadrat der Funktionen $v_n(x)$ liefert dann im ersten Fall mit der Formel $2\sin^2 ax = 1 - \cos 2ax$ die Relation

$$\begin{aligned} 1 = \int_{a_1}^{a_2} v_n^2(t)\,dt &= \frac{(v_n'(a_1))^2}{\lambda_n}\left(\int_{a_1}^{a_2}\sin^2\sqrt{\lambda_n}(t - a_1)\,dt + O\left(\frac{1}{\lambda_n^{1/2}}\right)\right) \\ &= \frac{(v_n'(a_1))^2}{\lambda_n}\left(\frac{a_2 - a_1}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}(a_2 - a_1)}{2\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)\right), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (v_n'(a_1))^2 &= \lambda_n\left(\frac{2}{a_2 - a_1} + O(\frac{1}{n})\right) \\ \Longrightarrow \quad |v_n'(a_1)| &= \sqrt{\lambda_n}\left(\sqrt{\frac{2}{a_2 - a_1}} + O(\frac{1}{n})\right). \end{aligned}$$

Der zweite Fall des Satzes ergibt sich mit der Formel $2\cos^2 ax = 1 + \cos 2ax$ analog. □

2.5 Vollständige Funktionensysteme

Um die Eindeutigkeit einer Lösung des inversen Problems zeigen zu können, benötigt man den Begriff des vollständigen Funktionensystems.

Definition 2.5.1 *Für eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen soll das Funktionensystem*

$$\{\varphi(x,\lambda_n);\ n \in \mathbb{N}\}$$

vollständig in $L^2(-\pi,\pi)$ heißen, falls für jede Funktion $f(x) \in L^2(-\pi,\pi)$ aus

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt = 0, \quad n = 1,2,\ldots,$$

folgt, daß $f(x)$ fast überall auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ identisch Null ist.

Zunächst seien zwei Sätze zitiert, die hier nicht bewiesen werden sollen, aber für das weitere benötigt werden. Die Beweise findet man z.B. in [32].

Satz 2.5.1 *(Jensen) Sei $f(z)$ holomorph in $B_R(0) := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$. Sei $f(0) \neq 0$ und $n(x)$ gebe die Anzahl der Nullstellen der Funktion $f(z)$ in $B_x(0)$ an.*

Dann gilt für $r < R$

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \log|f(0)|.$$

Ferner gilt (auch für $f(0) = 0$) die Ungleichung

$$\int_1^r \frac{n(t)}{t}\,dt < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta + A,$$

wobei A eine Konstante ist, die nur von $f(z)$ abhängt.

Satz 2.5.2 *(Produktsatz) Sei $f(z)$ eine ganze Funktion, die der asymptotischen Gleichung*

$$f(z) = O(e^{|z|^{3/2}}) \qquad \text{für } |z| \to \infty$$

genügt. Falls $z_k \neq 0$, $k = 1,2,\ldots$, die von Null verschiedenen Nullstellen der Funktion $f(z)$ sind, ist

$$f(z) = az^n e^{bz} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}$$

die Produktdarstellung von $f(z)$. Hierbei ist n die Ordnung der Nullstelle im Ursprung. Die Zahlen a, b sind geeignete Konstanten.

Für das Funktionensystem $\{e^{i\lambda_n x};\ n \in \mathbb{N}\}$ gibt es folgendes Vollständigkeitskriterium [19]:

Satz 2.5.3 *Sei* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Zahlen und* $\Lambda(x)$ *die Anzahl der Werte, für die* $|\lambda_n| \leq x$ *gilt. Falls die Ungleichung*

$$\int_1^x \frac{\Lambda(t)}{t}\, dt > 2x - \frac{1}{2}\log x - C$$

mit einer Konstanten $C > 0$ *besteht, ist das Funktionensystem*

$$\{e^{i\lambda_n x};\ n \in \mathbb{N}\}$$

vollständig in $L^2(-\pi, \pi)$.

Beweis: Angenommen, die Aussage des Satzes ist nicht richtig. Dann gibt es eine Funktion $f(x) \in L^2(-\pi,\pi)$, die nicht identisch verschwindet, so daß

$$H(w) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{iwt}\, dt$$

an den Stellen $w = \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$, gleich Null ist. Da $f(x)$ ungleich Null ist, verschwindet $H(w)$ nicht identisch.

Sei $n(r)$ die Anzahl der Nullstellen von $H(w)$, deren Betrag kleiner gleich r ist. Im folgenden sei A stets eine Konstante, die höchstens von $f(x)$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt.

Da aus der Definition der Funktion $H(w)$ die Abschätzung

$$H(re^{i\theta}) = O(e^{\pi r|\sin\theta|})$$

folgt, gilt mit der Ungleichung aus Satz 2.5.1:

$$\begin{aligned}\int_1^r \frac{n(t)}{t}\, dt &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|H(re^{i\theta})|\, d\theta + A \\ &\leq 2r + A. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Nun ist $n(t)$ eine monoton steigende Funktion. Damit ergibt sich

$$n(r)\int_r^{2r} \frac{dt}{t} \leq \int_r^{2r} \frac{n(t)}{t}\, dt \leq \int_1^{2r} \frac{n(t)}{t}\, dt < 4r + A.$$

Also ist $n(r) < 4r/\log 2 + A$. Da $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilmenge der Nullstellenmenge von $H(w)$ ist, ergibt sich

$$\Lambda(r) < \frac{4}{\log 2} r + A.$$

O.B.d.A. kann man annehmen, daß kein Folgeglied λ_n gleich Null ist. Wegen der letzten Abschätzung konvergiert das Produkt

$$F(w) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{w}{\lambda_n}\right)e^{w/\lambda_n}.$$

Da $H(w)$ die Nullstellen $w = \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$, besitzt, ist

$$G(w) := H(w)/F(w)$$

eine ganze Funktion. Bezeichnet nun $n_1(r)$ die Anzahl der Nullstellen der Funktion $G(w)$, die betragsmäßig kleiner gleich r sind, dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} n_1(r) &= n(r) - \Lambda(r), \quad \text{und also} \\ \int_1^r \frac{n_1(t)}{t}\,dt &= \int_1^r \frac{n(t)}{t}\,dt - \int_1^r \frac{\Lambda(t)}{t}\,dt. \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung

$$\int_1^r \frac{\Lambda(t)}{t}\,dt > 2r - \frac{1}{2}\log r - C \tag{2.24}$$

und (2.23) ergibt sich dann

$$\int_1^r \frac{n_1(t)}{t}\,dt \le \frac{1}{2}\log r + A.$$

Daraus folgt, daß $n_1(r) = 0$ sein muß. Somit hat die Funktion $G(w)$ keine Nullstellen. Anhand des Faktorisierungssatzes gilt folglich $H(w) = ae^{bw}F(w)$. Insbesondere gilt dann

$$|H(iv)| = e^{cv}|aF(iv)|. \tag{2.25}$$

Dabei sind a, b und c passende Konstanten.

Für jedes hinreichend kleine $\epsilon > 0$ ergibt sich aus der Definition von $H(w)$ und mittels der Hölderschen Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} |H(iv)| &\le \left(\int_{-\pi}^{-\pi+\epsilon} + \int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} + \int_{\pi-\epsilon}^{\pi}\right) e^{-vt}|f(t)|\,dt \\ &\le \left[\int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} e^{2vt}\,dt\right]^{1/2} \left[\int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} |f(t)|^2\,dt\right]^{1/2} \\ &\quad + \left[\int_{-\pi}^{-\pi+\epsilon} e^{2vt}\,dt\right]^{1/2} \left[\int_{-\pi}^{-\pi+\epsilon} |f(t)|^2\,dt\right]^{1/2} \\ &\quad + \left[\int_{\pi-\epsilon}^{\pi} e^{2vt}\,dt\right]^{1/2} \left[\int_{\pi-\epsilon}^{\pi} |f(t)|^2\,dt\right]^{1/2} \\ &\le 2e^{(\pi-\epsilon)|v|}|v|^{-1/2} \left[\int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} |f(t)|^2\,dt\right]^{1/2} \\ &\quad + 4e^{\pi|v|}|v|^{-1/2} \left[\left(\int_{-\pi}^{-\pi+\epsilon} + \int_{\pi-\epsilon}^{\pi}\right) |f(t)|^2\,dt\right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Jetzt gibt es für jedes $\delta > 0$ einen Wert ϵ, so daß

$$\left[\left(\int_{-\pi}^{-\pi+\epsilon} + \int_{\pi-\epsilon}^{\pi}\right) |f(t)|^2\,dt\right]^{1/2} \le \delta$$

bleibt. Deswegen folgen mit einer positiven Konstanten A die Ungleichungen

$$|H(iv)| \leq Ae^{\pi|v|}|v|^{-1/2}(e^{-\epsilon|v|} + \delta)$$

und

$$\log|H(iv)| \leq \pi|v| - \frac{1}{2}\log|v| + \log(e^{-\epsilon|v|} + \delta) + \log A.$$

Da δ beliebig klein gewählt werden kann, folgt

$$\lim_{|v|\to\infty}\left(\log|H(iv)| - \pi|v| + \frac{1}{2}\log|v|\right) = -\infty$$

und anhand der Gleichung (2.25)

$$\lim_{|v|\to\infty}\left(\log|F(iv)| + cv - \pi|v| + \frac{1}{2}\log|v|\right) = -\infty. \tag{2.26}$$

Andererseits besteht aufgrund der Definition der Funktion $F(w)$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
\log|F(iv)| &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \log(1 + v^2/t^2)\, d\Lambda(t) \\
&= \int_0^\infty \frac{2v^2 t}{(t^2+v^2)^2}\int_0^t \frac{\Lambda(s)}{s}\, ds\, dt \quad \text{(zweimal partiell integriert).}
\end{aligned}$$

Wendet man nun die Voraussetzung (2.24) auf die letzte Formel an, so erhält man

$$\begin{aligned}
\log|F(iv)| &\geq \int_0^\infty \frac{2v^2 t}{(t^2+v^2)^2}\left(2t - \frac{1}{2}\log t - A\right) dt \\
&\geq \pi|v| - \frac{1}{2}\log|v|\int_0^\infty \frac{2s}{(1+s^2)^2}\, ds - A \quad \text{(Substitution } t = |v|s\text{)} \\
&\geq \pi|v| - \frac{1}{2}\log|v| - A.
\end{aligned}$$

Dies steht aber im Widerspruch zu (2.26). Somit ist der Satz bewiesen. □

Mit diesen Vorbereitungen läßt sich der folgende Satz über die Vollständigkeit der später verwendeten Funktionensysteme formulieren.

Satz 2.5.4 *Sei* $q(x) \in L^2(0,\pi)$. *Seien* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *die Dirichlet-Eigenwerte und* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *die Dirichlet-Neumann-Eigenwerte der Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned}
-u'' + q(x)u = \lambda u, &\qquad 0 \leq x \leq \pi, \\
u(0) = u(\pi) = 0 \quad \text{bzw.} &\quad u(0) = u'(\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Dann sind die Funktionensysteme

$$\{\sin\sqrt{\lambda_n}x;\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad \{\sin\sqrt{\mu_n}x;\ n \in \mathbb{N}\}$$

vollständig in $L^2(0,\pi)$.

Beweis: Der Beweis wird nur für den Fall der Dirichlet-Eigenwerte durchgeführt. Im Fall der Dirichlet-Neumann-Eigenwerte verläuft der Beweis analog.

Bezeichne $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x und $\Lambda(x)$ die Anzahl der Werte, für die $\sqrt{\lambda_n} \leq x$ ist. Nach Satz 2.4.3 gilt

$$\sqrt{\lambda_n} = n + O(1/n).$$

Für hinreichend großes x ist also $\Lambda(x) = [x] + 1$. Es folgt

$$\frac{\Lambda(x)}{x} \geq 1.$$

Somit ist die Ungleichung

$$\int_1^r \frac{\Lambda(t)}{t}\,dt > r - \frac{1}{2}\log r - C$$

mit einer geeigneten Konstante $C > 0$ erfüllt. Falls bei den Integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{i\sqrt{\lambda_n}t}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\sqrt{\lambda_n}t\,dt + i\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin\sqrt{\lambda_n}t\,dt$$

nur ungerade Funktionen $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ betrachtet werden, folgt aus Satz 2.5.3 die Behauptung. $\square$

Kapitel 3

Inverse Sturm-Liouville-Probleme

Das inverse Sturm-Liouville-Problem, welches hier näher untersucht werden soll, besteht darin, eine Funktion $q(x)$ auf einem Intervall so zu bestimmen, daß das (reguläre) Eigenwertproblem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in [a_1, a_2], \tag{3.1}$$

mit den Randbedingungen

$$y(a_j)\cos\alpha_j + y'(a_j)\sin\alpha_j = 0, \quad 0 \le \alpha_j < \pi, \quad j = 1, 2, \tag{3.2}$$

eine vorgegebene Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten besitzt. Allerdings ist bekannt, daß eine Folge von Eigenwerten die zu bestimmende Funktion $q(x)$ nicht eindeutig festlegt [3].

Vielmehr müssen zusätzliche Bedingungen aufgestellt werden, um die Funktion $q(x)$ eindeutig zu bestimmen. Mögliche zusätzliche Bedingungen sind u.a.:

- Die Funktion $q(x)$ sei so zu bestimmen, daß das Eigenwertproblem (3.1) eine weitere Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten bei veränderten Randbedingungen besitzt [3], [18]. Z.B. sei in (3.2) α_2 durch $\tilde{\alpha}_2$ ersetzt. Dabei gelte $\sin(\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2) \neq 0$.
- Die Funktion $q(x)$ sei auf einer Hälfte des Intervalls $[a_1, a_2]$ bekannt [27].
- Die Symmetrie der Funktion $q(x)$ sei auf dem Intervall $[a_1, a_2]$ gegeben [3]. Dabei gelte für die Randbedingungen $\alpha_1 = -\alpha_2$.
- Die Funktion $q(x)$ sei so zu bestimmen, daß das Eigenwertproblem (3.1) - (3.2) eine Folge $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von sogenannten Normierungskonstanten besitzt [7]. Diese Normierungskonstanten seien wie folgt festgelegt:

  $$\varrho_k := \begin{cases} \dfrac{1}{y_k'(a_1)} & \text{für} \quad \alpha_1 = 0 \\ \dfrac{1}{y_k(a_1)} & \text{für} \quad 0 < \alpha_1 < \pi \end{cases} .$$

  Hierbei sei y_k die zu dem Eigenwert λ_k gehörige normierte Eigenfunktion.

3.1 Eindeutigkeit einer Lösung des inversen Problems

Die Eindeutigkeit einer Lösung des inversen Problems läßt sich durch drei verschiedene Ansätze zeigen: erstens durch eine Methode von I. M. Gel'fand und B. M. Levitan [7], die auf dem Begriff der Transmutation beruht, zweitens mit Hilfe des Residuensatzes der Funktionentheorie [18] und drittens durch ein Fixpunktargument, welches von W. Rundell und P. E. Sacks [27] angegeben wurde.

Der in diesem Kapitel zentrale Satz lautet wie folgt.

Satz 3.1.1 *(Eindeutigkeit) Seien durch $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Dirichlet- bzw. Neumann-Eigenwerte eines Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems (3.1) - (3.2) gegeben. Sei $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der entsprechenden Normierungskonstanten.*

Dann ist die Koeffizientenfunktion $q(x) \in \mathcal{C}^2[a_1, a_2]$ von (3.1) eindeutig festgelegt.

Die hier gegeben Beweise zur Eindeutigkeit beschränken sich also auf den Fall der Dirichlet- bzw. Neumann-Eigenwerte mit entsprechenden Normierungskonstanten als Daten. Der zweite Beweis ist eher von theoretischem Interesse, da die Methode dieses Beweises eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeitsaussage (geringere Regularitätsvoraussetzungen an die Koeffizientenfunktion $q(x)$) zuläßt. Dieser Beweis sei der Vollständigkeit halber hier für zu rekonstruierende $\mathcal{C}^2$-Funktionen mit angegeben. Die wesentlichen Verfahren der entwickelten Algorithmen leiten sich aus dem ersten und dritten Beweis her.

3.1.1 Erster Beweis (nach Gel'fand und Levitan)

Als Ansatz „vergleicht" man den gesuchten Differentialoperator

$$Dy := -y'' + q(x)y$$

mit einem Ausdruck

$$D_0 y := -y'' + q_0(x)y,$$

bei dem die Funktion $q_0(x)$ als bekannt vorausgesetzt ist. Man bestimmt einen Operator T, der Lösungen von Anfangswertaufgaben bzgl. D auf Lösungen von Anfangswertaufgaben bzgl. D_0 abbildet. Mit Hilfe des adjungiertes Operators T^* ergibt sich dann eine durch die unabhängige Variable x parametrisierte Schar Fredholmscher Integralgleichungen 2. Art, deren Kerne die gesuchte Funktion festlegen.

Der Operator T wird auch Transmutation genannt.

Definition 3.1.1 *Ein Operator $T : \mathcal{C}^2[a_1, a_2] \longrightarrow \mathcal{C}^2[a_1, a_2]$ heißt Transmutation von D_0 und D bzgl. Dirichletscher Randbedingungen, falls die Gleichung*

$$D_0 T\varphi = TD\varphi$$

für alle $\varphi \in \mathcal{C}^2[a_1, a_2]$ mit $\varphi(a_1) = 0$ gilt.

Bemerkung 3.1.1 *Die Bedingung $\varphi(a_1) = 0$ in der Definition ersetzt man bei einem Eigenwertproblem mit Neumannschen Randbedingungen $\varphi'(a_1) = \varphi'(a_2) = 0$ durch $\varphi'(a_1) = 0$.*

Die Existenz einer Transmutation für die oben erklärten Differentialoperatoren wird durch den folgenden Satz gesichert:

Satz 3.1.2 *Seien $q(x), q_0(x) \in \mathcal{C}[a_1, a_2]$. Dann existiert für alle $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2[a_1, a_2]$ genau eine Transmutation von D_0 und D der Form*

$$(T\varphi)(x) = \varphi(x) + \int_{a_1}^{x} K(x,t)\varphi(t)\,dt, \quad a_1 \le x \le a_2.$$

Hierbei heißt die Funktion

$$K(x,y) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega), \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a_1 < y < x < a_2\}$$

der „Kern" des Integraloperators.

Beweis: Falls eine Funktion $K(x,y)$ wie behauptet existiert, muß die Gleichung

$$-(T\phi)'' + q_0(x)T\phi = T(-\phi'' + q(x)\phi) \quad \text{für } \phi \in \mathcal{C}^2[a_1, a_2] \tag{3.3}$$

erfüllt sein. Für die linke Seite ergeben sich aus der geforderten Form des Operators T die Formeln

$$\begin{aligned}
(T\phi)(x) &= \phi(x) + \int_{a_1}^{x} K(x,t)\phi(t)\,dt, \\
(T\phi)'(x) &= \phi'(x) + K(x,x)\phi(x) + \int_{a_1}^{x} K_x(x,t)\phi(t)\,dt \quad \text{und} \\
(T\phi)''(x) &= \phi''(x) + (K(x,x))'\phi(x) + K(x,x)\phi'(x) \\
&\quad + K_x(x,x)\phi(x) + \int_{a_1}^{x} K_{xx}(x,t)\phi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Für den ersten Summanden des Arguments auf der rechten Seite von (3.3) erhält man durch partielle Integration

$$\begin{aligned}
(T\phi'')(x) &= \phi''(x) + \int_{a_1}^{x} K(x,t)\phi''(t)\,dt \\
&= \phi''(x) - \int_{a_1}^{x} K_y(x,t)\phi'(t)\,dt + \left[K(x,t)\phi'(t)\right]_{a_1}^{x} \\
&= \phi''(x) + \int_{a_1}^{x} K_{yy}(x,t)\phi(t)\,dt + \left[K(x,t)\phi'(t) - K_y(x,t)\phi(t)\right]_{a_1}^{x}.
\end{aligned}$$

Damit lautet die Gleichung (3.3) ausführlich

$$\begin{aligned}
&-(K(x,x))'\phi(x) - K(x,x)\phi'(x) - K_x(x,x)\phi(x) - \int_{a_1}^{x} K_{xx}(x,t)\phi(t)\,dt \\
&+q_0(x)\phi(x) + q_0(x)\int_{a_1}^{x} K(x,t)\phi(t)\,dt \\
= \;& -\int_{a_1}^{x} K_{yy}(x,t)\phi(t)\,dt - \left[K(x,t)\phi'(t) - K_y(x,t)\phi(t)\right]_{a_1}^{x} \\
&+q(x)\phi(x) + \int_{a_1}^{x} K(x,t)q(t)\phi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn die Koeffizienten von $\phi(x)$, $\phi'(x)$, $\phi(a_1)$ und $\phi(t)$ auf der linken und rechten Seite übereinstimmen. Damit ergeben sich folgende Bedingungen für die Existenz der Funktion $K(x,y)$:

$$\begin{array}{lll}
\phi(x): & & -(K(x,x))' - K_x(x,x) - K_y(x,x) + q_0(x) - q(x) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & -2(K(x,x))' = q(x) - q_0(x) \\
& \Longleftrightarrow & K(x,x) = C + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{a_1}^{x} [q_0(t) - q(t)]\,dt, \\
\phi'(a_1): & & K(x,a_1) = 0 \\
& \Longrightarrow & C = 0, \\
\phi(t): & & -K_{xx}(x,t) + K_{yy}(x,t) + q_0(x)K(x,t) - q(t)K(x,t) = 0 \\
& & \text{in } \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a_1 < y < x < a_2\}.
\end{array}$$

Also muß die Funktion $K(x,y)$ eine hyperbolische Gleichung

$$K_{yy} - K_{xx} + (q_0(x) - q(y))K = 0 \quad \text{in } \Omega$$

unter den Randbedingungen

$$\begin{aligned}
K(x,x) = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{x} [q_0(t) - q(t)]\,dt \qquad & \text{für} \quad a_1 \leq x \leq a_2 \quad \text{und} \\
K(a_1,y) = 0 \qquad & \text{für} \quad a_1 \leq y \leq a_2
\end{aligned}$$

erfüllen, damit sie den Kern eines Transmutationsoperators T von D_0 und D darstellt. Da keine Charakteristiken vom Punkt (a_1,a_1) ins Innere von Ω laufen, existiert eine solche Lösung der obigen partiellen Differentialgleichung und es gilt

$$K(x,y) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \ \cap \ \mathcal{C}^2(\Omega).$$

□

Bemerkung 3.1.2 *Aus dem Beweis wird ersichtlich, daß es genau eine Transmutation von D und D_0*

$$(\tilde{T}\varphi)(x) = \varphi(x) + \int_{a_1}^{x} H(x,t)\varphi(t)\,dt, \quad a_1 \leq x \leq a_2,$$

mit einer Funktion $H(x,y) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ gibt.

Anhand des Satzes 3.1.3 und des Satzes 2.3.1 über die Reihenentwicklung von $\mathcal{C}^2$-Funktionen durch Eigenfunktionen ergibt sich sofort $\tilde{T} = T^{-1}$.

