# Numerische Verfahren zur Impedanz-Tomographie

Diplomarbeit

vorgelegt von

Stefan Biedenstein

Thema gestellt von

Prof. Dr. F. Natterer

22. April 1996

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster
Institut für Numerische Mathematik

# Numerische Verfahren zur Impedanz-Tomographie

Diplomarbeit

vorgelegt von

Stefan Biedenstein

Thema gestellt von

Prof. Dr. F. Natterer

22. April 1996

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster
Institut für Numerische Mathematik

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Das Problem

## 1.1 Inverse Probleme

Die Aufgabe in der Impedanz-Tomographie (EIT) ist es, die elektrische Leitfähigkeit im Innern eines Körpers nur durch Randmessungen, d.h. ohne selber in den Körper einzudringen, zu ermitteln.

Dieses **inverse Problem** präsentiert sich folgendermaßen: Sei $\sigma$ eine passende Funktion, und davon abhängend sei $L(\sigma)$ ein partieller Differentialoperator, der im zu behandelnden Fall ein streng elliptischer Operator zweiter Ordnung ist. Es bezeichnen $N(\sigma)$ und $D(\sigma)$ Lösungsoperatoren, die zu zwei unterschiedlichen Klassen von Randwertproblemen Lösungen $u$ der Gleichung $L(\sigma)u = 0$ ergeben. Man kann annehmen, daß diese Lösungen jeweils eindeutig sind. Zu einem Paar $(f, g)$ von Randwerten ist bei vorgegebenem $\sigma$ das Vorwärtsproblem also überbestimmt.

Beim inversen Problem versucht man ganz allgemein aus dem Verhalten der Randwerte der Lösungen $u$ von $L(\sigma)u = 0$ Rückschlüsse auf die Funktion $\sigma$ zu ziehen. Man sucht ein $\sigma$, so daß für alle möglichen Paare $(f, g)$ von Randwerten die entsprechenden Lösungen übereinstimmen, d.h.:

$$N(\sigma)f = D(\sigma)g \quad \text{für alle zulässigen Paare } (f, g).$$

Die Randwertpaare ermittelt man aus Messungen am tatsächlichen Objekt.

Eine mögliche Anwendung dieses Verfahrens findet man in der Medizin. Barber und Brown haben in [B-B] eine Liste von Leitfähigkeiten unterschiedlicher Organe zusammengestellt. Mit Hilfe solcher Strukturinformationen kann man also Rückschlüsse auf den inneren Aufbau des Körpers ziehen.

## 1.2 Physikalische Gesetzmäßigkeiten

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für die Stromdichte $J(x)$ und das elektrische Feld $E(x)$ gilt das Kirchhoffsche Gesetz:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot J &= 0, \\ \nabla \times E &= 0, \end{aligned}$$

d.h. die Divergenz von $J$ und die Rotation von $E$ sind Null. Außerdem sind $J$ und $E$ durch das Ohmsche Gesetz miteinander verknüpft:

$$J(x) = \sigma(x) E(x),$$

dabei ist $\sigma(x)$ die Leitfähigkeit im Punkt $x$. In diesem Modell und nimmt man an, daß $\sigma$ eine reellwertige Funktion mit positiver unterer Schranke ist.

Aus $\nabla \times E = 0$ folgt, daß es eine Funktion $u$ gibt mit

$$E = -\nabla u.$$

Hier ist $u$ die Spannung. So erhält man eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung für $u$

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0, \quad \text{in } \Omega. \tag{1.1}$$

Wegen $\sigma(x) > 0 \; \forall x \in \Omega$ ist diese Differentialgleichung streng elliptisch.

In diesem Modell berechnet man die Spannung $u$ in $\Omega$, indem man Randwerte auf zwei unterschiedliche Arten vorgibt:

$$u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1.2}$$

$$\text{oder} \quad \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{1.3}$$

Dabei bezeichne $\nu$ die äußere Normale an $\Omega$. Es sind $f$ die Spannung und $g$ die Stromdichte auf dem Rand des Körpers. Als Nebenbedingung hat man

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u \, dS &= 0 \\ \text{und} \quad \int_{\partial\Omega} \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS &= 0. \end{aligned}$$

## 1.3 Eindeutige Lösbarkeit der Differentialgleichung

In diesem Abschnitt möchte ich die eindeutige Lösbarkeit der Randwertprobleme (1.1) mit Randwerten (1.2) oder (1.1) mit Randwerten (1.3) zeigen. Dazu müssen vorher entsprechende Funktionenräume und schwache Formulierungen der Probleme angegeben werden.

### Vereinbarungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand. Als Funktionenraum für die Lösungen kann man folgenden linearen Teilraum von $H^1(\Omega)$ nehmen:

$$H := \{u \in H^1(\Omega), \int_{\partial\Omega} u\, dS = 0\}. \tag{1.4}$$

Da die Abbildung $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ von $H^1(\Omega)$ nach $H^{1/2}(\partial\Omega)$ stetig ist, ist $H$ abgeschlossen in $H^1(\Omega)$. Damit ist $H$ ein Hilbertraum. Sei $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ mit positiver unterer Schranke $\sigma_o$. Dann kann man auf $H$ die Bilinearform

$$a(u,v) := \int_\Omega \sigma \nabla u \cdot \nabla v\, dx \tag{1.5}$$

definieren. Da Null die einzige konstante Funktion in $H$ ist, folgt aus

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega \sigma |\nabla u|^2\, dx \\ &\geq \sigma_0 \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \quad \forall\, u \in H \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall\, u,v \in H, \end{aligned}$$

daß $a$ eine koerzive beschränkte Bilinearform auf $H$ ist.

### Das Dirichlet-Problem

Um schwache Lösungen von (1.1) mit Randwerten (1.2) zu erklären, definiere ich das lineare Funktional $D_g$ auf $H$ durch

$$D_g(v) := \int_{\partial\Omega} \sigma \frac{\partial v}{\partial \nu} g\, dS.$$

Hier ist $\nu$ wieder die äußere Normale an $\Omega$ und $dS$ das übliche Oberflächenmaß auf $\partial\Omega$. Da $\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ für $v \in H^1(\Omega)$, ist $D_g$ für alle $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ beschränkt, also stetig ($H^{-1/2}(\partial\Omega)$ ist der Dualraum von $H^{1/2}(\partial\Omega)$ bzgl. des Skalarprodukts auf $L^2(\partial\Omega)$). Man kann nun $u \in H$ als schwache Lösung von (1.1) mit Randwerten (1.2) erklären, wenn $u$ die Gleichung

$$a(u,v) = D_g(v) \quad \forall\, v \in H \tag{1.6}$$

erfüllt. Aus dem Gauß'schen Integralsatz folgt, daß jede klassische Lösung auch schwache Lösung ist.

### Das von-Neumann-Problem

Analog zum Dirichlet-Problem erklärt man schwache Lösungen $u \in H$ von (1.1) mit Randwerten (1.3) als Lösungen von

$$a(u,v) = N_f(v) \quad \forall\, v \in H \tag{1.7}$$

mit

$$N_f(v) := \int_{\partial\Omega} f v \, dS$$

für $f \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

### Eindeutige Lösbarkeit

Nun folgt aus dem Satz von *Lax Milgram*, daß die Probleme (1.6) und (1.7) in $H$ eindeutig lösbar sind.

## 1.4 Elektrische-Impedanz-Tomographie

In der Mathematik hat das Problem zunächst folgende Gestalt: Es sei die Abbildung, die einer vorgegebenen Randableitung $f$ die zugehörigen Randwerte $g$ zuordnet, bekannt. Diese Abbildung will ich an dieser Stelle mit $\Lambda_\sigma$ bezeichnen. Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit des Vorwärtsproblems kann man natürlich auch die Umkehrabbildung betrachten.

Die gesuchte Leitfähigkeit $\sigma$ kann man nun aus der vollständigen Kenntnis von $\Lambda_\sigma$ auf gewissen Funktionenräumen (z.B. $H^{s\pm 1}(\partial\Omega)$ für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) eindeutig bestimmen.

In der Praxis kennt man diese Abbildung aber nur auf endlich-dimensionalen linearen Teilräumen, weil man natürlich nur endlich viele Messungen durchführen kann.