Der so ermittelte Operator T stellt also einen sogenannten Volterrascher Integraloperator 2. Art dar, dessen Eigenschaften durch funktionalanalytische Betrachtungen hergeleitet werden [33]. Insbesondere stellt sich heraus, daß T und der inverse Operator T^{-1}

stetig sind. Mit dem Operator T lassen sich die Lösungen $\phi(x,\lambda), \phi_0(x,\lambda)$ der durch λ parametrisierten Anfangswertprobleme

$$D\phi = \lambda\phi, \qquad \begin{array}{l} \phi(a_1,\lambda) = \gamma_1, \\ \phi'(a_1,\lambda) = \gamma_2 \end{array}$$

und

$$D_0\phi_0 = \lambda\phi_0, \qquad \begin{array}{l} \phi_0(a_1,\lambda) = \gamma_1, \\ \phi_0'(a_1,\lambda) = \gamma_2 \end{array}$$

mit $(\gamma_1,\gamma_2) = (0,1)$ (bzw. $(\gamma_1,\gamma_2) = (1,0)$) ineinander überführen. Es gilt der folgende Satz:

Satz 3.1.3 *Für den Transmutationsoperator T von D_0 und D gilt*

$$\phi_0(x,\lambda) = (T\phi)(x,\lambda), \quad a_1 \leq x \leq a_2.$$

Beweis: Sei

$$\Psi_0(x,\lambda) := (T\phi)(x,\lambda) = \phi(x,\lambda) + \int_{a_1}^{x} K(x,t)\phi(t,\lambda)\,dt.$$

Dann ist

$$D_0\Psi_0 = D_0T\phi = TD\phi = \lambda T\phi = \lambda\Psi_0$$

und

$$\begin{aligned} \Psi_0(a_1,\lambda) &= \phi(a_1,\lambda) = \gamma_1, \\ \Psi_0'(a_1,\lambda) &= \phi'(a_1,\lambda) + \underbrace{K(a_1,a_1)}_{=0}\phi(a_1,\lambda) = \gamma_2. \end{aligned}$$

Damit ist $\Psi_0(x,\lambda)$ eine Lösung der gewöhnlichen Diffentialgleichung

$$D_0y = -y'' + q_0(x)y = \lambda y$$

mit den gleichen Anfangswerten wie $\phi_0(x,\lambda)$. Da diese Anfangswertaufgabe eindeutig zu lösen ist ($q_0(x)$ ist stetig), folgt

$$\phi_0(x,\lambda) = \Psi_0(x,\lambda) = (T\phi)(x,\lambda).$$

□

Nun seien die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Eigenwerte und die Folge $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Normierungskonstanten gegeben. Sei durch

$$l^2(\mathbb{R}) := \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}},\ ||c||_{l^2} < \infty\} \quad \text{mit } ||c||_{l^2}^2 := \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

der Hilbertraum der reellen quadratsummierbaren Folgen bezeichnet. Sei auf $l^2(\mathbb{R})$ wie folgt einen Operator $\Phi : l^2 \longrightarrow L^2(a_1, a_2)$ definiert:

$$(\Phi c)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\phi(x, \lambda_k)}{\varrho_k}.$$

Wenn $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, die durch $||u_k||_{L^2} = 1$ normierten Eigenfunktionen bezeichnen, die zu den Eigenwerten λ_k gehören, dann gilt mit den Normierungskonstanten ϱ_k

$$\varrho_k u_k(x) = \phi(x, \lambda_k),$$

da die Funktionen $\varrho_k u_k(x)$ und $\phi(x, \lambda_k)$ die gleiche Anfangswertaufgabe lösen. Man erhält die Abschätzung

$$\begin{aligned} ||\Phi c||_{L^2}^2 &= \int_{a_1}^{a_2} (\Phi c)^2(t)\,dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \qquad \text{(die } u_k(t) \text{ sind orthogonal zueinander)} \\ &\leq ||c||_{l^2}^2. \end{aligned}$$

Somit ist der lineare Operator Φ beschränkt mit $||\Phi|| = 1$. Also existiert der adjungierte Operator $\Phi^* : L^2(a_1, a_2) \longrightarrow l^2$,

$$(\Phi c, f)_{L^2} = (c, \Phi^* f)_{l^2}, \qquad \begin{array}{l} f \in L^2(a_1, a_2), \\ c \in l^2(\mathbb{R}). \end{array}$$

Für $k = 1, 2, \ldots$ lassen sich die Werte $(\Phi^* f)_k$ explizit berechnen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\Phi^* f)_k &= (c, \Phi^* f)_{l^2} \\ &= (\Phi c, f)_{L^2} \\ &= (\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(\cdot), f)_{L^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k (u_k, f)_{L^2} \\ \Longrightarrow \ (\Phi^* f)_k &= (u_k, f)_{L^2} = \int_{a_1}^{a_2} u_k(t) f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Aufgrund der Entwickelbarkeit von L^2-Funktionen durch die Eigenfunktionen $u_k(x)$ (Satz 2.3.1) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} (\Phi \Phi^* f)(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\Phi^* f)_k u_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (u_k, f)_{L^2} u_k(x) \\ &= f(x) \qquad \text{(im Sinne der } L^2 - \text{Konvergenz).} \end{aligned}$$

Nun betrachtet man den Operator

$$\Phi_0 : l^2 \longrightarrow L^2(a_1, a_2), \quad (\Phi_0 c)(x) := T(\Phi c)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\phi_0(x, \lambda_k)}{\varrho_k}.$$

Dieser ist linear und beschränkt, da T ein beschränkter Volterrascher Integraloperator 2. Art ist. Es folgt

$$\Phi_0 \Phi_0^* f = (T\Phi)(T\Phi)^* f = T\Phi\Phi^* T^* f = TT^* f$$

für alle $f(x) \in L^2(a_1, a_2)$.

Bezeichne I den identischen Operator. Mit der Setzung $\mathcal{F} := \Phi_0\Phi_0^* - I$ erhält man dann

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= TT^* - I \\ \Rightarrow T^{-1}\mathcal{F} &= T^* - T^{-1} \\ \Rightarrow \tilde{T}\mathcal{F} + \tilde{T} &= T^*. \end{aligned}$$

Wegen $K^*(x,t) = K(t,x) = 0$ für $t \leq x$ lautet die letzte Operatorengleichung

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}f)(x) + \int_{a_1}^{x} H(x,t)(\mathcal{F}f)(t)\,dt + f(x) + \int_{a_1}^{x} H(x,t)f(t)\,dt \\ = \;& f(x) + \int_{a_1}^{x} K^*(x,t)f(t)\,dt \\ \Rightarrow \;& (\mathcal{F}f)(x) + \int_{a_1}^{x} H(x,t)(\mathcal{F}f)(t)\,dt + \int_{a_1}^{x} H(x,t)f(t)\,dt = \int_{a_1}^{x} K(t,x)f(t)\,dt = 0. \end{aligned}$$

Wenn $(\lambda_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Eigenwerte von $D_0\phi = \lambda\phi$ und $(\varrho_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der zugehörigen Normierungskonstanten bezeichnen, dann bilden die Funktionen

$$u_{0,k}(x) := \frac{1}{\varrho_{0,k}}\phi_0(x, \lambda_{0,k})$$

ein System orthonormierter Eigenfunktionen von D_0. Damit berechnet sich die Funktion $(\mathcal{F}f)(x)$ (anhand der Entwickelbarkeit von L^2-Funktionen nach den orthonormierten Eigenfunktionen $u_{0,k}(x)$) zu

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(x) &= (\Phi_0\Phi_0^* f)(x) - f(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\phi_0(\cdot,\lambda_k)}{\varrho_k}, f\right)_{L^2} \frac{\phi_0(x,\lambda_k)}{\varrho_k}\right] - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\phi_0(\cdot,\lambda_{0,k})}{\varrho_{0,k}}, f\right)_{L^2} \frac{\phi_0(x,\lambda_{0,k})}{\varrho_{0,k}}\right] \\ &= \int_{a_1}^{a_2} f(t) \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\phi_0(x,\lambda_k)\phi_0(t,\lambda_k)}{\varrho_k^2} - \frac{\phi_0(x,\lambda_{0,k})\phi_0(t,\lambda_{0,k})}{\varrho_{0,k}^2}\right] dt, \end{aligned}$$

falls die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\phi_0(x,\lambda_k)\phi_0(t,\lambda_k)}{\varrho_k^2} - \frac{\phi_0(x,\lambda_{0,k})\phi_0(t,\lambda_{0,k})}{\varrho_{0,k}^2}\right]$$

im Sinne von L^2 konvergiert (Vertauschung von Summation und Integration!). Dies ist unter gewissen Voraussetzung richtig, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.1.4 *Seien* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\lambda_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varrho_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ *die Eigenwerte und Normierungskonstanten der Randwertaufgaben*

$$D\phi = \lambda\phi, \quad \phi(a_1) = \phi(a_2) = 0 \quad (\text{bzw. } \phi'(a_1) = \phi'(a_2) = 0),$$

$$D_0\phi = \lambda\phi, \quad \phi(a_1) = \phi(a_2) = 0 \quad (\text{bzw. } \phi'(a_1) = \phi'(a_2) = 0),$$

wobei die Funktion $q_0 \equiv 0$ *ist und für den Mittelwert der Funktion* $q(x)$

$$\frac{1}{a_2 - a_1}\int_{a_1}^{a_2} q(t)\,dt = 0$$

gilt. Sei $\phi_0(x,\lambda)$ *die Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$D_0\phi_0 = \lambda\phi_0, \quad \phi_0(a_1,\lambda) = \gamma_1, \quad \phi_0'(a_1,\lambda) = \gamma_2$$

mit $(\gamma_1,\gamma_2) = (0,1)$ *(bzw.* $(\gamma_1,\gamma_2) = (1,0)$*) und*

$$F(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\phi_0(x,\lambda_k)\phi_0(y,\lambda_k)}{\varrho_k^2} - \frac{\phi_0(x,\lambda_{0,k})\phi_0(y,\lambda_{0,k})}{\varrho_{0,k}^2}\right), \quad x,y \in [a_1,a_2].$$

Dann existiert eine Konstante $M > 0$*, so daß*

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_1}^{a_2} F(x,y)\,dx\,dy < M$$

gilt.

Beweis: O.B.d.A. darf man annehmen, daß $a_1 = 0$ und $a_2 = l$ ist, da durch eine Verschiebung des zu betrachtenden Intervalls die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Operatoren D und D_0 nicht verändert werden.

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$-\phi_0'' = \mu\phi_0, \qquad \begin{aligned}\phi_0(0,\mu) &= \gamma_1\\ \phi_0'(0,\mu) &= \gamma_2\end{aligned}$$

lautet für $(\gamma_1,\gamma_2) = (0,1)$ und für positive Parameterwerte μ

$$\phi_0(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sin\sqrt{\mu}x, \quad 0 \le x.$$

Für $(\gamma_1,\gamma_2) = (1,0)$ ergibt sich

$$\phi_0(x,\mu) = \cos\sqrt{\mu}x, \quad 0 \le x.$$

Da in diesem Fall

$$\varrho_k = \sqrt{\frac{l}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)}$$

ist, kann analog zum erstgenannten Fall gerechnet werden, indem man im folgenden die Sinus- durch die entsprechenden Cosinusterme austauscht. Daher genügt es, nur die Anfangsbedingung $(\gamma_1, \gamma_2) = (0, 1)$ zu betrachten.

Nach Satz 2.4.3 und Satz 2.4.5 gelten für die Eigenwerte von D und den entsprechenden Normierungskonstanten die asymptotischen Formeln

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 k^2 + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
\Longrightarrow \sqrt{\lambda_k} &= \frac{\pi}{l}k + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \\
&= \sqrt{\lambda_{0,k}} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \quad \text{und} \\
\varrho_k &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\left(\sqrt{\frac{l}{2}} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).
\end{aligned}$$

Damit erhält man eine Näherung der einzelnen Summanden der Reihe $F(x, y)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\phi_0(x,\lambda_k)\phi_0(y,\lambda_k)}{\varrho_k^2} - \frac{\phi_0(x,\lambda_{0,k})\phi_0(y,\lambda_{0,k})}{\varrho_{0,k}^2} \\
= &\frac{\sin\sqrt{\lambda_k}x \sin\sqrt{\lambda_k}y}{\frac{l}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)} - \frac{\sin\sqrt{\lambda_{0,k}}x \sin\sqrt{\lambda_{0,k}}y}{\frac{l}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)} \\
= &\left\{\frac{2}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{2}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right\} \sin\frac{k\pi}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}y + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \\
= &\frac{b_k}{k}\sin\frac{k\pi}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}y + O\left(\frac{1}{k^3}\right).
\end{aligned}$$

Der Term $O(1/k^3)$ stellt hierbei eine Funktion dar, die stetig von x und y abhängt. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge reeller Zahlen, die durch eine Konstante $M_1 > 0$ beschränkt wird: $|b_k| \le M_1,\ k \in \mathbb{N}$.

Diese Näherung gilt für $x, y \in [0, l]$ beliebig. Also läßt sich die Norm der Funktion $F(x, y)$ mit einer in x und y stetigen Funktion $h(x, y)$, gegen die der Term $O(1/k^3)$ in der Summe absolut und gleichmäßig konvergiert, wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
||F||_{L^2\times L^2} &= \left|\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b_k}{k}\sin\frac{k\pi}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}y + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)\right|\right|_{L^2\times L^2} \\
&\le \left|\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\sin\frac{k\pi}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}y\right|\right|_{L^2\times L^2} + ||h||_{L^2\times L^2}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Nun ergibt sich für die Partialsummen des ersten Terms von (3.4) wegen der Orthogonalitätseigenschaft der Funktionen $\sin(\frac{k\pi}{l}x)$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^l\int_0^l \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}\sin\frac{k\pi}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}y\right)^2 dx\, dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{b_j b_k}{jk} \underbrace{\int_0^l \sin\frac{j\pi}{l}x \sin\frac{k\pi}{l}x\,dx \int_0^l \sin\frac{j\pi}{l}y \sin\frac{k\pi}{l}y\,dy}_{=\begin{cases}(l/2)^2, & \text{falls } j=k\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}} \\
&= \left(\frac{l}{2}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k^2} \\
&\leq \frac{1}{24}(lM_1\pi)^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Mit $||h||_{L^2\times L^2} \leq M_2$ erhält man daraus

$$||F||_{L^2\times L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{24}} lM_1\pi + M_2.$$

□

Falls man an die Funktion $f(x) \in L^2(a_1, a_2)$ die Bedingung $\operatorname{supp}(f) \subset [a_1, x]$ stellt, gelangt man zur Integralgleichung

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{F}f)(x) + \int_{a_1}^{x} H(x,s)(\mathcal{F}f)(s)\,ds + \int_{a_1}^{x} H(x,t)f(t)\,dt \\
= &\int_{a_1}^{x} F(x,t)f(t)\,dt + \underbrace{\int_{a_1}^{x} H(x,s)\int_{a_1}^{x} F(s,t)f(t)\,dt\,ds}_{=\int_{a_1}^{x} f(t)\int_{a_1}^{x} H(x,s)F(s,t)\,ds\,dt} + \int_{a_1}^{x} H(x,t)f(t)\,dt \\
= &\int_{a_1}^{x} f(t)\left(F(x,t) + \int_{a_1}^{x} H(x,s)F(s,t)\,ds + H(x,t)\right)dt = 0.
\end{aligned}
$$

Da $f(x)$ unter der Voraussetzung $\operatorname{supp}(f) \subset [a_1, x]$ beliebig war, erhält man insgesamt

$$F(x,y) + \int_{a_1}^{x} H(x,t)F(t,y)\,dt + H(x,y) = 0, \quad a_1 \leq y \leq x. \tag{3.5}$$

Diese Gleichung ist von I. M. Gel'fand und B. M. Levitan angegeben worden [7]. Sie stellt für jedes fest gewählte $x \in [a_1, a_2]$ eine Fredholmsche Integralgleichung 2. Art dar. Mit der speziellen Wahl

$$q_0(x) := 0, \quad a_1 \leq x \leq a_2,$$

für die Vergleichsfunktion $q_0(x)$ zeigt der nächste Satz, daß (3.5) für jedes $x \in [a_1, a_2]$ genau eine Lösung $H(x,y)$ besitzt.

Satz 3.1.5 *Sei $q_0(x) \equiv 0$ auf $[a_1, a_2]$. Die Funktion $F(x,y)$ sei wie in Satz 3.1.4 definiert. Dann besitzt die Integralgleichung*

$$H(x,y) + \int_{a_1}^{x} H(x,t)F(t,y)\,dt = -F(x,y), \quad a_1 \leq y \leq x,$$

für jedes $x \in [a_1, a_2]$ genau eine Lösung $H(x,y) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$.

Beweis: Sei $x \in [a_1, a_2]$ beliebig, aber fest. Setze dann

$$g(y) := H(x, y), \quad a_1 \leq y \leq x.$$

Um den Fredholmschen Alternativsatz [33] zu verwenden, ist zu zeigen, daß die homogene Gleichung

$$g(y) + \int_{a_1}^{x} g(t) F(t, y)\, dt = 0$$

nur die triviale Lösung $g \equiv 0$ besitzt.

Sei also $g(y)$ eine Lösung der obigen Gleichung. Dann folgt

$$g(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\phi_0(y, \lambda_k)}{\varrho_k} \int_{a_1}^{x} g(t) \frac{\phi_0(t, \lambda_k)}{\varrho_k}\, dt - \frac{\phi_0(y, \lambda_{0,k})}{\varrho_{0,k}} \int_{a_1}^{x} g(t) \frac{\phi_0(t, \lambda_{0,k})}{\varrho_{0,k}}\, dt \right) = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $g(y)$ und integriert anschließend von a_1 bis x bezüglich der Variablen t, so erhält man wegen der Parsevalschen Beziehung (Bemerkung 2.12) für die normierten Eigenfunktionen $u_{0,k}(x)$ des Operators D_0

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{a_1}^{x} g(t) \frac{\phi_0(t, \lambda_{0,k})}{\varrho_{0,k}}\, dt \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{a_1}^{x} g(t) u_{0,k}(t)\, dt \right)^2 = \int_{a_1}^{x} g^2(t)\, dt$$

das Ergebnis

$$\int_{a_1}^{x} g^2(t)\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\int_{a_1}^{x} g(t) \frac{\phi_0(t, \lambda_k)}{\varrho_k}\, dt \right)^2 - \left(\int_{a_1}^{x} g(t) \frac{\phi_0(t, \lambda_{0,k})}{\varrho_{0,k}}\, dt \right)^2 \right\} =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{a_1}^{x} g(t) \frac{\phi_0(t, \lambda_k)}{\varrho_k}\, dt \right)^2 = 0.$$

Eine Summe aus lauter nichtnegativen Gliedern kann nur dann identisch verschwinden, wenn alle Summanden gleich Null sind. Also ergibt sich

$$\int_{a_1}^{x} g(t) \sin \sqrt{\lambda_k}(t - a_1)\, dt = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Zusammen mit der Vollständigkeitseigenschaft des Funktionensystems $\{\sin \sqrt{\lambda_k}(x - a_1);\ k \in \mathbb{N}\}$ und der Eigenschaft $g(a_1) = 0$ folgt $g \equiv 0$. □

Damit ist die gesuchte Funktion $q(x)$ eindeutig durch die Zahlenfolgen $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ festgelegt.

3.1.2 Zweiter Beweis (nach Levinson)

Während der erste und der dritte Beweis Sätze der Funktionalanalysis benutzen, basiert der zweite Beweis des Satzes 3.1.1 vornehmlich auf Aussagen der Funktionentheorie. Die wesentliche Idee besteht in einer Anwendung des Residuensatzes. Dadurch ergibt sich eine erwähnenswerte theoretische Alternative zu den beiden anderen Beweisen. Der folgende Eindeutigkeitsbeweis wurde von N.Levinson angegeben, allerdings für etwas andere Randbedingungen. Durch eine Gleichung für die Normierungskonstanten ϱ_k läßt sich der in [18] durchgeführte Beweis für Dirichletsche bzw. Neumannsche Randbedingungen übertragen.

Seien $q_1(x), q_2(x) \in \mathcal{C}^2[a_1, a_2]$ zwei Funktionen, für die die Randwertprobleme

$$\begin{array}{ll} -y'' + q_j(x) = \lambda y, & a_1 \leq x \leq a_2,\ j = 1, 2, \\ y(a_1) = y(a_2) = 0 & (\text{bzw. } y'(a_1) = y'(a_2) = 0) \end{array}$$

die gleichen Eigenwerte $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Normierungskonstanten $(\varrho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzen. Zu zeigen ist, daß $q_1 \equiv q_2$ ist.

Dazu seien $u_j(x, \lambda)$, $v_j(x, \lambda)$ die Lösungen der Gleichungen

$$-y'' + q_j(x)y = \lambda y, \quad a_1 \leq x \leq a_2,\ j = 1, 2,$$

mit den Anfangswerten

$$\begin{array}{ll} u_j(a_1, \lambda) = c_1, & v_j(a_2, \lambda) = c_1, \\ u_j'(a_1, \lambda) = c_2, & v_j'(a_2, \lambda) = c_2, \end{array}$$

wobei $(c_1, c_2) = (0, 1)$ (bzw. $(c_1, c_2) = (1, 0)$) ist. Wie schon im ersten Beweis sei zunächst nur der erste Fall betrachtet. Für das weitere Vorgehen ist folgendes Lemma nützlich [26]:

Lemma 3.1.1 *Für die Normierungskonstanten ϱ_k gelten die Gleichungen*

$$\frac{1}{\varrho_k^2} = u_1'(a_2, \lambda_k)\frac{\partial}{\partial\lambda}u_1(a_2, \lambda_k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Beweis: Für jedes $x \in [a_1, a_2]$ ist $u_1(x, \lambda)$ eine ganze Funktion in λ [26]. Also macht es Sinn, beide Seiten der Gleichung

$$-\, u_1'' + q_1(x)u_1 = \lambda u_1 \tag{3.6}$$

nach λ zu differenzieren. Da $u_1 \in \mathcal{C}^2$ ist, darf man die partiellen Ableitungen vertauschen und erhält mit der Schreibweise $\dot{u}_1 := \frac{\partial}{\partial\lambda}u_1$

$$-\, \dot{u}_1'' + q_1(x)\dot{u}_1 = u_1 + \lambda\dot{u}_1. \tag{3.7}$$

Multipliziert man die Gleichung (3.7) mit u_1, die Gleichung (3.6) mit $\dot{u}_1$ und subtrahiert die jeweils resultierenden Gleichungen voneinander, so ergibt sich

$$u_1^2 = u_1''\dot{u}_1 - \dot{u}_1''u_1.$$

Damit folgt durch Integration bzgl. t an den Stellen $\lambda = \lambda_k$

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} u_1^2(t, \lambda_k)\, dt &= \int_{a_1}^{a_2} \left[u_1'(t, \lambda_k)\dot{u}_1(t, \lambda_k) - \dot{u}_1'(t, \lambda_k)u_1(t, \lambda_k)\right]'\, dt \\ &= u_1'(a_2, \lambda_k)\frac{\partial}{\partial\lambda}u_1(a_2, \lambda_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $u_1(a_1, \lambda_k) = u_1(a_2, \lambda_k) = 0$ und $\dot{u}_1(a_1, \lambda_k) = 0$ (der Anfangswert der Funktion u_1 ist nicht von λ abhängig). Da

$$\frac{1}{\varrho_k^2} = \int_{a_1}^{a_2} u_1^2(t, \lambda_k)\, dt$$

gilt, ist das Lemma bewiesen. □

Mit diesem Lemma soll nun gezeigt werden, daß sich die Funktionen $u_j(x, \lambda)$ und $v_j(x, \lambda)$ an den Stellen $\lambda = \lambda_k$ jeweils um einen gemeisamen Faktor γ_k unterscheiden.

Die Existenz dieser Faktoren sichert folgende Überlegung.

Die Eigenwerte $(\lambda_n)_{n \in \mathrm{N}}$ sind die Zahlen, für die

$$u_1(a_2, \lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

gilt. Weil die reellwertigen Funktionen $u_1(x, \lambda_k)$ und $v_1(x, \lambda_k)$ die gleiche Differentialgleichung lösen und eine der beiden Anfangsbedingungen gemeinsam erfüllen, gibt es reelle Zahlen $\gamma_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, so daß

$$u_1(x, \lambda_k) = \gamma_k v_1(x, \lambda_k), \quad x \in [a_1, a_2]. \tag{3.8}$$

Nun gilt auch

$$u_2(x, \lambda_k) = \gamma_k v_2(x, \lambda_k), \quad x \in [a_1, a_2]. \tag{3.9}$$

Denn aufgrund der asymptotischen Formel für die Funktion $u_1(\cdot, \lambda)$ aus Satz 2.4.4 ist die Funktion

$$w(\lambda) := -u_1(a_2, \lambda)$$

eine ganze Funktion der Ordnung $\frac{1}{2}$ mit den Nullstellen $\lambda = \lambda_k$. Daher gilt mit einer Konstanten $C \neq 0$ die Faktorisierung

$$w(\lambda) = C \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right).$$

Somit berechnen sich die Faktoren γ_k zu

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= u_1'(a_2, \lambda_k) \\
&= \int_{a_1}^{a_2} u_1^2(t, \lambda_k)\, dt \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} u_1(a_2, \lambda_k)\right)^{-1} \\
&= -\frac{\lambda_k}{\varrho_k^2 C} \left(\prod_{l=1, l \neq k}^{\infty} \frac{\lambda_l - \lambda_k}{\lambda_k}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Also sind die γ_k unabhängig von $q_j(x), j = 1, 2$. Daraus ergibt sich die Gültigkeit der Gleichung (3.9).