Das inverse Problem stellt sich also folgendermaßen:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand, und seien $\{f_i\}_{i=1}^N \subset H^{-1/2}(\partial\Omega)$ und $\{g_i\}_{i=1}^N \subset H^{1/2}(\partial\Omega)$ Folgen von Randdaten. Sei $\{u_i\}_{i=1}^N$ eine Folge von Lösungen des von-Neumann-Problems

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma \nabla u_i &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \sigma \frac{\partial u_i}{\partial \nu} &= f_i \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.8}$$

und $\{v_i\}_{i=1}^N$ eine Folge von Lösungen des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma \nabla v_i &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ v_i|_{\partial\Omega} &= g_i \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dabei bezeichnet $\nu$ die äußere Normale an $\Omega$. Man sucht nun ein $\sigma$, so daß diese Lösungen $u_i$ und $v_i$ übereinstimmen für $i = 1, \ldots, N$. Aus der eindeutigen Lösbarkeit der Randwertaufgaben folgt, daß Übereinstimmung auf dem Rand von $\Omega$ ausreicht.

Beim Vorwärtsproblem bewirken große Änderungen bei $\sigma$ nur sehr geringe Änderungen in den Randdaten. Deshalb ist das inverse Problem schlecht gestellt im Sinne von Hadamard, da das Ergebnis nicht stetig von den Anfangsdaten abhängt.

In der Regel sind die $\{f_i\}_{i=1}^N$ vorgegeben und die $\{g_i\}_{i=1}^N$ Meßwerte. Im idealen Modell, d.h., falls die $g_i$ nicht mit Meßfehlern behaftet sind, ist die Existenz einer Lösung des inversen Problems klar. Hier bleibt nur zu prüfen, ob diese Lösung auch eindeutig ist, was sich als ein Ergebnis der *Nachman-Sylvester-Uhlman*-Methode ergeben wird.

# Kapitel 2

# Ein analytisches Verfahren

In diesem Abschnitt wird ein analytisches Verfahren zur Bestimmung von $\sigma$ vorgestellt. Dieses Verfahren kann man *Inverse Scattering* oder *Nachman-Sylvester-Uhlman*-Methode nennen. Leider ist eine Voraussetzung, daß die Dimension des Raumes mindestens drei ist. Aber diese konstruktive Methode beinhaltet gleichzeitig einen Eindeutigkeitsbeweis in gewissen Funktionenräumen.

## 2.1 Inverse Scattering

### 2.1.1 Vereinbarungen

**Definition 2.1.1** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. $C^{1,1}(\Omega)$ ist der Raum aller stetig differenzierbaren Funktionen $f$, deren erste Ableitungen gleichmäßig Lipschitz-stetig sind, d.h.:*

$$\exists K > 0 \ \textit{derart, daß} \left|\frac{\partial f}{\partial v}(x) - \frac{\partial f}{\partial v}(y)\right| \leq K|x-y|, \quad \forall x, y \in \Omega$$

*für eine beliebige Richtung $v \in \mathbb{R}^n$.*

*Es gilt: $f \in C^{1,1}(\overline{\Omega}) :\Leftrightarrow$ es existiert ein beschränktes Gebiet $U$ mit $\overline{\Omega} \subset U \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^{1,1}(U)$.*

In diesem Abschnitt gilt:

- $n \geq 3$, und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist ein beschränktes Gebiet.
- Der Rand von $\Omega$ ist $C^{1,1}$.

- Die Leitfähigkeit $\sigma$ ist eine reellwertige Funktion aus $C^{1,1}(\overline{\Omega})$ mit positiver unterer Schranke.
- Die Funktion $q$ bezeichnet eine Funktion in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger (in der Regel im Abschluß von $\Omega$).
- $\nu$ bezeichnet die äußere Normale an $\Omega$ (ebenso $\nu_+$ und $\nu_-$)

**Definition 2.1.2** *$L^2_\delta(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum aller Funktionen, für die $(1+|x|^2)^{\delta/2} f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt:*

$$L^2_\delta(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_\delta =: \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^\delta |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Ähnlich wie in Abschnitt 1.4 definiert man für das Vorwärtsproblem und für die Helmholtz-Gleichung die **Dirichlet-zu-Neumann-Abbildungen**.

**Definition 2.1.3** *Seien $f$ und $g$ in $H^{1/2}(\partial\Omega)$, $\sigma$ und $q$ wie oben und $u$ und $w$ Lösungen folgender Gleichungen:*

$$\begin{aligned} -\Delta w + qw &= 0, \quad \text{in } \Omega, \\ w|_{\partial\Omega} &= f, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma \nabla u &= 0, \quad \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= g. \end{aligned} \tag{2.2}$$

*Definiere nun dazu die linearen Abbildungen $\Lambda_q$ und $\Lambda_\sigma$ von $H^{1/2}(\partial\Omega)$ nach $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ durch*

$$\Lambda_q f = \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}, \tag{2.3}$$

$$\Lambda_\sigma g = \sigma \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}. \tag{2.4}$$

### 2.1.2 Umformulierung des Problems

Zunächst transformiert man das Problem in ein inverses Problem für die Helmholtz-Gleichung. Auf dieses wendet man dann ein Verfahren aus der Akustik an: die *inverse Scattering*-Methode. Bei diesem Verfahren ersetzt man das Problem auf dem Rand von $\Omega$ durch ein Problem im Unendlichen.

**Satz 2.1.4** *Es gelte* $u = \sigma^{-1/2} w$ *und* $q = \sigma^{-1/2}\Delta\sigma^{1/2}$. *Dann sind die partiellen Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma \nabla u &= 0 \\ \textit{und} \qquad -\Delta w + qw &= 0 \end{aligned}$$

*äquivalent.*

**Bemerkung 2.1.5** *Da* $\sigma \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ *ist, folgt, daß* $q \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit Träger im Abschluß von* $\Omega$ *ist.*

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \Delta w &= \Delta\left(\sigma^{1/2} u\right) \\ &= \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\sigma^{1/2} u\right) \\ &= \sum \left[\frac{\partial^2(\sigma^{1/2})}{\partial x_i^2} u + 2\frac{\partial(\sigma^{1/2})}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma^{1/2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right] \\ &= \sum \left[\frac{\partial^2(\sigma^{1/2})}{\partial x_i^2} u + 2\frac{1}{2}\sigma^{-1/2}\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma^{1/2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right] \\ &= \left(\sigma^{-1/2}\Delta(\sigma^{1/2})\right)\sigma^{1/2} u + \sigma^{-1/2}\left(\nabla \cdot \sigma \nabla u\right) \\ &= qw + \sigma^{-1/2}(\nabla \cdot \sigma \nabla u). \end{aligned}$$

□

Um auch die Dirichlet-zu-Neumann-Abbildungen zu transformieren, benötigt man die Randwerte von $\sigma$. Deshalb zunächst ein Lemma. Der etwas umfangreichere Beweis wird in Abschnitt 2.5 nachgeliefert.

**Lemma 2.1.6** *Die Randwerte* $\sigma|_{\partial\Omega}$ *und* $\left.\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}$ *lassen sich aus* $\Lambda_\sigma$ *berechnen.*

**Satz 2.1.7** *Mit den Bezeichnungen aus Definition 2.1.3 und den Bedingungen aus Satz 2.1.4 gilt:*

$$\Lambda_q f = \sigma^{-1/2}|_{\partial\Omega}\Lambda_\sigma \sigma^{-1/2}|_{\partial\Omega} f + \frac{1}{2}\sigma^{-1}|_{\partial\Omega}\left.\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} f. \tag{2.5}$$

**Beweis:** Es gilt $w = \sigma^{1/2}u$ und deshalb $g = \sigma^{-1/2}|_{\partial\Omega}f$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial(\sigma^{1/2}u)}{\partial v} \\
&= \sigma^{1/2}\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{1}{2}\sigma^{-1/2}\frac{\partial \sigma}{\partial v}u \\
&= \sigma^{-1/2}\left(\sigma\frac{\partial u}{\partial v}\right) + \frac{1}{2}\sigma^{-1}\frac{\partial \sigma}{\partial v}w
\end{aligned}$$

für eine beliebige Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Es folgt mit Lemma 2.1.6:

$$\begin{aligned}
\Lambda_q f &= \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} \\
&= \sigma^{-1/2}|_{\partial\Omega}\Lambda_\sigma g + \frac{1}{2}\sigma^{-1}|_{\partial\Omega}\left.\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} f \\
&= \sigma^{-1/2}|_{\partial\Omega}\Lambda_\sigma(\sigma^{-1/2}|_{\partial\Omega}f) + \frac{1}{2}\sigma^{-1}|_{\partial\Omega}\left.\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} f.
\end{aligned}$$

□

Eine wichtige Rolle in dieser Methode spielt die **Scattering-Amplitude**:

**Definition 2.1.8** *Sei $q \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger und $\psi(x,\zeta)$ eine Lösung von*

$$-\Delta\psi + q\psi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{2.6}$$

*die sich asymptotisch wie $e^{ix\cdot\zeta}$, $\zeta\cdot\zeta = 0$, verhält. Definiere nun die (modifizierte) Scattering-Amplitude $t(\xi,\zeta)$ durch*

$$t(\xi,\zeta) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)}q(x)\psi(x,\zeta)\,dx. \tag{2.7}$$

In Abschnitt 2.4 wird gezeigt, wie man $t(\xi,\zeta)$ aus $\Lambda_q$ berechnen kann. Schließlich kann man aus $t(\xi,\zeta)$ nun $q$ berechnen.