Mit diesen Vorüberlegungen läßt sich die Identität $q_1 \equiv q_2$, d.h. die Eindeutigkeit einer Lösung des inversen Problems, wie folgt beweisen.

Sei der Definitionsbereich der Differentialgleichung in das Intervall $[0, l]$ verschoben, wobei $l := a_2 - a_1$ gesetzt ist. Dies bedeutet keine Einschränkung, da durch Verschiebung des Intervalls $[a_1, a_2]$ die Eigenwerte und die Normierungskonstanten nicht verändert werden.

Ferner sei $f(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathcal{C}^1[0, l]$ mit den Randwerten $f(0) = f(l) = 0$. Desweiteren definiere man eine Funktion

$$H(x, \lambda) := \frac{1}{w(\lambda)} v_2(x, \lambda) \int_0^x u_1(t, \lambda) f(t)\, dt, \quad x \in [0, l].$$

Betrachtet man das Integral von $H(x, \lambda)$ längs eines geschlossenen Kreises Γ in der λ-Ebene mit Mittelpunkt $\lambda = 0$ und Radius $r = \frac{1}{2}(\lambda_N^{1/2} + \lambda_{N+1}^{1/2})$, so gilt

$$\int_\Gamma H(x, \lambda)\, d\lambda = \int_\Theta H(x, s^2) s\, ds.$$

Hierbei ist $\Theta = \{s \in \mathbb{C},\ |s| = \sqrt{r}\}$ ein Kreis in der s-Ebene. Weiter gelten mit der Bezeichnung $s = \sigma + i\tau,\ \lambda = s^2$, für große $|\lambda|$ die asymptotischen Formeln (Satz 2.4.4)

$$\begin{aligned} v_2(x, \lambda) &= \frac{\sin s(l-x)}{s} + O\left(\frac{e^{|\tau|(l-x)}}{|s|^2}\right), \\ u_1(x, \lambda) &= \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|s|^2}\right) \quad \text{und} \\ w(\lambda) &= -u_1(l, \lambda) \\ &= -\frac{\sin sl}{s} + O\left(\frac{e^{|\tau|l}}{|s|^2}\right). \end{aligned}$$

Für $\delta = \min\{\frac{1}{2}x,\ |\lambda_N|^{-1/4}\}$ folgt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^x u_1(t, \lambda) f(t)\, dt &= \int_0^x \frac{\sin st}{s} f(t)\, dt + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right) \int_0^x |f(t)| e^{|\tau|t}\, dt \\ &= -\frac{\cos sx}{s^2} f(x) + O\left(\frac{e^{|\tau|(x-\delta)}}{|s|^2}\right) \int_0^{x-\delta} (|f(t)| + |f'(t)|)\, dt \\ &\quad + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|s|^2}\right) \int_{x-\delta}^x (|f(t)| + |f'(t)|)\, dt \\ &= -\frac{\cos sx}{s^2} f(x) + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|s|^2}\right) (xe^{-\delta|\tau|} + \delta). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} H(x, s^2) &= \frac{1}{\sin sl + O\left(\frac{e^{|\tau|l}}{|s|}\right)} \left(\sin s(l-x) + O\left(\frac{e^{|\tau|(l-x)}}{|s|}\right)\right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\cos sx}{s^2} f(x) + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|s|^2}\right)(xe^{-\delta|\tau|} + \delta)\right). \end{aligned}$$

Für $N \to \infty$ konvergiert also

$$\int_\Gamma H(x,\lambda)\,d\lambda - f(x)\int_\Theta \frac{\sin s(l-x)\cos sx}{s\sin sl}\,ds \longrightarrow 0$$

gleichmäßig in $x \in [0,l]$. Anhand der trigonometrischen Additionstheoreme ist

$$\begin{aligned}
\sin s(l-x)\cos sx &= (\sin sl\cos sx - \sin sx\cos sl)\cos sx \\
&= \frac{1}{2}(2\sin sl\cos^2 sx - 2\cos sl\sin sx\cos sx) \\
&= \frac{1}{2}((1+\cos^2 sx - \sin^2 sx)\sin sl - \cos sl\sin 2sx) \\
&= \frac{1}{2}(\sin sl + \sin sl\cos 2sx - \cos sl\sin 2sx) \\
&= \frac{1}{2}(\sin sl + \sin s(l-2x)).
\end{aligned}$$

Damit folgt für $N \to \infty$

$$\int_\Gamma H(x,\lambda)\,d\lambda - \pi i f(x) \longrightarrow 0$$

gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall des offenen Intervalls $(0,l)$ und absolut im abgeschlossenen Intervall $[0,l]$. Der Residuensatz liefert daher zusammen mit (3.9) die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_2(x,\lambda_k)}{w'(\lambda_k)}\int_0^x u_1(t,\lambda_k)f(t)\,dt\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u_2(x,\lambda_k)}{\gamma_k w'(\lambda_k)}\int_0^x u_1(t,\lambda_k)f(t)\,dt\right). \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Wendet man die gleichen Argumente auf die Funktion

$$\tilde{H}(x,\lambda) := \frac{1}{w(\lambda)}u_2(x,\lambda)\int_x^l u_1(t,\lambda)f(t)\,dt$$

an, so ergibt sich die Entwicklung

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u_2(x,\lambda_k)}{\gamma_k w'(\lambda_k)}\int_x^l u_1(t,\lambda_k)f(t)\,dt\right). \qquad (3.11)$$

Die Gleichungen (3.10) und (3.11) addieren sich zu

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u_2(x,\lambda_k)}{\gamma_k w'(\lambda_k)}\int_0^l u_1(t,\lambda_k)f(t)\,dt\right). \qquad (3.12)$$

Die obige Herleitung bleibt sicherlich richtig, falls an jeder Stelle anstatt u_1, v_1 die Funktionen u_2 und v_2 einsetzt werden, da nur von der asymptotischen Entwicklung dieser Funktionen Gebrauch gemacht wurde. Man gelangt somit für $f(x)$ zu der Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u_2(x,\lambda_k)}{\gamma_k w'(\lambda_k)}\int_0^l u_2(t,\lambda_k)f(t)\,dt\right). \qquad (3.13)$$

(Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß hiermit Satz 2.3.1 für $\mathcal{C}^1$-Funktionen erneut bewiesen ist.)

Durch Subtraktion von (3.12) und (3.13) erhält man

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{u_2(x, \lambda_k)}{\gamma_k w'(\lambda_k)} \int_0^l [u_1(t, \lambda_k) - u_2(t, \lambda_k)] f(t)\, dt \right),$$

wobei die Reihe in jedem abgeschlossenen Teilintervall der offenen Menge $(0, l)$ gleichmäßig und auf $[0, l]$ absolut konvergiert. Indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $u_2(x, \lambda_1)$ multipliziert und anschließend bzgl. x integriert, gelangt man unter Berücksichtigung der Orthogonalität der Eigenfunktionen $u_2(x, \lambda_k)$ zu

$$\int_0^l [u_1(t, \lambda_1) - u_2(t, \lambda_1)] f(t)\, dt = 0.$$

Da dieses für alle $f(x) \in \mathcal{C}^1[0, l]$ mit $f(0) = f(l) = 0$ gilt, also auch insbesondere für $f(x) = \sin(n\pi x/l)$, $n = 1, 2, \ldots$, sieht man, daß

$$u_1(x, \lambda_1) = u_2(x, \lambda_1) \quad \text{fast überall in } [0, l]$$

gilt. Anhand der Differentialgleichung folgt

$$u_1(x, \lambda_1)[q_1(x) - q_2(x)] = 0,$$

also $q_1(x) = q_2(x)$ fast überall in $[0, l]$.

Den zweiten Fall, bei dem die Randbedingungen der Differentialgleichung $y'(a_1) = y'(a_2) = 0$ lauten, handelt man in analoger Weise ab [18].

Bei gegebener Existenz einer Lösung des inversen Problems ist damit deren Eindeutigkeit bewiesen. □

3.1.3 Dritter Beweis (nach Rundell und Sacks)

Der dritte Ansatz, mit dem der Satz 3.1.1 bewiesen werden kann, beruht auf einer nichtlinearen Integralgleichung. Er wird von W. Rundell und P. E. Sacks [27] vorgeschlagen. Anhand dieser Integralgleichung definiert man einen Operator, der kontrahierend ist und als Fixpunkt die gesuchte Funktion $q(x)$ besitzt.

Zunächst soll die Integralgleichung hergleitet werden. Ihre Gültigkeit folgt aus der Tatsache, daß der Kern eines bestimmten Transmutationsoperators eine hyperbolische Differentialgleichung erfüllt. Die Existenz dieses Transmutationsoperators folgt aus Satz 3.1.2 und Satz 3.1.3, die zum Beweis des nächsten Satz benötigt werden.

Satz 3.1.6 *Sei $q(x) \in \mathcal{C}[a_1, a_2]$. Sei $\varphi(x, \lambda)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$-\varphi'' + q(x)\varphi = \lambda\varphi, \qquad \varphi(a_1, \lambda) = 0, \quad \varphi'(a_1, \lambda) = 1.$$

Dann existiert genau eine Funktion

$$K(x,y) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega), \quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a_1 < y < x < a_2\},$$

so daß

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-a_1)}{\sqrt{\lambda}} + \int_{a_1}^{x} K(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-a_1)}{\sqrt{\lambda}}\,dt, \quad a_1 \le x \le a_2. \tag{3.14}$$

Beweis: Seien $L := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ und $L_0 := -\frac{d^2}{dx^2} + q_0(x)$ zwei Differentialoperatoren. Dann gibt es nach Satz 3.1.2 und Satz 3.1.3 genau einen Operator $T : \mathcal{C}^2 \longrightarrow \mathcal{C}^2$, der die Lösungen der Anfangswertaufgaben

$$L\varphi = \lambda\varphi \qquad \varphi(a_1,\lambda) = 0,\ \varphi'(a_1,\lambda) = 1 \tag{3.15}$$

$$L_0\varphi_0 = \lambda\varphi_0 \qquad \varphi_0(a_1,\lambda) = 0,\ \varphi'(a_1,\lambda) = 1 \tag{3.16}$$

ineinander überführt:

$$\varphi(x,\lambda) = (T\varphi_0)(x,\lambda), \quad a_1 \le x \le a_2.$$

Für $q_0 \equiv 0$ lautet die Lösung von (3.16) $\varphi_0(x,\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-a_1)}{\sqrt{\lambda}}$. Nach Satz 3.1.2 besitzt der Operator T die Form

$$\begin{aligned} (T\varphi_0)(x,\lambda) &= \varphi_0(x,\lambda) + \int_{a_1}^{a_2} K(x,t)\varphi_0(t,\lambda)\,dt \\ \Longrightarrow \qquad \varphi(x,\lambda) &= \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-a_1)}{\sqrt{\lambda}} + \int_{a_1}^{a_2} K(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(t-a_1)}{\sqrt{\lambda}}\,dt \end{aligned}$$

□

Entscheidend bei dieser Darstellung der Lösung $\varphi(x,\lambda)$ ist die Bemerkung, daß der Kern $K(x,t)$ nicht von λ abhängt. $K(x,y)$ ist die Lösung der hyperbolischen Differentialgleichung aus dem Beweis zu Satz 3.1.2, die den Randbedingungen

$$K(x,\pm x) = \pm\frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} q(t)\,dt \quad \text{für } a_1 \le x \le a_2$$

genügt. Die Herleitung der nichtlinearen Integralgleichung ist im wesentlichen eine Anwendung der Kirchhoffschen Formel [23]

$$u(x,y) = \frac{f(x+y)+f(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} g(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^y \int_{x-(y-t)}^{x+(y-t)} h(s,t)\,ds\,dt$$

zur Lösung des hyperbolischen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{yy} &= u_{xx} + h(x,y) \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= f(x), \quad u_y(x,0) = g(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bei der Anwendung der Kirchhoffschen Formel ist noch zu beachten, daß die Anfangswerte von $K(x,y)$ nicht entlang der $x-$Achse, sondern entlang einer Parallelen zur $y-$Achse durch die Folgen der Dirichlet- bzw. Dirichlet-Neumann-Eigenwerte gegeben sind. Der folgende Satz ist der Einfachheit halber für das Intervall $[0,\pi]$ formuliert. Durch lineare Transformation der unabhängigen Variablen ergeben sich die Aussagen des Satzes auch für beliebige Intervalle $[a_1,a_2]$.

Satz 3.1.7 *Sei $q(x) \in \mathcal{C}[0,\pi]$. $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge der Dirichlet- und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge der Dirichlet-Neumann-Eigenwerte bezüglich $q(x)$. Ferner sei $K(x,y)$ die Lösung der partiellen Differentialgleichung*

$$K_{yy} - K_{xx} + q(x)K = 0, \quad 0 \le |y| \le x \le \pi,$$

die den Randbedingungen

$$K(x, \pm x) = \pm\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt, \quad 0 \le x \le \pi,$$

genügt.

Dann sind die Funktionen

$$f(y) := K(\pi, y), \quad g(y) := K_x(\pi, y), \quad 0 \le |y| \le \pi,$$

eindeutig durch die Folgen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt.

Desweiteren erfüllt $q(x)$ die (nichtlineare) Integralgleichung

$$\frac{1}{2}q(x) = f'(2x-\pi) + g(2x-\pi) - \int_x^\pi q(s)K(s, 2x-s)\,ds, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Beweis: Da die Funktionen $f(y)$ und $g(y)$ ungerade Funktionen im Intervall $[-\pi,\pi]$ sind, reicht es, sie auf dem Intervall $[0,\pi]$ zu betrachten. Setzt man $\lambda = \lambda_j$ und $x = \pi$ in die Gleichung (3.14) ein, so ergibt sich

$$\int_0^\pi f(t)\sin\sqrt{\lambda_j}t\,dt = -\sin\pi\sqrt{\lambda_j}. \tag{3.17}$$

Differenziert man die Gleichung (3.14) nach x und setzt $\lambda = \mu_j$ und $x = \pi$ ein, so erhält man

$$\int_0^\pi g(t)\sin\sqrt{\mu_j}t\,dt = -\sqrt{\mu_j}\cos\pi\sqrt{\mu_j} - \frac{\sin\pi\sqrt{\mu_j}}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt. \tag{3.18}$$

Da wegen des asymptotischen Verhaltens der Eigenwerte (Satz 2.4.3)

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_n - n^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt$$

der Wert des Integrals bekannt ist, ergibt sich die Eindeutigkeit der Funktionen $f(y)$ und $g(y)$ aus Satz 2.5.4:

Seien $\tilde{f}(y)$ und $\tilde{g}(y)$ zwei Funktionen, die ebenfalls die Gleichungen (3.17) bzw. (3.18) erfüllen. Subtraktion der entsprechenden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^\pi [f(t) - \tilde{f}(t)]\sin\sqrt{\lambda_j}t\,dt &= 0,\\ \int_0^\pi [g(t) - \tilde{g}(t)]\sin\sqrt{\mu_j}t\,dt &= 0.\end{aligned}$$

Nach Satz 2.5.4 folgt somit $f - \tilde{f} \equiv 0$ und $g - \tilde{g} \equiv 0$.

Die Integralgleichung für $q(x)$ erhält man mit Hilfe der inhomogenen Wellengleichung

$$K_{yy} - K_{xx} + q(x)K = 0, \quad 0 \leq |y| \leq x \leq \pi,$$

die der Integralkern $K(x, y)$ der Transmutation erfüllt. Faßt man diese Gleichung zusammen mit den Anfangswerten $f(y)$, $g(y)$ als hyperbolisches Anfangswertproblem auf, so liefert die Kirchhoffsche Formel

$$\begin{aligned} K(x,x) &= \frac{1}{2}[K(\pi, 2x-\pi) + K(\pi,\pi)] + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2x-\pi} K_x(\pi, s)\, ds \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_x^{\pi}\int_t^{2x-t} q(t)K(t,s)\, ds\, dt. \end{aligned}$$

Differenziert man diese Formel nach x und beachtet, daß die Gleichung

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\, dt$$

besteht, so erhält man die Integralgleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q(x) &= K_y(\pi, 2x-\pi) + K_x(\pi, 2x-\pi) - \int_x^{\pi} q(t)K(t, 2x-t)\, dt \\ &= f'(2x-\pi) + g(2x-\pi) - \int_x^{\pi} q(t)K(t, 2x-t)\, dt. \end{aligned}$$

□

Die Eindeutigkeit einer Lösung des inversen Problems ist dann in folgendem Fixpunktsatz enthalten [27].

Satz 3.1.8 *Für jedes $q(x) \in L^{\infty}(0, \pi)$ sei $u = u(x, y; q)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$u_{yy} - u_{xx} + q(x)u = 0, \quad 0 \leq |y| \leq x \leq \pi,$$
$$u(\pi, y) = K(\pi, y), \quad u_x(\pi, y) = K_x(\pi, y), \quad |y| \leq \pi.$$

Dann besitzt die Abbildung

$$T : q \mapsto T(q) := 2\frac{d}{dx}u(x, x; q)$$

höchstens einen Fixpunkt in $L^{\infty}(0, \pi)$.

Beweis: (Skizze) Seien $q(x)$ und $p(x)$ zwei Funktionen in L^{∞}. Sei M so gewählt, daß $\max\{||q||_{\infty}, ||p||_{\infty}\} < M$ gilt. Mit P_M bezeichne man die Projektion

$$P_M f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } |h(x)| \leq M \\ \pm M, & \text{falls } \pm h(x) \geq M \end{cases}$$

auf die abgeschlossene Menge

$$B_M = \{f(x) \in L^2(0, \pi);\ |f(x)| \leq M \text{ fast überall}\} \subset L^2(0, \pi).$$

Um den Banachschen Fixpunktsatz [12] anzuwenden, der die Aussage des Satzes beweist, ist zu zeigen, daß $q \mapsto P_M T(q)$ für genügend großes γ auf B_M eine kontrahierende Abbildung bezüglich der Norm

$$||q||_\gamma^2 := \int_0^\pi q^2(t) e^{2\gamma(t-1)}\, dt$$

ist. Zunächst gilt

$$||P_M T(q) - P_M T(p)||_\gamma \leq ||T(q) - T(p)||_\gamma.$$

Anhand der nichtlinearen Integralgleichung aus Satz 3.1.7 berechnet man

$$\begin{aligned} T(q)(x) - T(p)(x) &= 2\int_x^\pi [p(t) - q(t)] u(t, 2x-t;\, q)\, dt \\ &\quad +2\int_x^\pi p(t)[u(t, 2x-t;\, p) - u(t, 2x-t;\, q)]\, dt. \end{aligned}$$

Das zweite Integral läßt sich mit Hilfe der Riemannschen Funktion [23] des Differentialoperators $Lu = u_{xx} - u_{yy} + q(x)u$ auch schreiben als

$$\int_x^\pi Q(x,t)[p(t) - q(t)]\, dt,$$

wobei der Kern $Q(x,t)$ beschränkt ist. Somit erhält man mit einer Konstanten $C > 0$ die Abschätzung

$$|T(q)(x) - T(p)(x)| \leq C f(x), \quad f(x) := \int_x^\pi |q(t) - p(t)|\, dt.$$

Setzt man dies in die Definition der gewichteten Norm $|| \cdot ||_\gamma$ ein, so ergibt sich die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} ||T(q) - T(p)||_\gamma^2 &\leq \int_0^\pi C^2 f^2(t) e^{2\gamma(t-1)}\, dt \\ &\leq C^2 \int_0^\pi \int_t^\pi |q(s) - p(s)|^2\, ds\, e^{2\gamma(t-1)}\, dt \\ &= \frac{C^2}{2\gamma} \int_0^\pi |q(t) - p(t)|^2 e^{2\gamma(t-1)}\, dt - \underbrace{\frac{C^2 e^{-2\gamma}}{2\gamma} \int_0^\pi |q(t) - p(t)|\, dt}_{>0} \\ &\leq \frac{C^2}{2\gamma} ||q - p||_\gamma^2. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf $f^2(t)$ angewendet und anschließend eine partielle Integration durchgeführt. Somit ist die Abbildung P_M kontrahierend auf B_M, falls γ genügend groß gewählt wird. Damit folgt die Behauptung aus dem Banachschen Fixpunktsatz. □

Damit ist Satz 3.1.1 erneut bewiesen Mit Hilfe der nichtlinearen Integralgleichung aus Satz 3.1.7 leitet sich ein numerisches Verfahren her, das im nächsten Abschnitt näher beschrieben wird.

3.2 Numerische Verfahren

In diesem Abschnitt werden drei Algorithmen beschrieben, die zu einer endlichen Anzahl vorgegebener Dirichlet-Eigenwerte und zugehörigen Normierungskonstanten punktweise die Koeffizientenfunktion der gesuchten Sturm-Liouvilleschen bestimmen.

Das erste Verfahren basiert auf der Gel'fand-Levitan-Gleichung (3.5). Das zweite Verfahren stützt sich auf die nichtlinearen Integralgleichung des dritten Eindeutigkeitsbeweises. Das dritte Verfahren schließlich bestimmt die gesuchte Funktion mit Hilfe eines Lanczos-Algorithmus für Tridiagonalsysteme.

3.2.1 Diskretisierung der Gel'fand-Levitan-Gleichung

Es wird das in [9] beschriebene Verfahren dargestellt, das auf den hier vorliegenden Fall der Dirichlet-Eigenwerte und Normierungskonstanten angepaßt wurde. Zu zwei vorgegebenen Folgen $(\lambda_n)_{n\in\mathrm{N}}$ und $(\varrho_n)_{n\in\mathrm{N}}$ von Eigenwerten und Normierungskonstanten soll die Koeffizientenfunktion $q(x)$ der Eigenwertaufgabe

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \qquad 0 \le x \le l, \tag{3.19}$$

$$u(0) = u(l) = 0 \tag{3.20}$$

rekonstruiert werden. Die ersten N Werte diese Folgen stellen die Eingabedaten für das beschriebene Verfahren dar. Sie werden im folgenden kurz ,,Daten" genannt. Nun lassen sich allgemein hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Lösung des inversen Problems angeben [7], [20]. Darauf wird hier nicht näher eingegangen. In Satz 3.1.4 wurde zumindest bewiesen, daß aus dem asymptotischen Verhalten der Daten

$$\lambda_n = \frac{\pi^2}{l^2}n^2 + \alpha_n, \tag{3.21}$$

$$\varrho_n^2 = \frac{l^3}{2\pi^2 n^2}\left(1 + \frac{\beta_n}{n}\right) \tag{3.22}$$

mit $(\alpha_n)_{n\in\mathrm{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathrm{N}} \in l^2(\mathbb{R})$ die Konvergenz der Reihe

$$F(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda_k}x\,\sin\sqrt{\lambda_k}y}{|\lambda_k|\varrho_k^2} - \frac{2}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x\,\sin\frac{k\pi}{l}y\right), \quad x,y \in [0,l], \tag{3.23}$$

bzgl. der Norm von $L^2(0,l) \times L^2(0,l)$ folgt. Für $\lambda_k < 0$ ist dabei in (3.23) $\sin\sqrt{\lambda_k}x$ durch $\sinh\sqrt{|\lambda_k|}x$ zu ersetzen. Wie aus (3.21) ersichtlich, sollte die zu bestimmende Funktion $q(x)$ im Mittel gleich Null sein:

$$\frac{1}{l}\int_0^l q(t)\,dt = 0.$$

Auf diese Voraussetzung wird im nächsten Kapitel noch genauer eingegangen. Für die gesuchte Funktion $q(x)$ gilt nach Abschnitt 3.1.1

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}H(x,x), \quad x \in [0,l],$$

wobei $H(x, y)$ die Lösung der durch $y \leq x$ parametrisierten Familie der Integralgleichungen

$$F(x, y) + \int_0^x H(x, t) F(t, y)\, dt + H(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq x \leq l \tag{3.24}$$

ist. Wie in Satz 3.1.5 gezeigt, existiert unter den genannten Voraussetzungen für jedes $0 \leq y \leq x$ eine solche Lösung $H(x, y)$. Somit setzt sich das Verfahren aus den Schritten

1. Bestimmung der Funktion $F(x, y)$ anhand der gegebenen Daten.
2. Berechnung der Funktion $H(x, y)$ aus (3.24).
3. Berechnung von $2\frac{d}{dx}H(x, x)$ zur Bestimmung von $q(x)$.

zusammen.

Die gesuchte Funktion $q(x)$ sei durch die diskreten Werte

$$q_j := q(x_j), \quad x_j = jh, \quad h := \frac{l}{M}, \quad j = 0, 1, \ldots, M,$$

zu approximieren.

Es liegt nahe, die Schritte 1. – 3. wie folgt zu diskretisieren:

1. Da nur endlich viele Eigenwerte und zugehörige Normierungskonstanten vorgelegt werden können, kann die Reihe $F(x, y)$ nie exakt bestimmt werden. Hier hilft man sich, indem man für die fehlenden Werte die Werte des Nullpotentials einsetzt. Dadurch wird aus der Reihe eine endliche Summe. Seien also die ersten N Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ und entsprechend die ersten N Normierungskonstanten $\varrho_1, \ldots, \varrho_N$ bekannt und das Gitter $(x_j, y_k) = (jh, kh)$ für $h = l/M$ und $0 \leq j, k \leq M$ gegeben. Man erhält

$$\tilde{F}(x_j, y_k) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda_i}jh \sin\sqrt{\lambda_i}kh}{|\lambda_i|\varrho_i^2} - \frac{2}{l} \sin\frac{ij\pi}{l}h \sin\frac{ik\pi}{l}h \right),$$

$j, k = 0, 1, \ldots, M$. Es ist zu beachten, daß mit $\tilde{F}(x_j, y_k)$ eine Funktion $\tilde{q}(x_j)$ angenähert wird, die die Eigenwerte

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_N, \frac{\pi^2}{l^2}(N+1)^2, \frac{\pi^2}{l^2}(N+2)^2, \ldots$$

besitzt.

2. Eine Möglichkeit, die Integralgleichung (3.24) zu diskretisieren, besteht darin, die zusammengesetzte Trapezregel für $f(x) \in \mathcal{C}^2[0, l]$

$$\int_0^{x_j} f(t)\, dt = h \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \right) - \frac{h^2 x_j}{12} f''(\xi), \quad \xi \in (0, x_j),$$

anzuwenden [30]. Damit stellen die Unbekannten

$$H = \begin{pmatrix} H_{00} & & \\ \vdots & \ddots & \\ H_{M0} & \cdots & H_{MM} \end{pmatrix}$$

der linearen Gleichungssysteme

$$\tilde{F}(x_j, y_k) + h \sum_{i=0}^{j} s_{ji} H_{ji} \tilde{F}(x_i, y_k) + H_{jk} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, M, \tag{3.25}$$

mit

$$s_{ji} := \begin{cases} 1/2 & \text{für} \quad i = 0 \text{ oder } i = j \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Approximationen an die Werte $\tilde{H}(x_j, y_k)$ dar. Sei $S_j := \operatorname{diag}(s_{j0}, \ldots, s_{jj})$ eine Diagonalmatrix. Ferne seien

$$F_j := (\tilde{F}(x_m, y_k))_{0 \le m,k \le j} \quad \text{und} \quad H_j := (H_{mk})_{0 \le m,k \le j}$$

die Hauptuntermatrizen der Länge $j+1$ von

$$\tilde{F} = (\tilde{F}(x_m, y_k))_{0 \le m,k \le M} \quad \text{und} \quad H = (H_{mk})_{0 \le m,k \le M}.$$

Bezeichnet man mit h_j^t bzw. f_j^t die letzten Zeilen von H_j bzw. F_j, so läßt sich (3.25) umschreiben zu

$$(I + hF_j S_j) h_j = -f_j, \quad j = 0, 1, \ldots, M.$$

Multipliziert man $(I + hF_j S_j)$ mit S_j^{-1} von rechts, so bekommt man

$$A_j z_j = -f_j. \tag{3.26}$$

Hierbei wurde $z_j = S_j h_j$ gesetzt und A_j ist die Hauptuntermatrix der Länge $j+1$ von $A + e_j e_j^t$. Dabei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + h\tilde{F}$$

eine symmetrische Matrix und e_j der j-te Einheitsvektor. Zur Lösung der Gleichungssysteme (3.26) wird angenommen, daß die Matrix A positiv definit sei [9]. A läßt sich dann mittels einer Cholesky-Zerlegung $A = LDL^t$ mit einer unteren Dreiecksmatrix L und einer Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_0, \ldots, d_M)$ ausdrücken. Dabei sind die Diagonalelemente von L alle gleich eins. Sei L_j die Hauptuntermatrix der Länge $j+1$ von L und D_j die von $D + e_j e_j^t$, dann folgt

$$A_j = L_j D_j L_j^t.$$

Zur Bestimmung der Werte H_{jj} genügt es, die Gleichung $L_j \tilde{z}_j = -f_j$ aufzulösen. Damit erhält man dann

$$H_{jj} = \frac{2}{1+d_j}(\tilde{z}_j)_j \quad \text{für} \quad j = 0, 1, \ldots, M.$$

Falls A nicht positiv definit ist, so können anhand einer Dreieckszerlegung die Darstellungen $P_j A_j = L_j R_j$ mit Permutationsmatrizen P_j und rechten oberen Dreiecksmatrizen R_j gefunden werden, sofern die A_j nichtsingulär bleiben. L_j sind wiederum untere Dreieckmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen, stimmen aber sonst nicht mit denen der Cholesky-Zerlegung überein. Zur Bestimmung von H_{jj} werden wie oben die Gleichungen $L_j \tilde{z}_j = -P_j f_j$ gelöst und

$$H_{jj} = \frac{1}{r_{jj}}(\tilde{z}_j)_j \quad \text{für} \quad j = 0, 1, \ldots, M$$

berechnet, sofern alle $r_{jj} \neq 0$ sind. Ansonsten bricht der Algorithmus ab.

3. Die wesentlichen Operationen des Algorithmus, die ausgeführt werden, sind eine Cholesky-Zerlegung, die numerisch stabil ist [30], und eine numerische Differentiation. Da diese im Allgemeinen schlecht konditioniert ist [24], dominiert sie die Qualität des vorgeschlagenen Algorithmus. Wegen der L^2-konvergenten Funktion ist zu erwarten, daß die zu differenzierende Funktion $g(x) := H(x,x)$ mit oszillierenden Werten vorliegt. Je stärker diese Oszillation ist, um so schlechter werden die Ergebnisse der numerischen Differentiation und damit die Ergebnisse des Algorithmus sein. Es liegt also nahe, vor der Differentiation die Werte $g_j = g(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, M$, zu glätten.

   Nach einer etwaigen Glättung wird im Algorithmus die Differentiation stets durch Bildung zentraler Differenzen vorgenommen:

$$\tilde{q}(x_j) = \frac{g_{j+1} - g_{j-1}}{h}, \quad j = 1, 2, \ldots, M-1.$$

   Die Werte q_0 und q_M werden durch die unsymmetrischen Differenzen

$$\tilde{q}(x_0) = \frac{2}{h}(g_1 - g_0) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{q}(x_M) = \frac{2}{h}(g_{M-1} - g_M)$$

   angenähert.

   Eine Glättung der Werte g_j vor der Differentiation erreicht man z.B. durch eine Mittelung gemäß der Formel

$$g_j^{\text{neu}} = \frac{g_{j+1}^{\text{alt}} + g_{j-1}^{\text{alt}}}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots, M-1.$$

   Die Randwerte g_0 und g_M werden dabei unverändert übernommen. Dies kommt einer linearen Extrapolation der Funktion $g(x)$ über die Randpunkte 0 und l gleich. Durch sukzessive Anwendung dieser Formel können die Ausgangswerte g_j bei entsprechendem Genauigkeitsverlust noch weiter geglättet werden. Im nächsten Kapitel werden dazu numerische Beispiele gegeben.

3.2.2 Sukzessive Approximation

Aus dem dritten Beweis zur Eindeutigkeit einer Lösung des inversen Problems ergibt sich ein alternatives iteratives Verfahren, um die Funktion $q(x)$ für $x \in [a_1, a_2]$ aus den Spektraldaten $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu rekonstruieren. Es setzt sich aus folgenden Schritten zusammen:

1. Bestimme aus $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Funktionen
$$f(y) = K(a_2, y), \quad g(y) = K_x(a_2, y).$$
2. Wähle ein $q_0(x)$ als Startwert aus, z.B. $q_0 \equiv 0$.
3. Setze
$$q_{n+1}(x) := 2\frac{d}{dx}u(x, x; q_n),$$
wobei $u = u(x, y; q_n)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe
$$\begin{aligned} u_{yy} - u_{xx} + q_n(x)u &= 0, \quad a_1 \leq |y - a_1| \leq x \leq a_2, \\ u(a_2, y) = f(y),\ u_x(a_2, y) &= g(y), \quad |y - a_1| \leq a_2 \end{aligned}$$
ist.

Zur Bestimmung der Funktionen $f(y)$ und $g(y)$ müssen Gleichungen der Gestalt
$$\int_{a_1}^{a_2} f(t) \sin\sqrt{\lambda_k}(t - a_1)\, dt = \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$
gelöst werden. Dabei sind die β_k aus den Spektraldaten bekannte Zahlen. Hierzu wähle man „passende" Basisfunktionen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ auf dem Intervall $[a_1, a_2]$ und gelangt zu dem Ansatz
$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} f_k b_k(t).$$
Man erhält so für die zu bestimmenden Koeffizienten $\xi := (f_1, f_2, \ldots, f_N)^t$ ein lineares Gleichungssystem
$$A\xi = \beta$$
mit $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N)^t$ und einer $N \times N$ Matrix A mit den Einträgen
$$a_{jk} = \int_{a_1}^{a_2} b_k(t) \sin\sqrt{\lambda_j}(t - a_1)\, dt.$$
Die Basisfunktionen $\{b_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ sollten so gewählt sein, daß die Matrix A invertierbar ist. Dies ist z.B. für $b_k(t) := \sin\sqrt{\lambda_k}(t - a_1)$ der Fall, was unmittelbar aus der linearen Unabhängigkeit der so gebildeten Sinusfunktionen folgt. Eine andere Wahl wäre $b_k(t) := \sin\frac{k\pi}{a_2 - a_1}(t - a_1)$. Bei dieser Wahl ist A invertierbar, falls $\lambda_N < (\frac{\pi}{a_2 - a_1})^2(N + 1)^2$. In beiden Fällen ist die Matrix A stark diagonal-dominant mit einer Konditionszahl sehr

nahe bei 1. Die Beispielrechnungen im nächsten Kapitel sind mit den erstgenannten Basisfunktionen durchgeführt worden.

Seien nun $\varphi_k(x) = \varphi(x, \lambda_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} -\varphi'' + q(x)\varphi &= \lambda\varphi, \quad a_1 \le x \le a_2, \\ \varphi(a_1, \lambda) &= 0, \qquad \varphi'(a_1, \lambda) = 1, \end{aligned}$$

so daß $\varphi_k(a_2) = 0$ gilt. Da als Daten Dirichlet-Eigenwerte zusammen mit einer Folge von Normierungskonstanten $(\varrho_j)_{j\in N}$ bekannt sein sollen, für die Funktion $g(y) = K_x(a_2, y)$ jedoch die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} K_x(a_2, t) \sin \sqrt{\lambda_k}(t - a_1)\, dt &= \sqrt{\lambda_k}(\varphi_k'(a_2) - \cos a_2\sqrt{\lambda_k}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin a_2\sqrt{\lambda_k} \int_{a_1}^{a_2} q(t)\, dt \end{aligned}$$

gelöst werden muß, besteht das Problem, aus den Normierungskonstanten ϱ_k die Werte $\varphi_k'(a_2)$ zu bestimmen. Dies kann wie folgt geschehen.

Der Einfachheit halber sei $a_1 = 0$ und $a_2 = l$. Dann gilt bekanntlich (s. [26])

$$\varphi(l, \lambda) = l \prod_{j=1}^{\infty} \frac{l^2(\lambda_j - \lambda)}{j^2\pi^2}.$$

Differentiation nach λ liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(l, \lambda_k) &= \frac{-l^3}{k^2\pi^2} \prod_{j=1, j\ne k}^{\infty} \frac{l^2(\lambda_j - \lambda_k)}{j^2\pi^2} \\ &= \frac{-l}{k^2\frac{\pi^2}{l^2} - \lambda_k} \prod_{j=1, j\ne k}^{\infty} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{j^2\frac{\pi^2}{l^2} - \lambda_k} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{l^2\lambda_k}{j^2\pi^2}\right) \\ &= \frac{-\sin l\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_k}(k^2\frac{\pi^2}{l^2} - \lambda_k)} \prod_{j=1, j\ne k}^{\infty} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{j^2\frac{\pi^2}{l^2} - \lambda_k}. \end{aligned}$$

Die Normierungskonstanten sind durch $\varrho_k = (u_k'(0))^{-1}$ gegeben, wobei $u_k(x)$ die k-te normierte Eigenfunktion ist. Daraus folgt $\varrho_k u_k(x) = \varphi(x, \lambda_k)$ und mit der Gleichung

$$\int_0^l \varphi^2(t, \lambda)\, dt = \varphi'(l, \lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(l, \lambda)$$

schließlich

$$\varrho_k^2 = \int_0^l \varphi^2(t, \lambda_k)\, dt = \varphi'(l, \lambda_k)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(l, \lambda_k).$$

Damit erhält man den gewünschten Ausdruck für $\varphi_k'(l)$:

$$\varphi_k'(l) = -\frac{\varrho_k^2\sqrt{\lambda_k}(k^2\frac{\pi^2}{l^2} - \lambda_k)}{\sin l\sqrt{\lambda_k}} \prod_{j=1, j\ne k}^{\infty} \left(\frac{j^2\frac{\pi^2}{l^2} - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}\right).$$

Zur numerischen Auswertung dieses Ausdruckes ist zu bemerken, daß das unendliche Produkt aufgrund der endlich vielen Daten, die vorgelegt werden können, als endliches Produkt zu berechnen ist. Der vordere Faktor sollte darüberhinaus umgeschrieben werden zu

$$-\frac{\varrho_k^2\sqrt{\lambda_k}(k^2\frac{\pi^2}{l^2}-\lambda_k)}{\sin l\sqrt{\lambda_k}} = (-1)^k\frac{\varrho_k^2}{l^2}\sqrt{\lambda_k}(k\pi + l\sqrt{\lambda_k})\frac{c_k}{\sin c_k},$$

wobei $c_k = l\sqrt{\lambda_k} - k\pi$ gesetzt ist. Falls c_k sehr nahe bei Null liegt, z.B. kleiner als die Maschinengenauigkeit ist, ist es für den letzten Faktor der rechten Seite günstiger, den Wert $(\sin c_k)/c_k$ durch die Taylorreihe zu berechnen und dann den Kehrwert zu bilden.

Die partielle Differentialgleichung, die im Iterationsschritt gelöst werden muß, wird mit dem Differenzenschema

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h^2}[\tilde{u}(x_{i+1},y_j) - 2\tilde{u}(x_i,y_j) + \tilde{u}(x_{i-1},y_j)] = \\ &\qquad \frac{1}{h^2}[\tilde{u}(x_i,y_{j+1}) - 2\tilde{u}(x_i,y_j) + \tilde{u}(x_i,y_{j-1})] + \tilde{q}_n(x_i)\tilde{u}(x_i,y_j)\end{aligned}$$

angenähert, wobei $x_i = ih$ und $y_j = jh$, $h = \frac{l}{M}$, $i,j = 0,1,\ldots,M$, gesetzt ist. Diskretisierungen mit unterschiedlichen Schrittweiten in x- und y-Richtung lieferten ungenauere Lösungen für die Differentialgleichung.

3.2.3 Lanczos-Algorithmus

Ein weiteres Verfahren, welches von F. Natterer [22] vorgeschlagen wird, beruht auf der Lanczos-Methode. Zunächst approximiert man die Differentialgleichung der Sturm-Liouville-Aufgabe mit Dirichletschen Randbedingungen durch

$$\begin{aligned}\frac{-y_{j+1}+2y_j-y_{j-1}}{h^2} + q_j y_j &= \lambda y_j, \quad j = 1,\ldots,M-1, \\ y_0 = y_M &= 0, \quad h = \frac{b-a}{M},\end{aligned} \tag{3.27}$$

wobei an den Stellen $x_j = a+jh$ diskretisiert wird. Dabei sind $y_j = y(x_j)$ und $q_j = q(x_j)$ die Funktionswerte an den Stützstellen. Der Wert $y'(a)$ wird durch y_1/h approximiert. Mit den Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_{M-1}$ und den Normierungskonstanten $\varrho_k = (y_k'(a))^{-1}$, $k = 1,\ldots,M-1$, der normierten Eigenfunktionen $y_k(x)$ ist dann ein inverses Problem für eine Tridiagonalmatrix zu lösen, um die Werte q_j zu bestimmen. Dies kann mit einem Lanczos-Algorithmus geschehen.

Allerdings stimmt das asymptotische Verhalten der Eigenwerte des Systems (3.27) nicht mit der Asymptotik der Eigenwerte des Sturm-Liouville-Problems überein, so daß dieser einfache Ansatz zu falschen Ergebnissen führt. Daher wird folgende Korrektur vorgeschlagen:

Sei $y^k(x)$ die k-te normierte Eigenfunktion der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe bei Dirichlet-Randbedingungen. Mit $l := b-a$ gilt dann für $k \to \infty$

$$y^k(x) \sim \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Setzt man die Approximation für $-y''$ gleich

$$\frac{-y_{j+1}+2y_j-y_{j-1}}{(h\,\mathrm{sinc}\,\frac{hk\pi}{2l})^2}, \qquad \mathrm{sinc}\; x := \frac{\sin x}{x},$$

so wird mit dieser Formel der Wert der negativen zweiten Ableitung der Funktionen $1, x, \sin\frac{k\pi}{l}x$ und $\cos\frac{k\pi}{l}x$ an den Stellen $x = x_j$ exakt angegeben.

Entsprechend ist für $y(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x$ durch

$$\frac{y_1}{h\,\mathrm{sinc}\,(\frac{hk\pi}{l})}$$

der Wert $y'(a)$ exakt gegeben.

Man gelangt so für die k-te Eigenfunktion $y^k(x)$ zu den Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} -y^k_{j+1} + 2y^k_j - y^k_{j-1} + q_j c_k y^k_j &= \lambda_k c_k y^k_j, \quad j = 1, \ldots, M-1, \\ y^k_0 = y^k_M &= 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

wobei $y^k_j = y^k(x_j)$ und $c_k = (h\,\mathrm{sinc}\,\frac{hk\pi}{2l})^2$ gesetzt wurde.

Die gesuchten Werte q_j lassen sich nun aus den Trigiagonalsystemen (3.28) wie folgt bestimmen. Setzt man für $j = 1, \ldots, M-1$

$$u_j := (y^1_j, \ldots, y^{M-1}_j)^t$$

und $u_0 = u_M := (0, \ldots, 0)^t$, so ergibt sich mit den Diagonalmatrizen

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{M-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{M-1} \end{pmatrix}$$

aus (3.28) die Gleichung

$$-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1} + q_j C u_j = \Lambda C u_j, \quad j = 1, \ldots, M-1. \tag{3.29}$$

Nun sind die Vektoren u_j annähernd normiert und paarweise othogonal bzgl. des kanonischen Innenproduktes $(\cdot,\cdot)$ des $\mathbb{R}^{M-1}$, da dies für die Vektoren $(y^k_1, \ldots, y^k_{M-1})^t$ zutrifft. Bildet man auf der linken und rechten Seite von (3.29) das kanonische Innenprodukt mit u_j, erhält man somit

$$2 + q_j(Cu_j, u_j) = (\Lambda C u_j, u_j), \quad j = 1, \ldots, M-1. \tag{3.30}$$

Es ergibt sich folgender Iterationschritt: Der Wert q_j sei für ein $j \in \{1, 2, \ldots, M-2\}$ schon bestimmt. Dann berechnet sich u_{j+1} nach (3.29) zu

$$u_{j+1} = (2I + q_j C - \Lambda C)u_j - u_{j-1},$$

wobei I für die $(M-1)\times(M-1)$ Einheitsmatrix steht. Mit u_{j+1} erhält man den Wert q_{j+1} aus (3.30).

Da u_1 aufgrund

$$y^k_1 = \frac{h}{\varrho_k}\,\mathrm{sinc}\,\frac{hk\pi}{l}$$

bekannt ist, ergibt sich der Wert q_1 aus der Gleichung (3.30) für $j = 1$. Damit sind die Werte $q_2, \ldots, q_{M-1}$ nach $M-2$ Iterationsschritten bestimmt.

Kapitel 4

Numerische Ergebnisse

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird allgemein untersucht, welche Auswirkungen der Einsatz endlich vieler Spektraldaten auf das Ergebnis einer punktweisen Rekonstruktion der gesuchten Koeffizientenfunktion $q(x)$ hat.

Der zweite Abschnitt zeigt, daß die Konvergenzordnung der Gel'fand-Levitan-Methode bzgl. der Schrittweite h der rekonstruierten Funktion $O(h^2)$ beträgt.

Der dritte Abschnitt beschreibt die Funktionen, die für die numerischen Beispielrechnungen verwendet worden sind. Die Eigenwerte und Normierungskonstanten für Dirichletsche Randbedingungen werden auszugsweise angegeben.

Im vierten Abschnitt wird auf die Bedingung, daß die zu bestimmende Funktion im Mittel Null sein soll, näher eingegangen.

Im fünften Abschnitt schließlich werden die Ergebnisse der einzelnen Verfahren dargestellt und verglichen. Dabei wird festgestellt, daß beim Lanczos-Verfahren ein bisher ungeklärter Skalierungsfehler auftritt.

4.1 Fehler bei endlich vielen Spektraldaten

Die Eindeutigkeitsaussage des vorherigen Kapitels setzt Kenntnisse über abzählbar unendlich viele Eigenwerte und Normierungskonstanten voraus. In praktischen Anwendungen stehen diese jedoch nie zur Verfügung. Es stellt sich somit die Frage, inwieweit man aus endlich vielen Spektraldaten eine Koeffizientenfunktion konstruieren kann, so daß die zugehörige Sturm-Liouville Aufgabe diese endlich vielen Eigenwerte und Normierungskonstanten besitzt. Dieses reduzierte inverse Problem ist aus Dimensionsgründen nicht mehr eindeutig zu lösen: der von allen Vektoren $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ und $(\varrho_1, \ldots, \varrho_N) \in \mathbb{R}^N$ aufgespannte Vektorraum ist endlich-dimensional, wohingegen die Funktionenräume der gesuchten Koeffizientenfunktion unendlich-dimensional sind.

Sei mit $\mathcal{C}_M[a,b] := \{f(x) \in \mathcal{C}[a,b];\ \sup|f(x)| \leq M\}$ der Vektorraum der stetigen Funktionen, die auf dem Intervall $[a,b]$ durch eine Zahl $M > 0$ beschränkt bleiben, definiert. Wird für $q(x) \in \mathcal{C}_M[0,1]$ mit $\lambda_n(q)$ der n-te Eigenwert des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y = \lambda y, & \qquad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = y(1) = 0 & \qquad (\text{bzw. } y'(0) = y'(1) = 0) \end{aligned}$$

bezeichnet, so läßt sich folgender Satz beweisen, s. Barnes [2]:

Satz 4.1.1 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Konstante $K_n(M)$, so daß für alle $q_1(x), q_2(x) \in \mathcal{C}_M[0,1]$ die Ungleichung*

$$|\lambda_n(q_1) - \lambda_n(q_2)| \le K_n(M)||q_1 - q_2||_{2L^1}$$

gilt. Dabei ist die Norm $||\cdot||_{2L^1}$ durch

$$||q||_{2L^1} := \left|\int_0^1 q(t)\,dt\right| + \left|\int_0^1\int_0^t q(s)\,ds\,dt\right| + \int_0^1 \left|\int_0^t\int_0^s q(r)\,dr\,ds\right|\,dt$$

definiert.