**Satz 2.1.9** *Seien $q \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger und $\delta = \frac{1}{2}$. Dann gilt für die Fouriertransformation $\hat{q}$ von $q$ für $|\zeta| \geq a$*

$$|t(\xi,\zeta) - \hat{q}(\xi)| \leq \frac{\tilde{c}(\delta,a)}{|\zeta|}\|q\|_\delta^2. \tag{2.8}$$

Der Beweis wird in Abschnitt 2.3 nachgereicht.

**Bemerkung 2.1.10** *Eine alternative Methode $\hat{q}$ aus $t(\xi,\zeta)$ zu berechnen nennt Nachman in [N]:*
*$\hat{q}$ und damit auch $q$ sind gegeben durch*

$$\begin{aligned} \hat{q}(\xi) &= t(\xi,\xi_0) + \int\limits_{\substack{|\zeta|=M\\ \zeta\in V_\xi}} t(\xi,\zeta)K(\zeta,\zeta_0) \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\int\limits_{\substack{|\zeta|>M\\ \zeta\in V_\xi}} \delta(\eta^2+2\zeta\cdot\eta)t(\xi-\eta,\zeta+\eta)t(\eta,\zeta)\eta\, d\overline{\zeta}\, d\eta \wedge K(\zeta,\zeta_0) \end{aligned} \tag{2.9}$$

*mit*

$$\begin{aligned} K(\zeta,z) &= (-1)^{((n-2)(n-3)/2)+1}\frac{(n-3)!}{(2\pi i)^{n-2}}\frac{\alpha(\zeta,z)\wedge\beta(z)}{|\zeta-z|^{2(n-2)}}, \\ \alpha(\zeta,z) &= 2\sum_{1\le j<k<l\le n}(-1)^{j+k+l}\begin{vmatrix} \overline{\zeta}_j-\overline{z}_j & \overline{\zeta}_k-\overline{z}_k & \overline{\zeta}_l-\overline{z}_l \\ \zeta_j+z_j & \zeta_k+z_k & \zeta_l+z_l \\ \xi_j & \xi_k & \xi_l \end{vmatrix} \bigwedge_{m\ne j,k,l} d\overline{\zeta}_m, \\ \beta(\zeta) &= \frac{1}{4\sum\limits_{1\le j<k\le n}|\zeta_j\xi_k-\zeta_k\xi_j|^2}\sum_{1\le j<k\le n}(-1)^{j+k}(\overline{\zeta}_j\xi_k-\overline{\zeta}_k\xi_j)\bigwedge_{l\ne j,k} d\zeta_l, \\ V_\xi &= \left\{\zeta\in\mathbb{C}^n,\ \zeta^2=0,\ \xi^2+2\zeta\cdot\xi=0\right\}. \end{aligned}$$

## 2.2 Hilfsprobleme und Fundamentallösungen

Um Lösungen von $-\Delta\psi+q\psi=0$ zu konstruieren, die sich für $\zeta\in\mathbb{C}^n$, $n\ge 3$, $|\zeta|$ groß, $\zeta\cdot\zeta=0$, wie $e^{ix\cdot\zeta}$ verhalten, betrachtet man Lösungen der Form

$$\psi = e^{ix\cdot\zeta}(1+v_\zeta).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{-ix\cdot\zeta}\Delta\psi &= \zeta^2(1+v_\zeta)+2i\zeta\cdot\nabla v_\zeta+\Delta v_\zeta \\ &= (2i\zeta\cdot\nabla+\Delta)v_\zeta. \end{aligned}$$