Beweis: Sei $V_n(q) :=< u_1, \ldots, u_n >$ der von den ersten n normierten Eigenfunktionen des Randwertproblems aufgespannte Vektorraum. Sei $u_k(x) \in V_n(q)$ die k-te Eigenfunktion. Dann gilt für $\xi \in [0,1]$:

$$|u_k'(x)| = \left|u_k(\xi) + \int_\xi^x u_k''(t)\,dt\right| \le |u_k'(\xi)| + \int_0^1 |(\lambda_k(q) - q(t))u_k(t)|\,dt. \tag{4.1}$$

Da $u_k(x)$ in dem offenen Intervall $(0,1)$ genau $k-1$ Nullstellen besitzt [4], gibt es nach dem Mittelwertsatz (für $k < 3$ anhand der Randbedingungen) stets eine Stelle $\xi \in [0,1]$, so daß $u_k'(\xi) = 0$. Nach Voraussetzung gilt $\max|q(x)| \le M$. Deshalb gibt es für alle $q(x) \in \mathcal{C}_M[0,1]$ eine Zahl $c_k < \infty$, so daß $|\lambda_k(q)| \le c_k$. Somit erhält man aus (4.1) aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\max_{0\le x\le 1} |u_k'(x)|^2 \le (c_k + M)^2 \int_0^1 u_k^2(t)\,dt = (c_k + M)^2,$$

also

$$\max_{0\le x\le 1} |u_k'(x)| \le c_k + M. \tag{4.2}$$

Ferner folgt aus der Stetigkeit von $u_k(x)$, daß es eine Zahl d_k gibt, so daß $\sup|u_k(x)| \le d_k$ bleibt. Damit liefert die zugrundeliegende Differentialgleichung

$$\max_{0\le x\le 1} |u_k''(x)| \le d_k(c_k + M) \tag{4.3}$$

für alle $q(x) \in \mathcal{C}_M[0,1]$. Mit $H_n(M)$ sei das Maximum aller dieser Schranken (4.2) und (4.3) für $k = 1, 2, \ldots, n$ bezeichnet und $\delta q(x) := q_2(x) - q_1(x)$. Durch zweimaliges partielles Integrieren erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^1 \delta q(t) u^2(t)\,dt &= u^2(1)\int_0^1 \delta q(t)\,dt \\ &\quad -[u^2(1)]'\int_0^1\int_0^t \delta q(s)\,ds\,dt \\ &\quad +\int_0^1 [u^2(t)]''\int_0^t\int_0^s \delta q(r)\,dr\,ds\,dt. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Da nun $[u^2]' = 2uu'$ und $[u^2]'' = 2[u']^2 + 2uu''$, ist $K_n(M) := 4H_n^2(M)$ eine gemeinsame obere Schranke der Funktionen $u^2, (u^2)', (u^2)''$ auf $[0,1]$ für $u(x) \in V_n(q)$ mit $||u||_{L^2} = 1$ und $q(x) \in \mathcal{C}_M[0,1]$ beliebig. Nach dem Courantschen Minimum-Maximumprinzip [11] gilt

$$\begin{aligned}\lambda_n(q) &= \max_{\substack{u \in V_n(q) \\ ||u||_{L^2}=1}} (D_q u, u)_{L^2} \\ &\leq \max_{\substack{u \in W_n \\ ||u||_{L^2}=1}} (D_q u, u)_{L^2},\end{aligned}$$

wobei

$$(D_q u, u)_{L^2} := \int_0^1 [u'(t)]^2 + q(t)u^2(t)\, dt$$

bedeutet und $W_n \subset \mathcal{C}^2[0,1]$ ein Unterraum der Dimension n ist. Aus (4.4) ergibt sich mit der Zahl $K_n(M)$

$$\begin{aligned}(D_{q_2} u, u)_{L^2} &= (D_{q_1} u, u)_{L^2} + \int_0^1 \delta q(t) u^2(t)\, dt \\ &\leq (D_{q_1} u, u)_{L^2} + K_n(M)||\delta q||_{2L^1}.\end{aligned}$$

Ermittelt man für beide Seiten das Maximum über alle $u \in V_n(q_1)$ mit $||u||_{L^2} = 1$, so liefert das Courantsche Minimum-Maximumprinzip die Ungleichung

$$\lambda_n(q_2) \leq \lambda_n(q_1) + K_n(M)||\delta q||_{2L^1}.$$

Die Behauptung des Satzes erhält man nun durch Vertauschen von q_1 und q_2. $\square$

Man sieht aufgrund des Satzes: kleine Änderungen einer Potentialfunktion $q(x)$ in der $2L^1$-Norm bewirken nur geringe Änderungen der einzelnen Eigenwerte. Aus endlich vielen Spektraldaten kann nur eine L^1-Approximation an $\int_0^x \int_0^t q(s)\, ds\, dt$ gewonnen werden. Somit hängt jede numerische Methode, die eine punktweise Rekonstruktion der Potentialfunktion aus endlich vielen Spektraldaten liefert, implizit von der Qualität der zweiten Ableitung dieser L^1-Approximation ab.

4.2 Konvergenzordnung der Gel'fand-Levitan-Methode

Die Untersuchung der Konvergenzordnung ist [9] entnommen. Dort wird angenommen, daß die Funktion $F(x,y)$ der Integralgleichung

$$F(x,y) + \int_0^x H(x,t)F(t,y)\, dt + H(x,y) = 0 \tag{4.5}$$

exakt bekannt ist. Falls nur endlich viele Eigenwerte als Daten für $F(x,y)$ verwendet werden und die restlichen Eigenwerte gleich den Werten für das Nullpotential $q = 0$ gesetzt werden, kann man das so rekonstruierte Potential als eine Störung des Nullpotentials auffassen. Es bleiben zwei Ursachen für Fehler bei der Rekonstruktion:

1. Annäherung des Integrals der Gleichung (4.5) durch eine endliche Summe,
2. numerische Differentiation.

Anhand der Euler-McLaurinschen Summenformel [30] gilt für $f(x) \in \mathcal{C}^{2m+2}[0,1]$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)\,dt &= \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \sum_{n=1}^{m} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n-1}}{dt^{2n-1}} f(t)\Big|_{t=0}^{t=1} \\ &\quad - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} \frac{d^{2m+2}}{dt^{2m+2}} f(t)\Big|_{t=\tau}, \quad 0 < \tau < 1. \end{aligned}$$

Die B_{2n} sind die Bernoulli-Zahlen [30]: $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$. Dabei ergibt sich durch Aufsummierung der Teilintegrale über die äquidistanten Stützpunkte $t_l = a + lh$, $l = 0, \ldots, j$, $h = \frac{b-a}{j}$ und durch Variablentransformation für die zusammengesetzte Trapezregel

$$T(h)f = h\left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \ldots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

die Formel

$$\begin{aligned} T(h)f &= \int_a^b f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{m} h^{2n} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n-1}}{dt^{2n-1}} f(t)\Big|_{t=a}^{b} \\ &\quad + (b-a)h^{2m+2} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} \frac{d^{2m+2}}{dt^{2m+2}} f(t)\Big|_{t=\tau}, \\ &\quad a < \tau < b, \quad f(x) \in \mathcal{C}^{2m+2}[a,b]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Die durch die Trapezregel diskretisierte Gleichung (4.5) berechnet sich somit zu

$$\begin{aligned} & F(x_j, y_k) + T(h)(H(x_j,\cdot)F(\cdot,y_k)) + H(x_j,y_k) \\ =\; & \frac{h^2}{12}\frac{d}{dt} H(x_j,t)F(t,y_k)\Big|_{t=0}^{x_j} - \frac{x_j h^4}{720}\frac{d^4}{dt^4}(HF)(t)\Big|_{t=\tau}, \quad 0 < \tau < x_j. \end{aligned} \tag{4.7}$$

F und H sind hierbei als viermal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Also erfüllt H die diskretisierte Gleichung (4.5) bis auf Terme der Ordnung $O(h^2)$.

Sei $G(x,y)$ eine Lösung der einparametrigen Integralfamilie

$$G(x,y) + \int_0^x G(x,t)F(t,y)\,dt = -\frac{h^2}{12}\frac{d}{dt}H(x,t)F(t,y)\Big|_{t=0}^{x}, \quad y \le x.$$

Diese Gleichung hat die gleiche Form wie die Gleichung (4.5). Daher ist unter den gegebenen Voraussetzungen die Lösung eindeutig und zweimal stetig differenzierbar. Es gilt $G(0,0) = 0$. Mit der Formel (4.6) erhält man

$$\begin{aligned} & G(x_j,y_k) + T(h)(G(x_j,\cdot)F(\cdot,y_k)) \\ =\; & -\frac{h^2}{12}\frac{d}{dt}H(x_j,t)F(t,y_k)\Big|_{t=0}^{x_j} + \frac{x_j h^2}{12}\frac{d^2}{dt^2}(GF)(t)\Big|_{t=\tau}, \quad 0 < \tau < x_j. \end{aligned}$$

Indem man beide Seiten dieser Gleichung mit h^2 multipliziert und dann die Gleichung (4.7) addiert, ergibt sich, daß $(H + h^2 G)(x,y)$ die diskrete Gel'fand-Levitan-Gleichung bis auf Terme der Ordnung $O(h^4)$ erfüllt.

Seien H_{jk} die Lösungen der diskretisierten Gleichungen und r_j^t die letzte Zeile der Hauptuntermatrix der Länge $j+1$ der Matrix $(H_{jk} - (H + h^2 G)(x_j, y_k))_{jk}$. Dann folgt mit den Bezeichnungen des vorherigen Kapitels

$$
\begin{aligned}
& (I + hF_j S_j) r_j \\
= \quad & \frac{x_j h^4}{12} \left(-\frac{1}{60} \frac{d^4}{dt^4} (HF)(t) \bigg|_{t=\tau_1} + \frac{d^4}{dt^4} (GF)(t) \bigg|_{t=\tau_2} \right), \quad 0 < \tau_1, \tau_2 < x_j .
\end{aligned}
$$

Falls $|F(x,y)| \leq \frac{1-\delta}{b-a}$ bleibt, so ist

$$
||hF_j S_j||_\infty = \frac{b-a}{N} \max_i \sum_{k=0}^{j} |(F_j S_j)_{ik}| \leq 1 - \delta .
$$

Dann ist $(I + hF_j S_j)$ invertierbar mit einer oberen Schranke $1/\delta$. Die Bedingung $|F(x,y)| \leq \frac{1-\delta}{b-a}$ ist zumindest dann erfüllt, wenn sich die Eigenwerte und Normierungskonstanten nicht viel von den Werten des Nullpotentials unterscheiden. Somit ergibt sich der erste Term der asymptotischen Entwicklung für die Diagonalelemente H_{jj} durch die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
& |H_{jj} - (H + h^2 G)(x_j, x_j)| \\
\leq \quad & \frac{x_j h^4}{12\delta} \left(\frac{1}{60} \max_{t,y \leq x_j} \left| \frac{d^4}{dt^4} (H(x_j,t) F(t,y)) \right| + \max_{t,y \leq x_j} \left| \frac{d^4}{dt^4} (G(x_j,t) F(t,y)) \right| \right) .
\end{aligned}
$$

Das gesuchte Potential wird mittels zentraler Differenzen bestimmt. Mit Hilfe einer Taylorentwicklung erhält man nun die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
& \left| q_j - q(x_j) - h^2 \left(\frac{1}{6} \frac{d^3}{dx^3} H(x,x) \bigg|_{x=x_j} + \frac{d}{dx} G(x,x) \bigg|_{x=x_j} \right) \right| \\
\leq \quad & h^3 \left(\frac{1}{24} \max \left| \frac{d^4}{dx^4} H(x,x) \right| + \frac{4}{3} \max \left| \frac{d^2}{dx^2} G(x,x) \right| \right. \\
& \left. + \frac{2(b-a)}{3\delta} \left(\frac{1}{60} \max_{t,y \leq x_j} \left| \frac{d^4}{dt^4} H(x_j,t) F(t,y) \right| + \max_{t,y \leq x_j} \left| \frac{d^4}{dt^4} G(x_j,t) F(t,y) \right| \right) \right) .
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für die Gel'fand-Levitan-Methode die Konvergenzordnung $O(h^2)$.

4.3 Datenerzeugung

Zur Durchführung der beschriebenen numerischen Verfahren benötigt man einen Datensatz an Eigenwerten und einen Datensatz an Normierungskonstanten. Diese wurden

k	ϱ_k	λ_k	$\varrho_k - \sqrt{2}/2k\pi$	$\lambda_k - \pi^2 k^2$
1	2.250802015E-01	9.868760059E+00	1.122421474E-06	-8.443420929E-04
2	1.125405220E-01	3.947736218E+01	9.824419327E-07	-1.055426436E-03
3	7.502828945E-02	8.882463032E+01	1.929773459E-06	-1.809289998E-03
4	5.683415179E-02	1.579126810E+02	5.643820255E-04	-9.894635537E-04
5	4.501643391E-02	2.467415172E+02	6.180991048E-07	1.407221428E-03
6	3.751304095E-02	3.553063917E+02	-1.388859032E-07	6.332541171E-04
7	3.215397845E-02	4.836109994E+02	-1.757006765E-07	3.837904235E-04
8	2.813519093E-02	6.316553413E+02	3.060548981E-07	6.596395111E-04
9	2.500860238E-02	7.994381513E+02	-1.841794545E-07	1.948482111E-04
10	2.250775735E-02	9.869605909E+02	-1.505575190E-07	1.507751192E-04
11	2.046162228E-02	1.194222253E+03	-1.121732597E-07	1.206200277E-04
12	1.875651431E-02	1.421223133E+03	-7.560935461E-08	9.894636241E-05
13	1.731370427E-02	1.667963227E+03	-7.104078758E-08	8.277827851E-05
14	1.607702399E-02	1.934442533E+03	-5.308761784E-08	7.036146599E-05
15	1.500523211E-02	2.220661051E+03	-3.982757837E-08	6.059832458E-05

Tabelle 4.1: Eigenwerte und Normierungskonstanten von $q_1(x)$

mit der FORTRAN Routine zur Lösung von Randwertproblemen der NAG-Library (D02KEF) auf 9 Dezimalstellen genau bestimmt. Hierfür benutzt die Routine eine modifizierte Prüfertransformation und wendet dann auf das transformierte Randwertproblem ein Schießverfahren an [31], [21].

Zur Datenerzeugung wurden folgende Beispielfunktionen gewählt:

1. $q_1(x) = \sin(8\pi x)$, $x \in [0,1]$,
2. $q_2(x) = \dfrac{15}{4(1+3x)^2}$, $x \in [0,1]$, und
3. $$q_3(x) = \begin{cases} 40x, & 0 \leq x < 0,1 \\ 5 - 10x, & 0,1 \leq x < 0,5 \\ 0, & 0,5 \leq x < 0,6 \\ 30 - 50x, & 0,6 \leq x < 0,7 \\ -5, & 0,7 \leq x < 0,8 \\ 50x - 45, & 0,8 \leq x < 0,9 \\ 0 & 0,9 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Mit der erste Funktion soll die Frequenzabhängigkeit der Verfahren getestet werden. Die zweite Funktion tritt als Potential einer transformierten Besselschen Differentialgleichung auf und kommt daher in praktischen Anwendungen häufig vor. Anhand der dritten Funktion wird schließlich das Verhalten der Rekonstruktionsverfahren gegenüber nicht differenzierbaren Potentialen dokumentiert.

k	ϱ_k	λ_k	$\varrho_k - \sqrt{2}/2k\pi$	$\lambda_k - \pi^2 k^2$
1	2.324438935E-01	9.633461993E+00	7.364814426E-03	-2.361424080E-01
2	1.140186879E-01	3.938327492E+01	1.479148420E-03	-9.514268199E-02
3	7.553231703E-02	8.877677891E+01	5.059573493E-04	-4.966070177E-02
4	5.649691787E-02	1.578836073E+02	2.271481065E-04	-3.006315738E-02
5	4.513594391E-02	2.467200969E+02	1.201281026E-04	-2.001314932E-02
6	3.758404649E-02	3.552915313E+02	7.086665069E-05	-1.422710458E-02
7	3.219934226E-02	4.836000055E+02	4.518811486E-05	-1.061019397E-02
8	2.816543056E-02	6.316464756E+02	3.054568252E-05	-8.206032883E-03
9	2.503039407E-02	7.994314262E+02	2.160751449E-05	-6.530243257E-03
10	2.252375422E-02	9.869551229E+02	1.584631909E-05	-5.317172018E-03
11	2.047371256E-02	1.194217721E+03	1.197810120E-05	-4.411635782E-03
12	1.876587723E-02	1.421219316E+03	9.287305220E-06	-3.718221218E-03
13	1.732111933E-02	1.667959968E+03	7.344019293E-06	-3.175724341E-03
14	1.608300996E-02	1.934439719E+03	5.932886732E-06	-2.743460374E-03
15	1.501014967E-02	2.220658597E+03	4.877733957E-06	-2.393549205E-03

Tabelle 4.2: Eigenwerte und Normierungskonstanten von $q_2(x) - \frac{15}{16}$

k	ϱ_k	λ_k	$\varrho_k - \sqrt{2}/2k\pi$	$\lambda_k - \pi^2 k^2$
1	2.601650969E-01	9.441145910E+00	3.508601786E-02	-4.284584906E-01
2	1.154372708E-01	3.906072868E+01	2.897731261E-03	-4.176889267E-01
3	7.516116319E-02	8.900336604E+01	1.348035090E-04	1.769264264E-01
4	5.644867808E-02	1.582339281E+02	1.789083204E-04	3.202576440E-01
5	4.501670449E-02	2.468302123E+02	8.886800567E-07	9.010228716E-02
6	3.748988873E-02	3.554558209E+02	-2.329110870E-05	1.500625080E-01
7	3.215274515E-02	4.836363093E+02	-1.408998515E-06	2.569366636E-02
8	2.812237575E-02	6.316279507E+02	-1.250912695E-05	-2.673100409E-02
9	2.500404994E-02	7.994370516E+02	-4.736621213E-06	-9.048989259E-04
10	2.250777951E-02	9.869619473E+02	-1.283889426E-07	1.507198059E-03
11	2.046395938E-02	1.194221216E+03	2.224925430E-06	-9.160734223E-04
12	1.875903531E-02	1.421210530E+03	2.445386591E-06	-1.250401074E-02
13	1.731398353E-02	1.667971253E+03	2.082201303E-07	8.108947879E-03
14	1.607896213E-02	1.934469313E+03	1.885055134E-06	2.684991186E-02
15	1.500567761E-02	2.220670792E+03	4.056704347E-07	9.801517584E-03

Tabelle 4.3: Eigenwerte und Normierungskonstanten von $q_3(x)$

4.4 Allgemeine Bemerkungungen zu den Rekonstruktionen

Für $q_2(x)$ ist $m := \int_0^1 q_2(t)\,dt = 15/16$. Wenn nun N Datenpaare gegeben sind, so berechnet der angegebene Gel'fand-Levitan-Algorithmus eine Funktion $\tilde{q}_2(x)$, deren Spektrum für $n > N$ gleich dem Spektrum $\lambda_n = n^2\pi^2$ und $\varrho_n = \sqrt{2}/2n\pi$ ist. Wegen der asymptotischen Entwicklung

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lambda_n - (n\pi)^2\right) = \int_0^1 q(t)\,dt$$

bedeutet dies, daß für jede rekonstruierte Funktion $\tilde{q}_2(x)$ unabhängig von N der Mittelwert $\int_0^1 \tilde{q}_2(t)\,dt = 0$ sein wird. Mit

$$||q_2 - \tilde{q}_2||_{L^2} \geq \left| \int_0^1 q_2(t)\,dt \right| = |m|$$

erhält man eine untere Schranke für den L^2-Fehler in der Rekonstruktion.

Ist der Wert m bekannt, so kann man die gegebenen Eigenwerte um diesen Wert vermindern, und berechnet gemäß der Formel $(\lambda - m)u = -u'' + (q(x) - m)u$ ein um m verschobenes Potential $\tilde{q}(x)$. Durch eine Addition von m zu $\tilde{q}(x)$ läßt sich dann eine Näherung für $q(x)$ angeben. Diese Translation des Spektrums verringert offensichtlich die untere Schranke für den L^2-Fehler der Rekonstruktion.

Wenn m nicht bekannt ist, so liegt wegen des asymptotischen Verhaltens der Eigenwerte die Schätzung

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b q(t)\,dt \approx \lambda_N - \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 N^2$$

nahe, vorausgesetzt, daß $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$ die vorgegebenen Eigenwerte sind. Als Faustregel gilt, daß bessere Resultate bei der Rekonstruktion zu erwarten sind, je genauer die Schätzung für den Mittelwert m ist. Bei den hier gegebenen Beispielen liefert die obige Schätzung keine nennenswerten Unterschiede zu den Resultaten, die man mit den exakten Mittelwerten erhält.

Wegen

$$H(x,x) = \frac{1}{2}\int_a^x q(t)\,dt, \qquad \text{also} \quad m = \frac{2}{b-a}H(b,b),$$

ist zu erwarten, daß bei einer ungenauen Schätzung für m die gesuchte Funktion zur rechten Intervallgrenze hin immer ungenauer zu bestimmen sein wird.

4.5 Beispielrechnungen für die einzelnen Verfahren

In diesem Abschnitt werden die numerischen Ergebnisse der einzelnen Verfahren graphisch wiedergegeben. Die Auflösung der rekonstruierten Funktionen beträgt bei der Gel'fand-Levitan-Methode und bei der sukzessiven Approximation jeweils 1/100.

Bei der sukzessiven Approximation ist darüberhinaus die Anzahl der Iterationsschritte vorzugeben. Hier sind stets 5 Iterationschritte ausgeführt worden. Danach betrug der Unterschied zwischen der neuen und alten Iterationsstufe der gesuchten Funktion gemessen in der Maximumsnorm stets 10^{-8}. Weitere Iteration lieferten dann nach zwei bis drei Iterationsschritten keinen Unterschied mehr.

Bei der Lanczos-Methode hängt die Auflösung direkt von der Anzahl der eingesetzten Eigenwerte und Normierungskonstanten ab. Bei den hier gewählten Beispielen zeigt sich allerdings, daß Rekonstruktionen mit dem Lanczos-Algorithmus anhand 101 Datenpaaren aufgrund numerischer Fehler zu keinen vernünftigen Ergebnisse führt. Daher sind die Beispielrechnungen für diese Methode mit weniger Daten durchgeführt worden.

Die einzelnen Verfahren sind in der Programmiersprache ANSI-C bei doppelter Genauigkeit verfaßt und auf einer SUN SPARCclassic Workstation durchgeführt worden. Die Maschinengenauigkeit bestimmte sich zu eps $= 10^{-16}$.

4.5.1 Ergebnisse der Gel'fand-Levitan-Methode

Analyse des ersten Beispiels

Für die Funktion $q_1(x) = \sin 8\pi x$ erkennt man in Abbildung 4.1 gut den Zusammenhang zwischen der Frequenz und den Spektraldaten des Potentials. In den ersten 3 (ϱ_k, λ_k)-Paaren ist so gut wie keine Information über die zu rekonstruierende Funktion enthalten. Aus Tabelle 4.1 ist ersichtlich, daß $q_1(x)$ durch das 4. Spektraldatenpaar fast vollständig charakterisiert ist. Mit 4 Eigenwerten und Normierungskonstanten liegt der globale absolute Fehler unter 0.02, was 2% der betragsmäßig maximalen Auslenkung der gegebenen Funktion $q_1(x)$ entspricht, falls man die beiden Werte an den Intervallgrenzen vernachläßigt (Abb. 4.2). Der relativ große Fehler in den beiden Randwerten ist durch die einseitige numerische Differentiation zu erklären. Rekonstruktionen mit noch mehr Spektraldaten verschlechtern aufgrund auftretender numerischer Fehler das Ergebnis wieder. Eine Mittelung vor der Differentiation verstärkt ebenfalls den absoluten Fehler in der rekonstruierten Funktion, wie Abbildung 4.3 zeigt. Diese stellt die Rekonstruktionen aufgrund von 20 Datenpaaren bei keiner, zweifacher und vierfacher Anwendung des Mittelungsoperators dar.

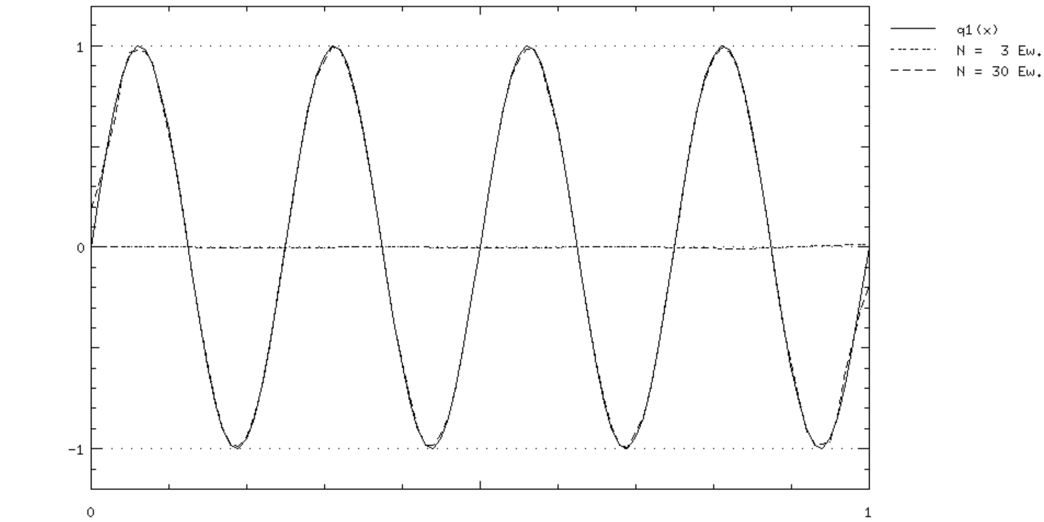

Abbildung 4.1: Rekonstruktionen von $q_1(x)$ (Gel'fand-Levitan-Methode)

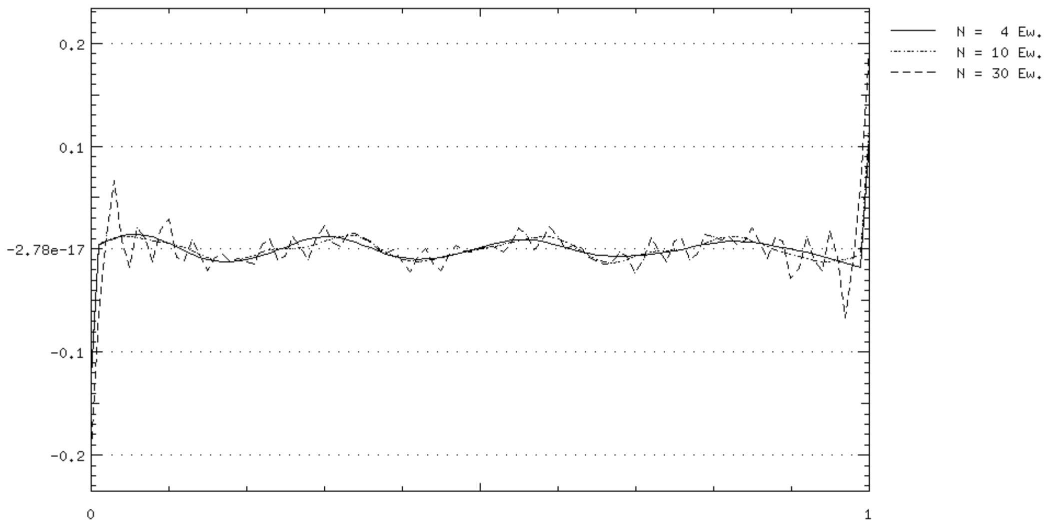

Abbildung 4.2: Differenz von $\tilde{q}_1(x)$ und $q_1(x)$ (Gel'fand-Levitan-Methode)

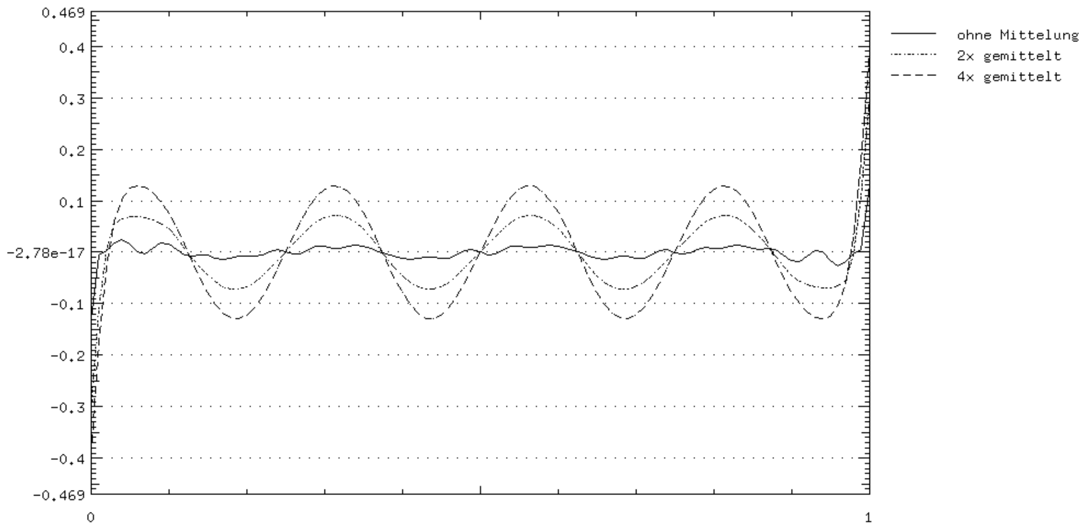

Abbildung 4.3: Differenz von $\tilde{q}_1(x)$ und $q_1(x)$ mit 20 Eigenwerten und Normierungskonstanten bei Glättung (Gel'fand-Levitan-Methode)

Analyse des zweiten Beispiels

Der Gel'fand-Levitan-Algorithmus angewendet auf das Spektrum der Funktion $q_2(x) = 15/4(1+3x)^2$ liefert die Werte für die Abbildung 4.4. In dieser Abbildung wird anhand der rekonstruierten Randwerte deutlich, daß bei der Gel'fand-Levitan-Methode stets versucht wird, um den Mittelwert der gesuchten Funktion zu rekonstruieren (Abb. 4.4). Dabei ist mit dem exakten Mittelwert $m = 15/16$ gerechnet worden. Eine Schätzung des Mittelwertes aus den Spektraldaten ergibt bei diesem Beispiel auch mit wenigen Daten keine Verschlechterung der Ergebnisse. In Abbildung 4.4 sind Rekonstruktionen mit 5, 10 und 30 Datenpaaren dargestellt. Abbildung 4.5 zeigt die absoluten Fehler bei Rekonstruktionen anhand von 20 Eigenwerten und Normierungskonstanten. Diese wurden jeweils ohne bzw. mit zweifacher und vierfacher Anwendung des Mittelungsoperators vor der numerischen Differentiation ermittelt. Die Oszillationen am Rand werden hierbei ohne Verlust der Genauigkeit durch die Glättung abgemildert. Die Abbildung 4.6 stellt den absoluten Fehler von $\tilde{q}_2(x)$ bei verschiedenen Mittelwerten da, wobei jeweils mit 20 Datenpaaren gerechnet wurde. Bei einem Fehler von 6.7% ($m = 14/16$) im Mittelwert verdoppelt sich der maximale absolute Fehler zum rechten Rand hin gegenüber den anderen beiden Rekonstruktionen.

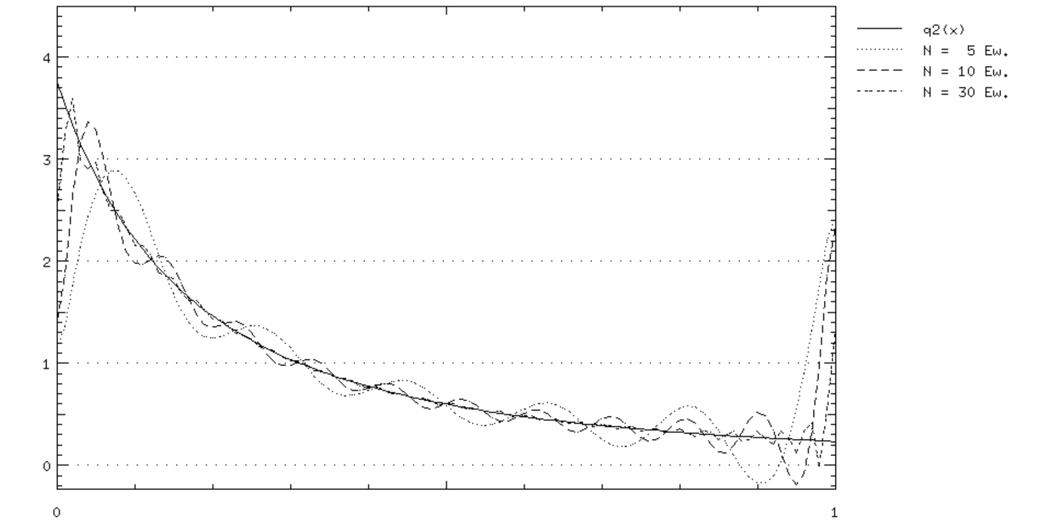

Abbildung 4.4: Rekonstruktionen von $q_2(x)$ (Gel'fand-Levitan-Methode)

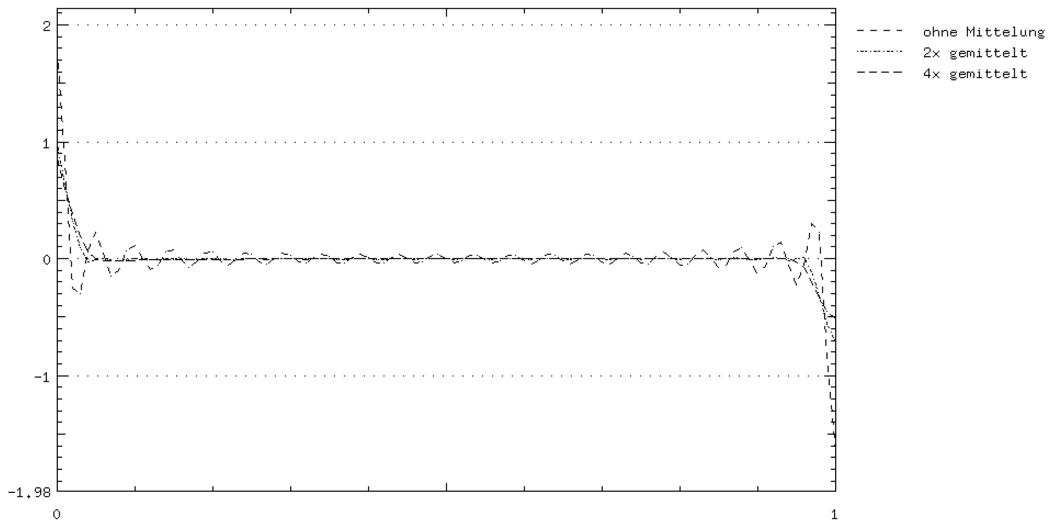

Abbildung 4.5: Differenz von $\tilde{q}_2(x)$ und $q_2(x)$ mit 20 Eigenwerten und Normierungskonstanten bei Glättung (Gef'fand-Levitan-Methode)

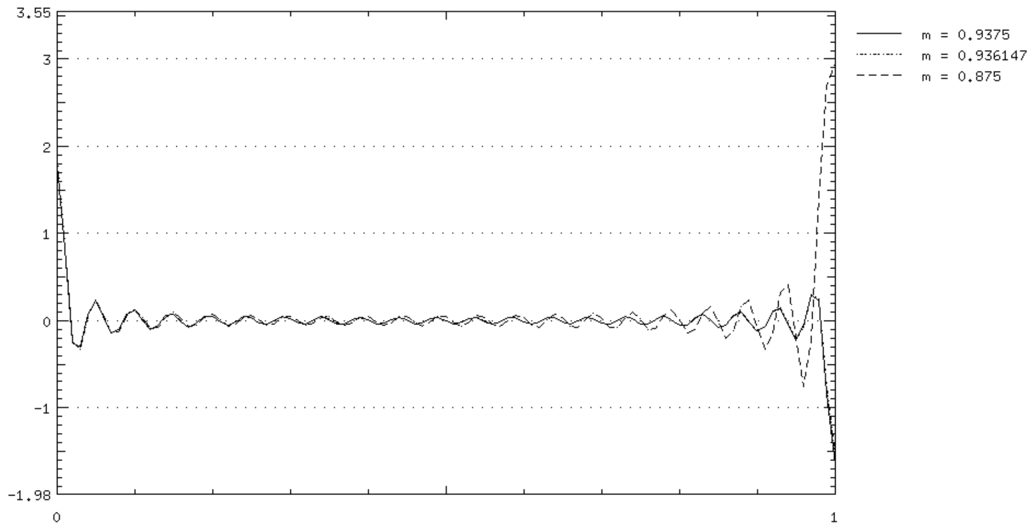

Abbildung 4.6: Differenz von $\tilde{q}_2(x)$ und $q_2(x)$ mit 20 Eigenwerten und Normierungskonstanten bei exaktem, geschätztem und fehlerhaftem Mittelwert m (Gel'fand-Levitan-Methode)

Analyse des dritten Beispiels

An der Funktion $q_3(x)$ läßt sich das Verhalten des Algorithmus bei nicht differenzierbaren Potentialen verdeutlichen. Die Abbildung 4.7 zeigt Rekonstruktionen mit 5, 10 und 30 Eigenwerten und Normierungskonstanten. Der absolute Fehler der Rekonstruktionen ist in Abbildung 4.8 zu sehen. Der globale absolute Fehler mit 10 Datenpaaren liegt etwa bei 0.3. Dies entspricht ungefähr 6% des betragsmäßigen Maximums der gesuchten Funktion. Die Knickstellen von $q_3(x)$ sind dabei deutlich als Peaks auszumachen. Dieses Verhalten wird durch mehrfache Anwendung des Mittelungsoperators vor der Differentiation noch verstärkt (Abb. 4.9). In Abbildung 4.10 sind Rekonstruktionen mit jeweils 20 Datenpaaren bei unterschiedlichen Mittelwerten dargestellt. Dabei kommt deutlich zum Ausdruck, daß die Rekonstruktion am rechten Rand um so ungenauer wird, je größer der Fehler im Mittelwert ist.

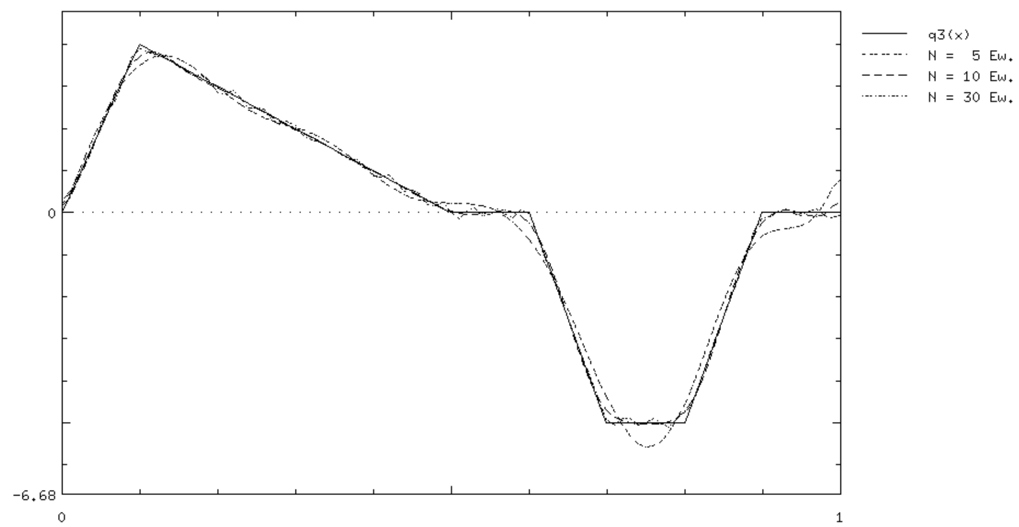

Abbildung 4.7: Rekonstruktionen von $q_3(x)$ (Gel'fand-Levitan-Methode)

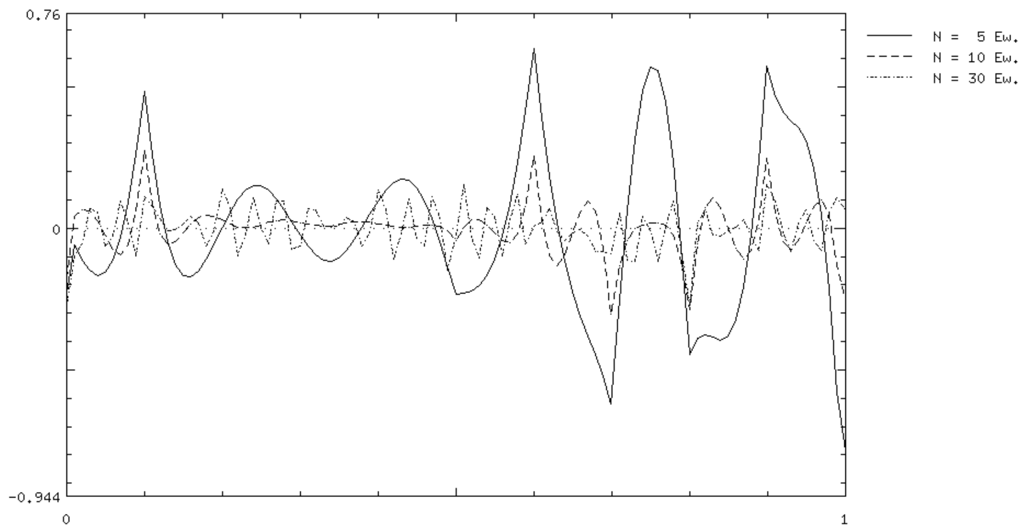

Abbildung 4.8: Differenz von $\tilde{q}_3(x)$ und $q_3(x)$ (Gel'fand-Levitan-Methode)

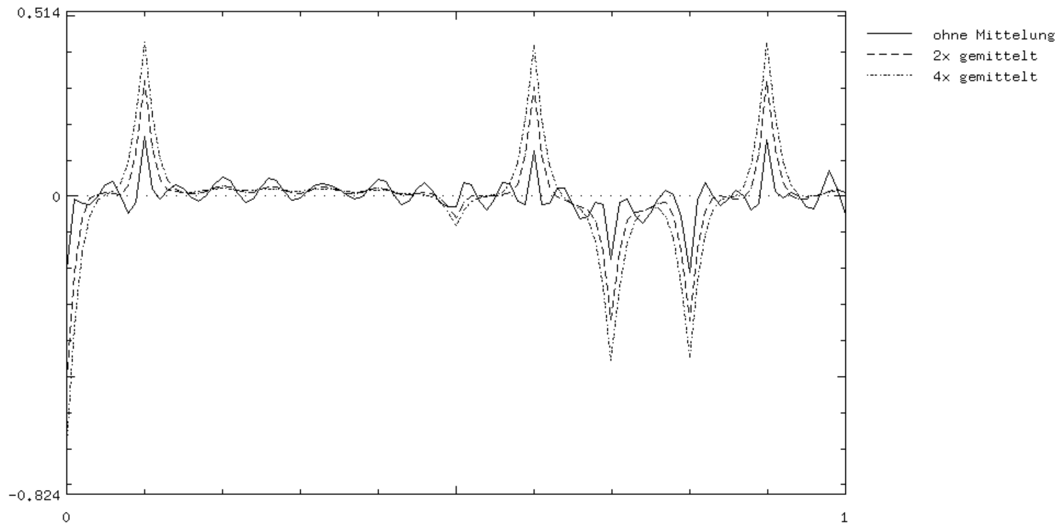

Abbildung 4.9: Differenz von $\tilde{q}_3(x)$ und $q_3(x)$ mit 20 Eigenwerten und Normierungskonstanten bei Glättung (Gel'fand-Levitan-Methode)

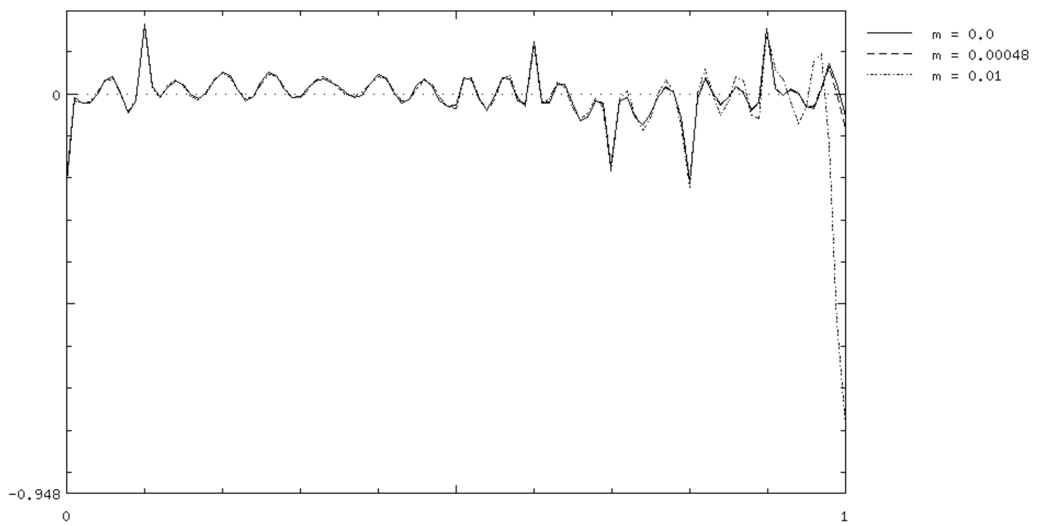

Abbildung 4.10: Differenz von $\tilde{q}_3(x)$ und $q_3(x)$ mit 20 Eigenwerten und Normierungskonstanten bei exaktem, geschätztem und fehlerhaftem Mittelwert m (Gel'fand-Levitan-Methode)

4.5.2 Ergebnisse der sukzessiven Approximation

Analyse des ersten Beispiels

Die Rekonstruktion der Funktion $q_1(x) = \sin 8\pi x$ mittels sukzessiver Approximation zeigt ein ähnliches Verhalten wie die der Gel'fand-Levitan-Methode. Die ersten drei Spektraldatenpaare liefern keine Information für die Rekonstruktion (Abb. 4.11). Abbildung 4.12 gibt den absoluten Fehler für Rekonstruktionen mit 4, 10 und 30 Eigenwerten und Normierungskonstanten wieder. Bei einer Rekonstruktion mit den ersten vier Datenpaaren ergibt sich ein globaler absoluter Fehler von 0.01, falls die Randwerte der Rekonstruktion unberücksichtigt bleiben. Dies entspricht 1% des betragsmäßigen Maximums von $q_1(x)$.