Mittels Faltung und Fouriertransformation der Dirac'schen-Delta-Distribution $\delta$ erhält man eine Fundamentallösung zum Differentialoperator $-2i\zeta-\Delta$:

$$\begin{aligned} g(x,\zeta) &= g_\zeta(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{ix\cdot\xi}}{\xi^2+2\zeta\cdot\xi}d\xi \\ \Rightarrow\quad -\Delta g_\zeta(x) &- 2i\zeta\cdot\nabla g_\zeta(x)=\delta. \end{aligned}$$

Dieses ist möglich, da $\left(\xi^2+2\zeta\cdot\xi\right)^{-1}$ als Funktion von $\xi\in\mathbb{R}^n$ wegen $n\ge 3$ lokal integrierbar ist. So bekommt man für $v_\zeta$ die Integralgleichung

$$v_\zeta = g_\zeta * \left(e^{i\langle\cdot,\zeta\rangle}q(1+v_\zeta)\right)$$

und damit für $\psi$

$$\psi = e^{ix\cdot\zeta} - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\zeta(x-y)q(y)\psi(y)\,dy \tag{2.10}$$

mit $G_\zeta(x) = e^{ix\cdot\zeta}g_\zeta(x)$.

$$G_0(x) = \frac{|x|^{2-n}}{(n-2)\omega_n}, \quad \omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

ist die klassische Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, und daher gibt es eine harmonische Funktion $H_\zeta$ mit

$$G_\zeta = G_0 + H_\zeta, \quad \Delta H_\zeta = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n. \tag{2.11}$$

Deshalb lassen sich viele Ergebnisse, die für $G_0$ gelten, auch auf $G_\zeta$ übertragen.

Für die Familie $G_\zeta$ Green'scher Funktionen für den Laplaceoperator definiert man das **single-layer**-Potential $S_\zeta$, das **double-layer**-Potential $D_\zeta$ und das **trace-layer**-Potential $B_\zeta$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
G_\zeta(x,y) &:= G_\zeta(x-y), \\
S_\zeta f(x) &= \int\limits_{\partial\Omega} G_\zeta(x,y)f(y)\,dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega, \\
D_\zeta f(x) &= \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G_\zeta}{\partial \nu_y}(x,y)f(y)\,dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega, \\
B_\zeta f(x) &= p.v.\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G_\zeta}{\partial \nu_y}(x,y)f(y)\,dS_y, \quad x \in \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Für $\zeta = 0$ haben *Fabes, Jodeit und Rivère* in [F-J-R] eine Reihe von Eigenschaften dieser Potentiale bewiesen, die im weiteren Verlauf der Arbeit noch benötigt werden. Hier fließt auch die Einschränkung $n \geq 3$ ein, da $G_0$ für $n = 2$ eine vollkommen andere Gestalt annimmt. Da sich $G_\zeta$ von $G_0$ nur durch Addition einer harmonischen Funktion unterscheidet, behalten diese Aussagen auch noch für $\zeta \neq 0$ ihre Gültigkeit (siehe auch *Nachman* [N]).

Sei im folgenden $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ein beschränktes Gebiet mit $C^{1,1}$ Rand.

a) Für $0 \leq s \leq 1$ gilt

$$\|S_\zeta f\|_{H^{s+1}(\partial\Omega)} \leq c(\zeta, s)\|f\|_{H^s(\partial\Omega)}. \tag{2.12}$$

b) Für $0 \leq s \leq \frac{3}{2}$ ist $B_\zeta$ beschränkt auf $H^s(\Omega)$.

Sei nun $\rho_0$ so groß, daß $\overline{\Omega} \subset \{x, |x| < \rho_0\}$; für beliebige $\rho > \rho_0$ sei $\Omega'_\rho := \{x : x \notin \overline{\Omega}, |x| < \rho\}$. Für $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ besitzen $u = S_\zeta f$ und $v = D_\zeta f$ die Eigenschaften

c) $u$ erfüllt
$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \tag{2.13}$$

d) $u$ ist in $H^2(\Omega)$ und in $H^2(\Omega'_\rho)$.

e) Die Grenzwerte $u_+$ und $u_-$ von $u$ gegen $\partial\Omega$ von außerhalb bzw. innerhalb von $\Omega$ stimmen überein, und für die entsprechenden Grenzwerte der Normalenableitung $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ gilt
$$\frac{\partial u}{\partial \nu_-} - \frac{\partial u}{\partial \nu_+} = f. \tag{2.14}$$

f) Der nichttangtiale Grenzwert $v_+$ ($v_-$) von $v$ gegen $\partial\Omega$ von außerhalb (innerhalb) von $\Omega$ erfüllt
$$v_\pm(x) = \pm\frac{1}{2} f(x) + B_\zeta f(x) \text{ für fast alle } x \in \partial\Omega. \tag{2.15}$$

Für die Beweise dieser Behauptungen sei auf *Fabes, Jodeit und Rivère* [F-J-R] zusammen mit Anhang A zu *Nachman* [N] verwiesen.