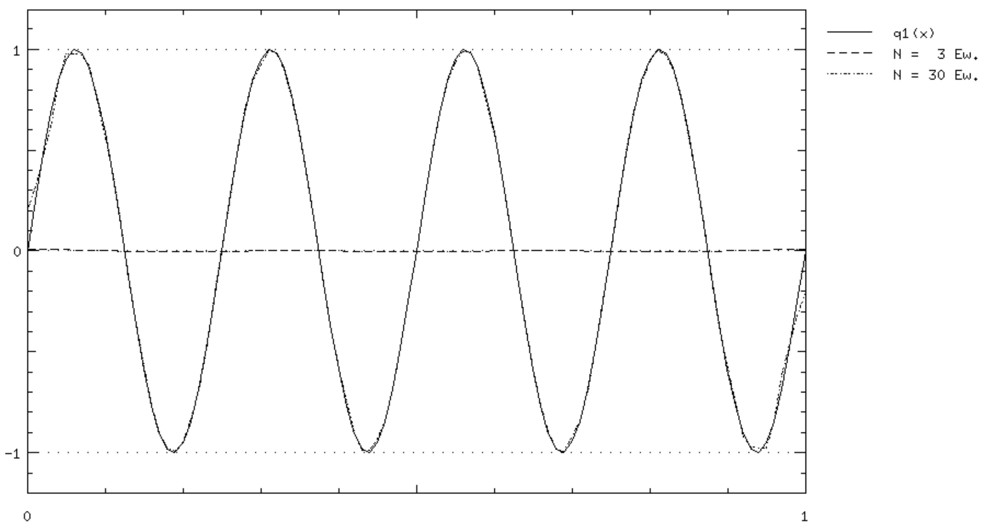

Abbildung 4.11: Rekonstruktionen von $q_1(x)$ (sukzessive Approximation)

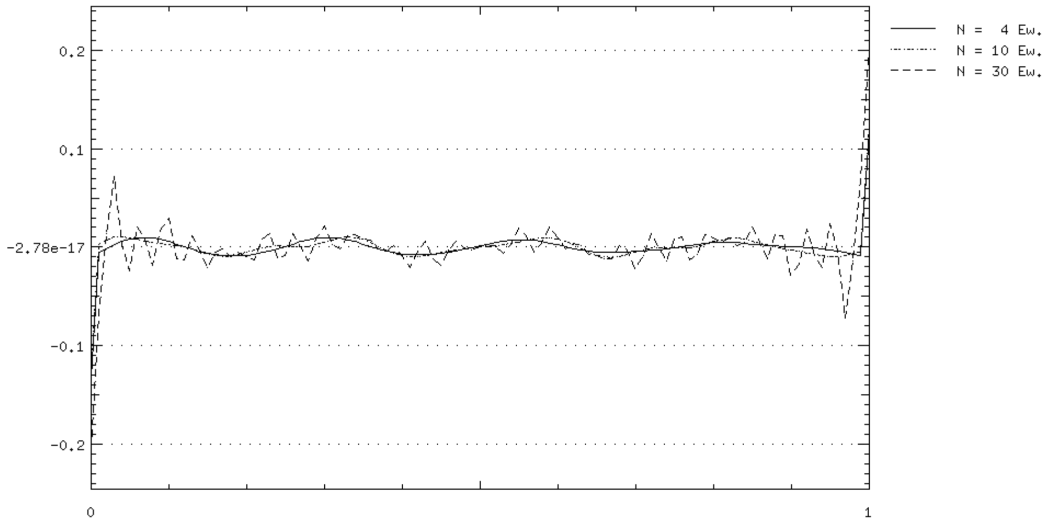

Abbildung 4.12: Differenz von $\tilde{q}_1(x)$ und $q_1(x)$ (sukzessive Approximation)

Analyse des zweiten Beispiels

In Abbildung 4.13 sind die Ergebnisse der sukzessiven Approximation für die Funktion $q_2(x) = 15/4(1+3x)^2$ dargestellt. Dazu sind die ersten 5, 10 bzw. 30 Eigenwerte und Normierungskonstanten der Funktion $q_2(x)$ als Daten verwendet worden. Wie bei den Ergebnissen der Gel'fand-Levitan-Methode fällt auf, daß die rekonstruierten Kurven an den Intervallgrenzen zum Mittelwert der gesuchten Funktion tendieren. Den absoluten Fehler der jeweiligen Rekonstruktionen zeigt Abbildung 4.14. Er beträgt bei der Rekonstruktion mit 10 Spektraldaten etwa 1.5 oder 40% des betragsmäßigen Maximums von $q_2(x)$. Dieser Wert kommt durch die ungenaue Rekonstruktion in den Intervallgrenzen zustande. Verringert man das betrachtete Intervall um 10% auf $[0.05, 0.95]$, so erhält man für den absoluten Fehler 0.37. Dies entspricht 9.87% des Maximums der gesuchten Funktion.

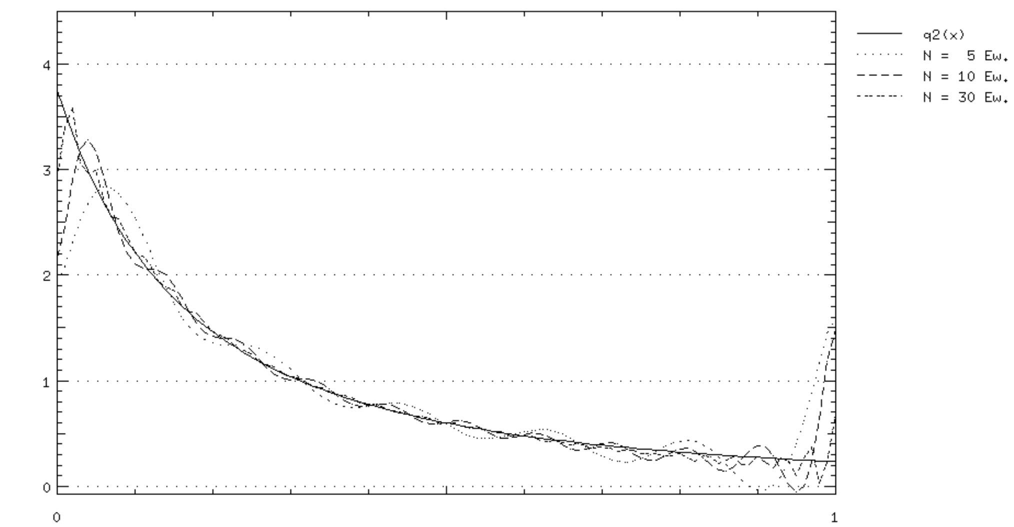

Abbildung 4.13: Rekonstruktionen von $q_2(x)$ (sukzessive Approximation)

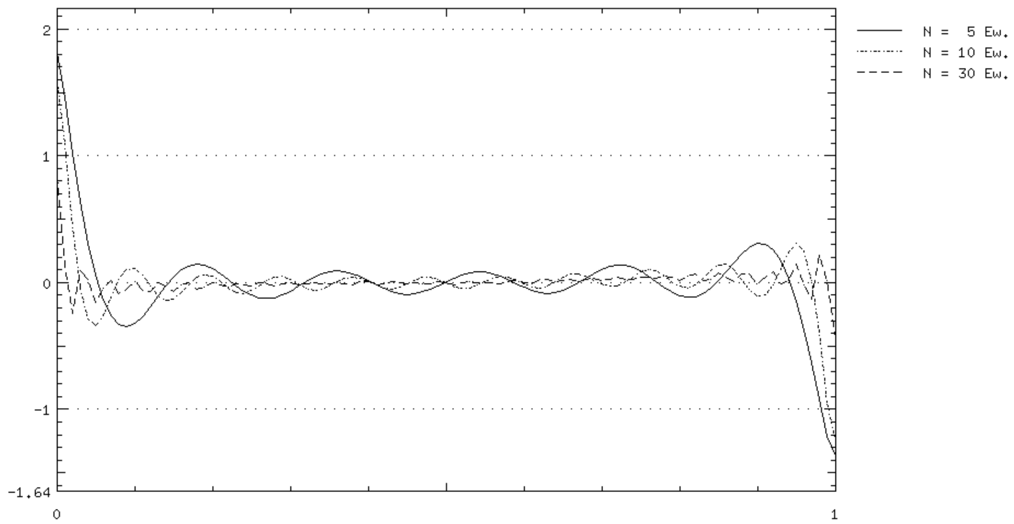

Abbildung 4.14: Differenz von $\tilde{q}_2(x)$ und $q_2(x)$ (sukzessive Approximation)

Analyse des dritten Beispiels

Die Ergebnisse der sukzessiven Approximation mit den Spektraldaten der dritten Funktion $q_3(x)$ sind in Abbildung 4.15 dargestellt. Die Rechnungen dafür sind mit den ersten 5, 10 bzw. 30 Eigenwerten und Normierungskonstanten durchgeführt worden. Insgesamt weisen die rekonstruierten Kurven ähnliche Fehler auf wie die der Gel'fand-Levitan-Methode. Dies wird in Abbildung 4.16 deutlich, in der die absoluten Fehler der Rekonstruktionen mit 5, 10 und 30 Spektraldaten dargestellt sind. Der globale absolute Fehler mit 10 Datenpaaren beträgt etwa 0.45. Dies entspricht ungefähr 9% des betragsmäßigen Maximums der gesuchten Funktion.

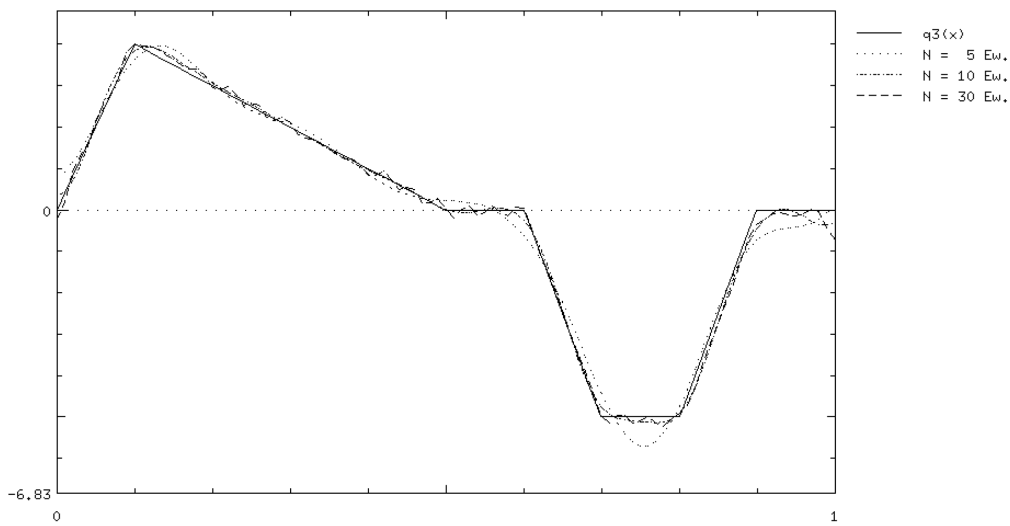

Abbildung 4.15: Rekonstruktionen von $q_3(x)$ (sukzessive Approximation)

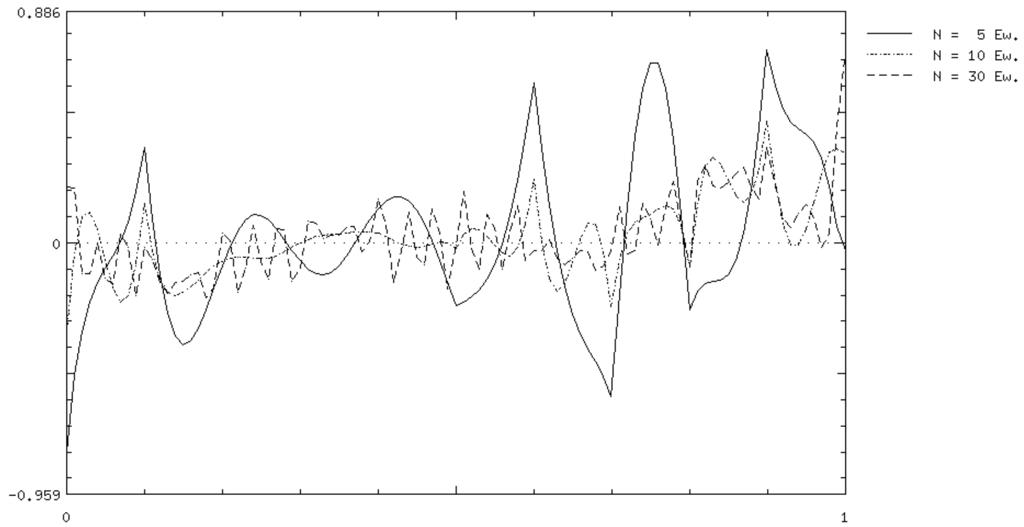

Abbildung 4.16: Differenz von $\tilde{q}_3(x)$ und $q_3(x)$ (sukzessive Approximation)

4.5.3 Ergebnisse der Lanczos-Methode

Führt man die beschriebene Methode mit den Eigenwerten und Normierungskonstanten verschiedener Koeffizientenfunktionen der Sturm-Liouville-Aufgabe durch, ist folgendes Phänomen zu beobachten.

Die rekonstruierten Werte sind nach Abzug des Mittelwertes der jeweils gesuchten Funktion um einen bestimmten Faktor zu klein. Dieser Faktor ist unabhängig vom gesuchten Potential, da er stets ungefähr $1.4142 \approx \sqrt{2}$ beträgt. Ein Fehler bei der Programmierung des Algorithmus kann insofern ausgeschlossen werden, als daß der verwendete Algorithmus mit den Eigenwerten der zugehörigen Matrixprobleme als Daten exakte Resultate liefert (Abb. 4.23 - Abb. 4.25). Diese Eigenwerte sind als Nullstellen der Determinante der Matrix, die durch das Differenzenschema entsteht, mit einem Newton-Maehly-Verfahren [30] bestimmt worden.

Es konnte bisher keine Erklärung für diesen Skalierungsfehler gefunden werden.

Die Abbildung 4.17 (Abb. 4.19 und Abb. 4.21 entsprechend) zeigt Rekonstruktionen der Beispielfunktion $q_1(x)$ (bzw. $q_2(x)$, $q_3(x)$) mit 30 Eigenwerten und Normierungskonstanten mit und ohne Nachkorrektur. Der absolute Fehler der jeweiligen Rekonstruktionen dargestellt in der Abbildung 4.18 (Abb. 4.20, Abb. 4.22) verdeutlicht noch einmal den oben beschriebenen Skalierungsfehler, da sich der jeweils ohne Nachkorrektur erzeugte absolute Fehler annähernd wie die gesuchte Funktion verhält.

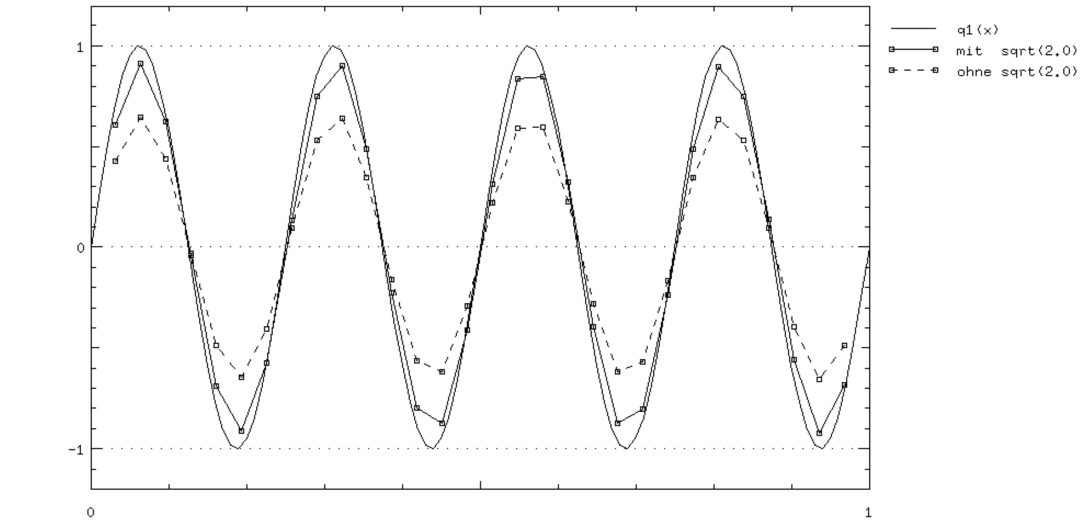

Abbildung 4.17: Rekonstruktionen von $q_1(x)$ mit 30 Eigenwerten und Normierungskonstanten (Lanczos-Methode)

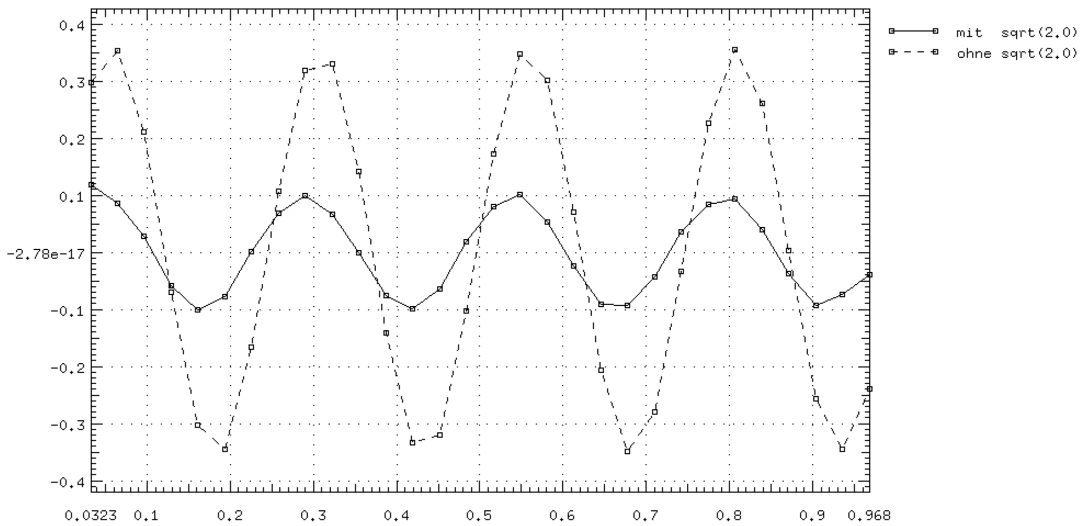

Abbildung 4.18: Differenz von $\tilde{q}_1(x)$ und $q_1(x)$ (Lanczos-Methode)

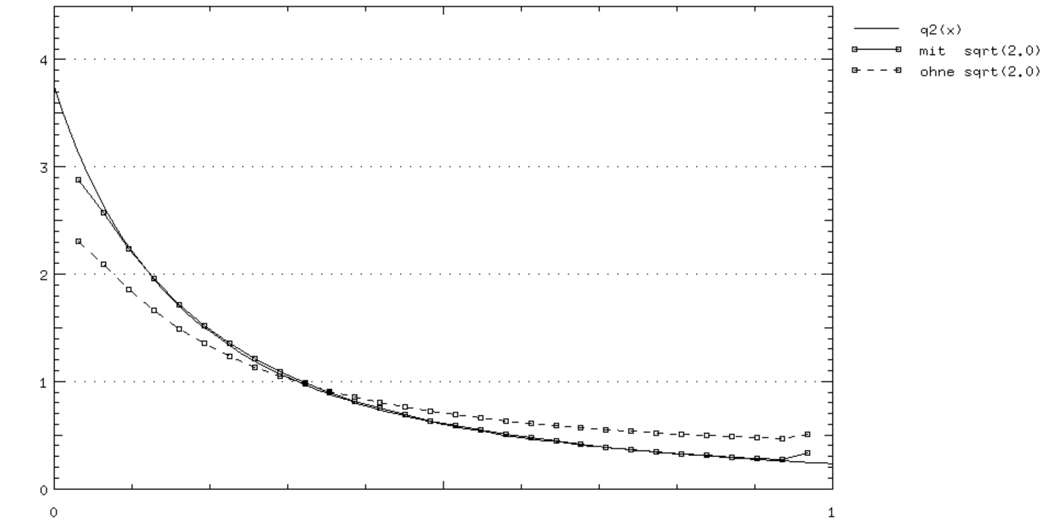

Abbildung 4.19: Rekonstruktionen von $q_2(x)$ mit 30 Eigenwerten und Normierungskonstanten (Lanczos-Methode)

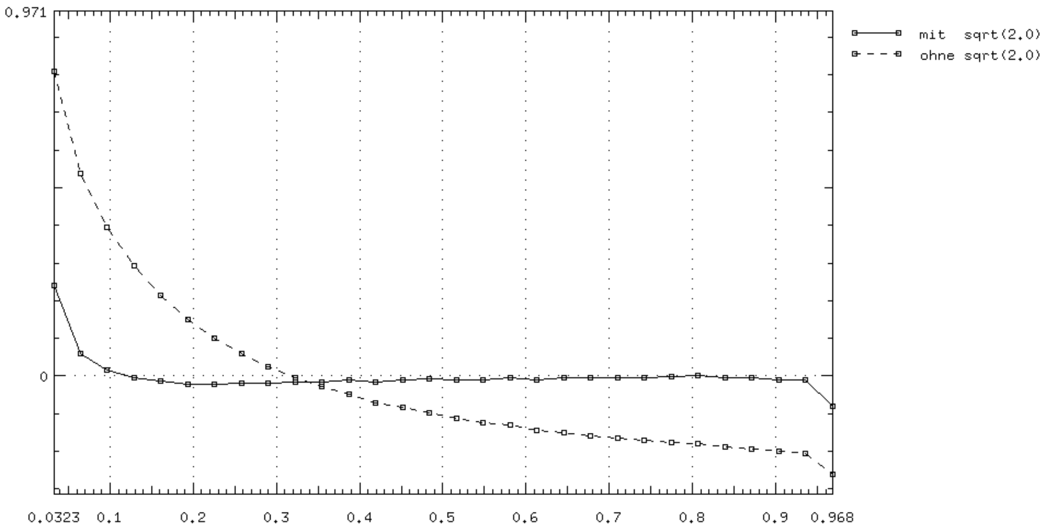

Abbildung 4.20: Differenz von $\tilde{q}_2(x)$ und $q_2(x)$ (Lanczos-Methode)

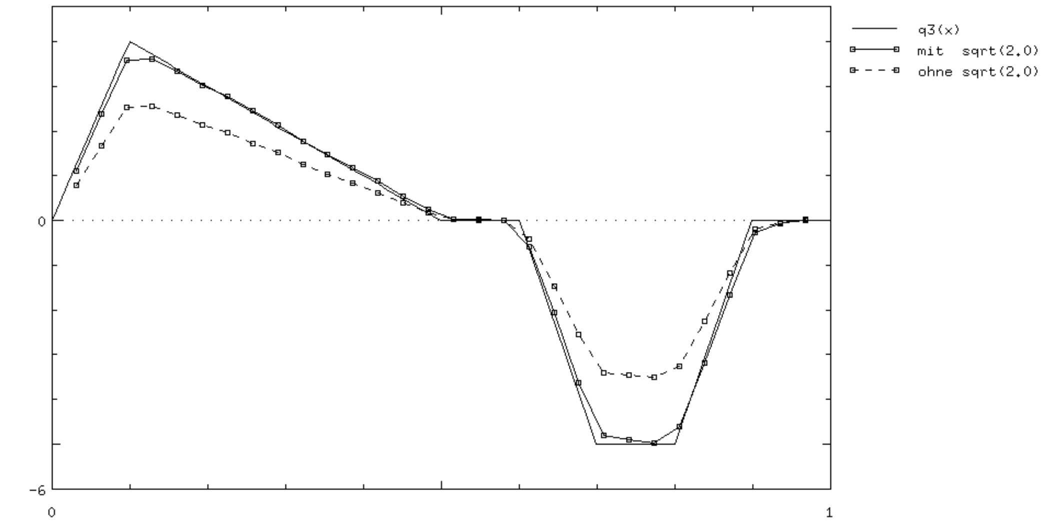

Abbildung 4.21: Rekonstruktionen von $q_3(x)$ mit 30 Eigenwerten und Normierungskonstanten (Lanczos-Methode)

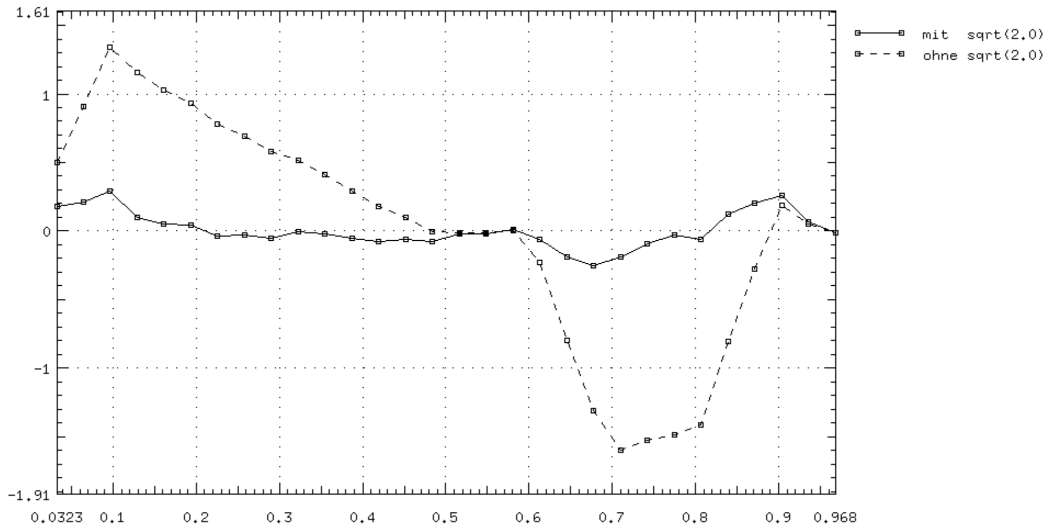

Abbildung 4.22: Differenz von $\tilde{q}_3(x)$ und $q_3(x)$ (Lanczos-Methode)

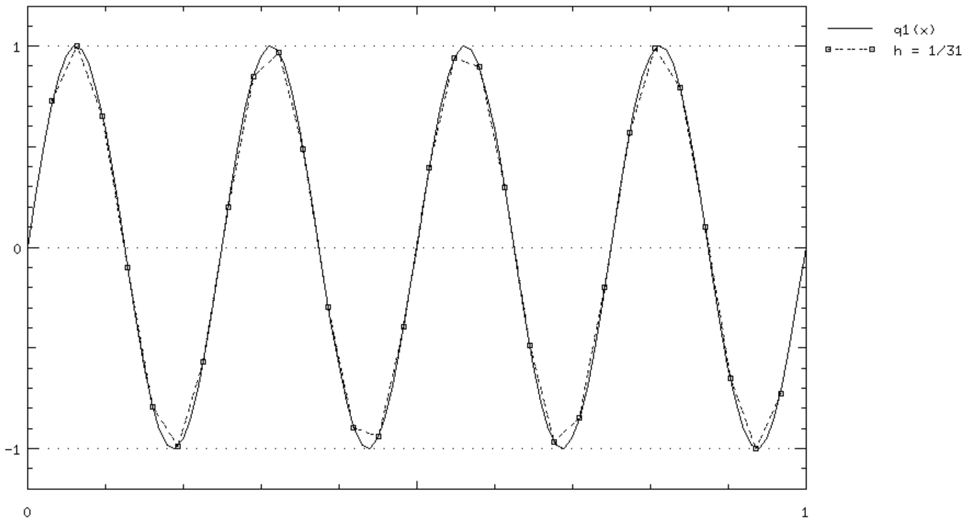

Abbildung 4.23: Rekonstruktionen von $q_1(x)$ mit Schrittweite $h = 1/31$ (30 Matrixeigenwerte und Normierungskonstanten)

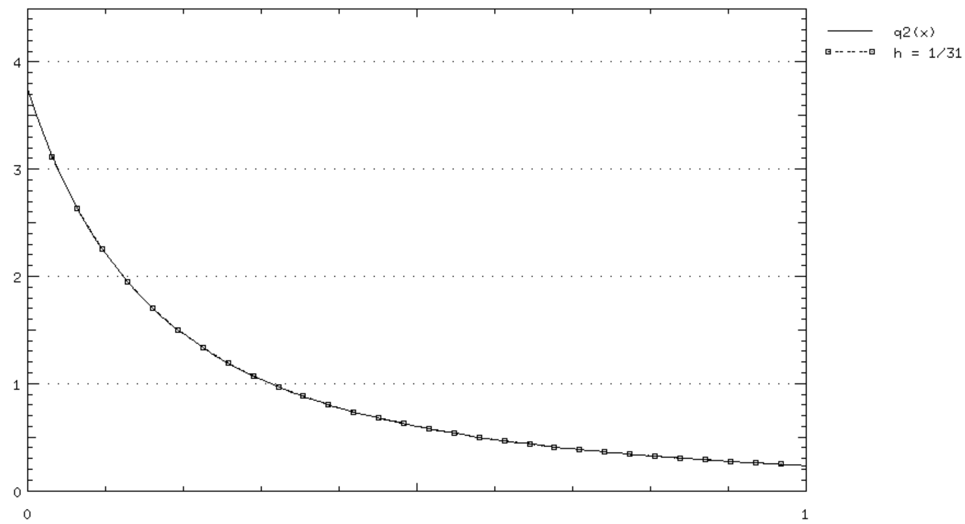

Abbildung 4.24: Rekonstruktionen von $q_2(x)$ mit Schrittweite $h = 1/31$ (30 Matrixeigenwerte und Normierungskonstanten)

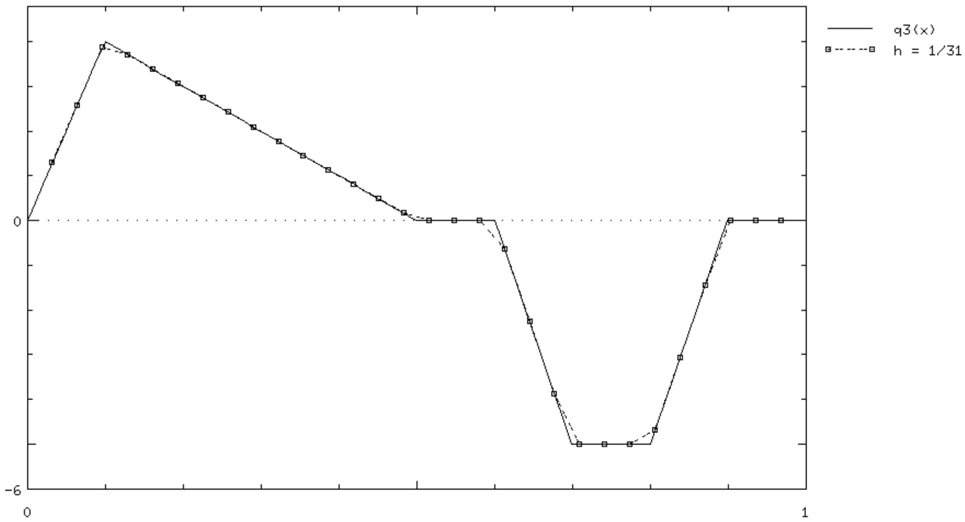

Abbildung 4.25: Rekonstruktionen von $q_3(x)$ mit Schrittweite $h = 1/31$ (30 Matrixeigenwerte und Normierungskonstanten)

4.5.4 Vergleich der numerischen Ergebnisse

Zum Vergleich der numerischen Ergebnisse der drei dargestellten Verfahren ist jedes Verfahren mit 20 Eigenwerten und Normierungskonstanten der Funktionen $q_1(x)$, $q_2(x)$ und $q_3(x)$ durchgeführt worden. Dabei ist zu beachten, daß die Auflösung der rekonstruierten Funktion bei der (modifizierten) Lanczos-Methode direkt von der Anzahl der Eigenwerte abhängt.

Die Abbildung 4.26 zeigt den absoluten Fehler der Rekonstruktion mit 20 Eigenwerten und Normierungskonstanten für die Funktion $q_1(x)$. Der Fehler bei der sukzessiven Approximation ist dabei geringfügig kleiner als der Fehler bei der Gel'fand-Levitan-Methode. Ohne die Nachkorrektur beim Lanczos-Verfahren wäre der Fehler bis zu dreimal größer als mit der Korrektur. Bei Rekonstruktionen mit 50 Datenpaare beträgt der globale absolute Fehler mit diesem Verfahren 0.1. Bei noch mehr Daten vergrößert sich der Fehler aufgrund numerischer Instabilität der Lanczos-Methode allerdings wieder. Weitere Werte der gesuchten Funktion sollten dann durch Interpolation gewonnen werden.

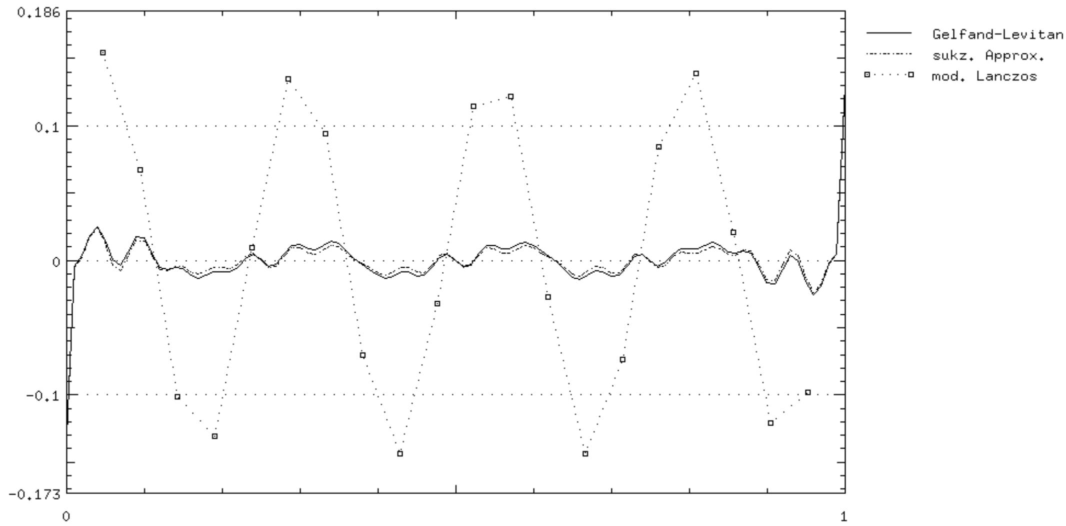

Abbildung 4.26: Differenz von $\tilde{q}_1(x)$ und $q_1(x)$ mit 20 Eigenwerten und Normierungskonstanten

In Abbildung 4.27 ist zu erkennen, daß die Beispielfunktion $q_2(x)$ durch alle drei Verfahren bis auf die Werte an den Intervallgrenzen relativ gut rekonstruiert wird. Der globale absolute Fehler bei der Gel'fand-Levitan-Methode beträgt 0.3 (8% des betragsmäßigen Maximums von $q_2(x)$), bei der sukzessiven Approximation 0.26 (6%) und bei der modifizierten Lanczos-Methode 0.17 (4%), falls man die Werte an den Intervallgrenzen außer acht läßt.

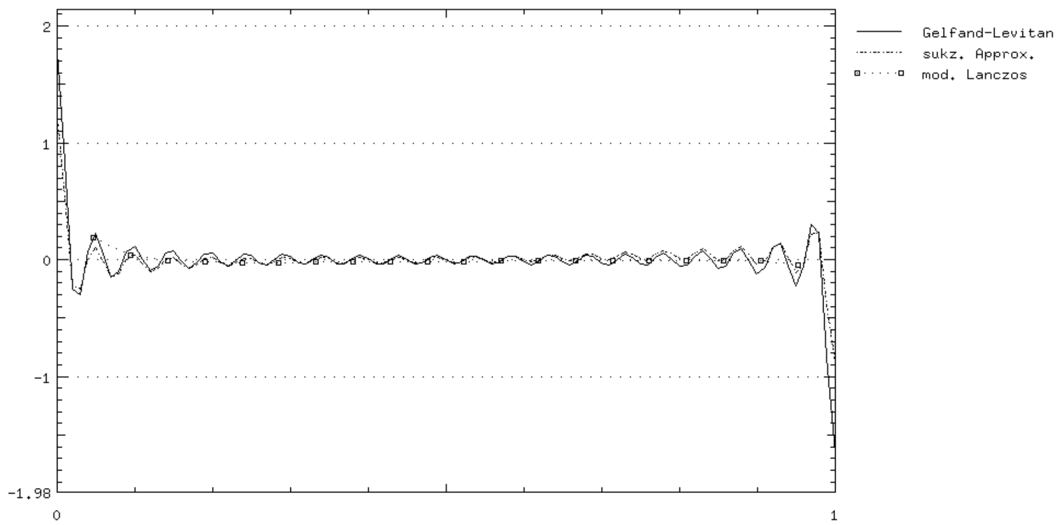

Abbildung 4.27: Differenz von $\tilde{q}_2(x)$ und $q_2(x)$ mit 20 Eigenwerten und Normierungskonstanten

Abbildung 4.28 schließlich zeigt den absoluten Fehler der einzelnen Verfahren bzgl. der Beispielfunktion $q_3(x)$. Dabei fällt auf, daß der Fehler der Gel'fand-Levitan-Methode etwas kleiner als der Fehler der sukzessiven Approximation ist. Für die Gel'fand-Levitan-Methode liegt der globale absolute Fehler bei 0.21, für die sukzessiven Approximation bei 0.37 und für die Lanczos-Methode bei 0.43. Dies entspricht jeweils 4.2%, 7.4% bzw. 8.6% des betragsmäßigen Maximums der gesuchten Funktion.

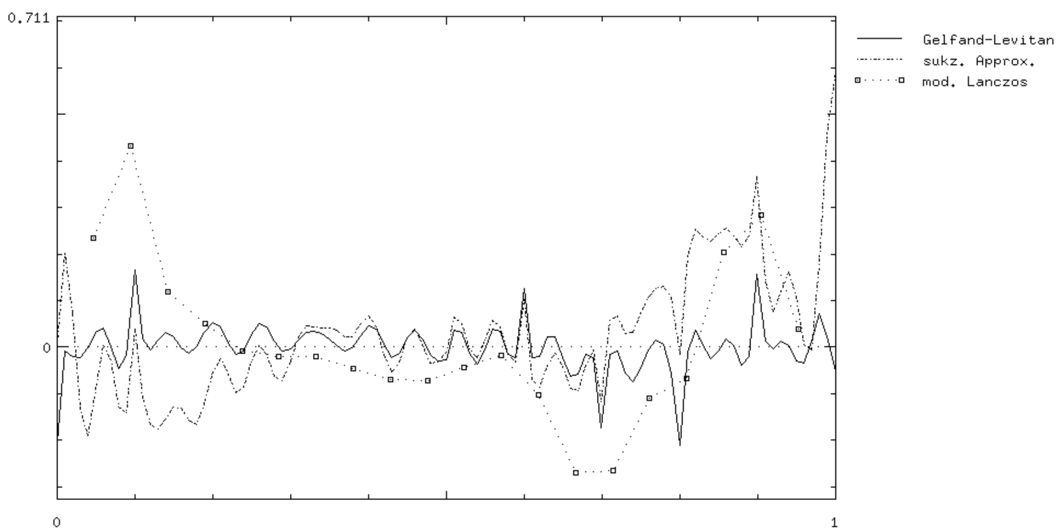

Abbildung 4.28: Differenz von $\tilde{q}_3(x)$ und $q_3(x)$ mit 20 Eigenwerten und Normierungskonstanten

Kapitel 5

Zusammenfassung

Neben den in dieser Arbeit dargestellten Verfahren zur numerischen Behandlung inverser Sturm-Liouville-Probleme sind weitere Algorithmen veröffentlicht worden. Einige davon seien hier zur Einordnung der in Kapitel 4 erzielten Resultate kurz skizziert.

G. M. L. Gladwell [8] und O. H. Hald [9] geben Algorithmen an, die auf Diskretisierungen der in [7] bewiesenen Gel'fand-Levitan-Integralgleichung basieren. In [9] werden zwei Rekonstruktionen graphisch wiedergegeben. Anhand dieser Abbildungen bestimmt sich der Fehler in den Rekonstruktionen ungefähr zu 10% des betragsmäßigen Maximums der gesuchten Funktionen.

Das von O. H. Hald in [10] dargestellte Verfahren verwendet den Rayleigh-Quotienten, dessen stationären Punkte genau die Eigenfunktionen der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe sind. Durch Entwicklung der Eigenfunktionen und der gesuchten Funktion in abgeschnittene Fourierreihen ergibt sich ein inverses Matrixeigenwertproblem für die Fourierkoeffizienten der gesuchten Funktion. Zur Lösung dieses reduzierten Problems wird ein iterativer Algorithmus angegeben. Für ein Beispiel aus [9] wird in [10] die gesuchte Funktion anhand der mit dieser Methode rekonstruierten Fourierkoeffizienten graphisch dargestellt. Daraus bestimmt sich der Rekonstruktionsfehler ebenfalls zu 10% des betragsmäßigen Maximums der gesuchten Funktion.

J. Paine schlägt vor, die gesuchte Koeffiezientfunktion durch Treppenfunktionen anzunähern. Die Eigenwerte bzgl. Treppenfunktionen können einfach bestimmt werden. Als Algorithmus ergibt sich damit ein Newton-Verfahren zur Lösung des inversen Problems. Dieser liefert durch Regularisation sehr genaue Ergebnisse wie in [25] dargestellt. Bei der Verwendung von exakten Eigenwerten wurde bei diesem Verfahren nahezu kein Fehler in der Rekonstruktion gefunden. Bei gestörten Eigenwerten wird der Rekonstruktionsfehler mit 10% angegeben.

Ein weiteres Verfahren ergibt sich durch die Charakterisierung der sogenannten isospektralen Mengen bzgl. Dirichlet-Randbedigungen. Eine isospektrale Menge ist dabei die Menge aller Koeffizientenfunktionen, die die gleichen Dirichlet-Eigenwerte besitzen. J. Pöschel und E. Trubowitz geben in ihrem Buch [26] diese Charakterisierung den daraus resultierende Algorithmus an.

P. E. Sacks gibt in [29] ein iteratives Verfahren an. Hierbei werden die Spektraldaten dazu benutzt, den regulären Teil einer Impulsantwortfunktion eines gewissen hyperbolischen Randwertproblems zu bilden. Die sich daraus ergebene nichtlineare Gleichung für die gesuchte Koeffizientenfunktion wird dann mit einen quasi-Newton-Verfahren gelöst. Der Rekonstruktionsfehler läßt sich ungefähr aus zwei angegeben Abbildungen ablesen und beträgt etwa 10% bzw. 20% des betragsmäßigen Maximums der gesuchten Funktionen.

Einen Überblick über analytische Methoden zur Lösung inverser Sturm-Liouville-Probleme gibt J. R. McLaughlin in [16]. Insbesondere werden die Ideen der Artikel von E. L. Isaacson, E. Trubowitz [14], von E. L. Isaacson, H. P. McKean, E. Trubowitz [15] und von B. M. Dahlberg, E. Trubowitz [6] kurz dargestellt.

In dieser Arbeit sind drei Verfahren näher untersucht worden: die klassische Gel'fand-Levitan-Methode [7], die sukzessive Approximation aus [27] und ein Verfahren, das auf der Lanczos-Methode beruht [22]. Die in Kapitel 4 angegebenen Beispielfunktionen sind ähnlich denen der zitierten Artikel. Dort wurden hauptsächlich Mathieu-Potentiale $q = c\cos 2x$ und unstetige Sprungfunktionen als Beispiel verwendet, allerdings zu anderen Randbedingungen. Die hier dargestellten Resultate zeigen, daß der Rekonstruktionsfehler für die beiden ersten Verfahren bei Vorgabe von maschinengenauen Daten etwa 8% des maximalen Wertes der gesuchten Funktionen beträgt.

Durch den Vergleich der Ergebnisse der Gel'fand-Levitan-Methode mit denen der sukzessiven Approximation stellt sich heraus, daß die Gel'fand-Levitan-Methode Lösungen der bei $q = 0$ linearisierten Integralgleichung der sukzessiven Approximation berechnet. Umgekehrt stellt also die sukzessive Approximation eine Erweiterung der Gel'fand-Levitan-Methode dar. Mit der sukzessiven Approximation sind genauere Ergebnisse zu erzielen, falls ein genaueres Verfahren zur Lösung der nichtlinearen hyperbolischen Gleichung eingesetzt wird [27].

Für die Lanczos-Methode deuten die numerischen Ergebnisse auf einen von der gesuchten Funktion unabhängigen Skalierungsfehler hin. Die Erklärung hierfür steht noch aus. Mit einer Nachkorrektur erhält man genauere Ergebnisse. Die numerischen Resultate in Kapitel 4 zeigen jedoch, daß dann der Fehler in der Rekonstruktion von der gesuchten Funktion abhängt. In einzelnen Fällen ist die Rekonstruktion genauer als bei der Gel'fand-Levitan-Methode.

Literaturverzeichnis

[1] Alt, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[2] Barnes, D. C.: The inverse eigenvalue problem with finite data, *SIAM J. Math. Anal.* 22 (1991), 732-753.

[3] Borg,G.: Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, *Acta Math.* 78 (1946), 1-96.

[4] Coddington, C. B. and Levinson, N.: *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[5] Courant, R. und Hilbert, D.: *Methoden der mathematischen Physik*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[6] Dahlberg, B. E. J. and Trubowitz, E.: The inverse Sturm-Liouville problem III, *Comm. Pure Appl. Math.* 37 (1984), 255-267.

[7] Gel'fand, I. M. and Levitan, B. M.: On the determination of a differential equation from its spectral function, *A.M.S. Transl. Series 2* 1 (1955), 253-304.

[8] Gladwell, G. M. L.: *Inverse Problems in Vibration*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.

[9] Hald, O. H.: Numerical solution of the Gel'fand-Levitan equation, *Lin. Alg. Appl.* 28 (1979), 99-111.

[10] Hald, O. H.: The inverse Sturm-Liouville problem and the Rayleigh-Ritz method, *Math. Comp.* 32 (1978), 687-705.

[11] Heuser, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart, 1991.

[12] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis Teil 2*, Teubner, Stuttgart, 1988.

[13] Hochstadt, H.: Asymptotic estimates for the Sturm-Liouville spectrum, *Comm. Pure Appl. Math.* 14 (1961), 749-764.

[14] Isaacson, E. L. and Trubowitz, E.: The inverse Sturm-Liouville problem I, *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (1983), 767-783.

[15] Isaacson, E. L. and McKean, H. P. and Trubowitz, E.: The inverse Sturm-Liouville problem II, *Comm. Pure Appl. Math.* 37 (1984), 1-11.

[16] McLaughlin, J. R.: Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data, *SIAM Review* 28 (1986), 53-72.

[17] McLaughlin, J. R.: Stability theorems for two inverse spectral problems, *Inverse Problems* 4 (1988), 529-540.

[18] Levinson, N.: The inverse Sturm-Liouville problem, *Mat. Tidsskr.* 3 (1949), 25-30.

[19] Levinson, N.: *Gap and density theorems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol 26, Providence, RI, 1940.

[20] Levitan, B. M.: *Inverse Sturm-Liouville Problems*, VNU Science Press, Utrecht, 1987

[21] *The NAG Fortran Library Manual*, Mark 15, Volume 3, 1991.

[22] Natterer, F.: A lanczos type algorithm for inverse Sturm-Liouville problems, *Proc. Cent. Math. Appl.* 31 (1992), 82-88.

[23] Natterer, F.: *Partielle Differentialgleichungen*, Vorlesungsskript WS 1993/94, Inst. f. Num. u. instr. Math., WWU Münster.

[24] Natterer, F.: *Numerik I + II*, Vorlesungsskripten WS 1989/90 und SS 1990, Inst. f. Num. u. instr. Math., WWU Münster.

[25] Paine, J.: Regularization applied to the recovery of piecewise constant Sturm-Liouville potentials, *Special program on inverse problems*, Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ. 17 (1988), 106-116.

[26] Pöschel, J. and Trubowitz, E.: *Inverse Spectral Theory*, Academic Press Harcourt Brace Jovanovich, Boston, 1987.

[27] Rundell, W. and Sacks, P. E.: Reconstruction techniques for classical inverse Sturm-Liouville problems, *Math. Comp.* 58 (1992), 161-183.

[28] Sabatier, P. C.: *Basic Methods of Tomography and inverse Problems*, Adam Hilger, Bristol, 1987.

[29] Sacks, P. E.: An iterative method for the inverse Dirichlet problem, *Inverse Problems* 4 (1988), 1055-1069.

[30] Stoer, J.: *Numerische Mathematik 1*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[31] Stoer, J. und Bulirsch, R.: *Einführung in die Numerische Mathematik II*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1978.

[32] Titchmarsh, E. C.: *The Theory of Functions*, Oxford University Press, Oxford, 1932.

[33] Yosida, K.: *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

Hiermit versichere ich, diese Diplomarbeit eigenständig und ohne unzulässige Hilfsmittel angefertigt zu haben.