*Sylvester und Uhlmann* [S-U] waren die ersten, die die gewichteten Räume $L^2_\delta$ einführten (siehe Definition 2.1.2). In diesen Räumen kann man die Lösbarkeit von Gleichung (2.10) zeigen. Dazu benötigt man u.a. folgendes Lemma, welches sogar für $n \geq 2$ gilt:

**Lemma 2.2.1** *Sei $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{1,1}$ Rand. Dann erfüllt $\forall \zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $\zeta \cdot \zeta = 0$ und $|\zeta| > a$ die Faltung mit $g_\zeta$*
$$||g_\zeta * f||_{\delta-1} \leq \frac{c(\delta, a)}{|\zeta|} ||f||_\delta, \quad 0 < \delta < 1. \tag{2.16}$$

**Beweis:** Für $f \in L^2_\delta(\mathbb{R}^2)$ definiert man den Operator $Z$ durch
$$Zf(u) = f * \frac{1}{u_1 + iu_2}. \tag{2.17}$$

Für $g \in L^2_{1-\delta}(\mathbb{R}^2)$, dem Dualraum von $L^2_{\delta-1}(\mathbb{R}^2)$, gilt
$$\langle g, Zf\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{g(u) f(v)}{(u_1 - v_1) + i(u_2 - v_2)} \, dv \, du.$$

Anwenden der Cauchy-Schwarz'schen-Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned}
|\langle g, Zf\rangle|^2 &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(1+|u|^2)^{\delta}|f|^2}{(1+|u|^2)^{(\delta-1)/2}|u-v|(1+|v|^2)^{(2-\delta)/2}}\,dv\,du \\
&\quad \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(1+|v|^2)^{1-\delta}|g|^2}{(1+|u|^2)^{(\delta+1)/2}|u-v|(1+|v|^2)^{-\delta/2}}\,du\,dv \\
&\leq M\|g\|^2_{L^2_{1-\delta}}\|f\|^2_{L^2_\delta} \quad \forall\, g \in L^2_{1-\delta}(\mathbb{R}^2) \\
\text{mit } M^2 &= \left(\sup_{u\in\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(1+|u|^2)^{(1-\delta)/2}}{|u-v|(1+|v|^2)^{(2-\delta)/2}}\,dv\right) \\
&\quad \cdot \left(\sup_{v\in\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(1+|v|^2)^{\delta/2}}{(1+|u|^2)^{(\delta+1)/2}|u-v|}\,du\right).
\end{aligned}$$

Wegen $0 < \delta < 1$ gilt

$$\begin{aligned}
&0 < \frac{1-\delta}{2} < \frac{1}{2} < \frac{2-\delta}{2} < 1 \\
\text{und}\quad &0 < \frac{\delta}{2} < \frac{1}{2} < \frac{\delta+1}{2} < 1.
\end{aligned}$$

Deshalb ist $M$ endlich.

Für $x \in \mathbb{R}^n$, $n > 2$, $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$ gilt nun wegen $\delta > 0$ und $\delta - 1 < 0$

$$\begin{aligned}
(1+|u|^2)^{\delta-1} &\geq (1+|x|^2)^{\delta-1} \\
\text{und}\quad (1+|u|^2)^{\delta} &\geq (1+|x|^2)^{\delta}.
\end{aligned}$$

Also ist $Z$ ein beschränkter Operator von $L^2_\delta(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2_{\delta-1}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$:

$$\|Zf\|_{L^2_{\delta-1}} \leq M\|f\|_{L^2_\delta}. \tag{2.18}$$

Man betrachte nun das Problem $L_\zeta w = \Delta w + 2i\zeta\cdot\nabla w = f$ mit $\zeta\cdot\zeta = 0$ und $|\zeta| > a > 0$. Es sei ohne Einschränkung $2i\zeta = s(e_1 + ie_2)$. Dann führt Fouriertransformation zu

$$\begin{aligned}
l(\eta) &= -|\eta|^2 - s\eta_2 + is\eta_1, \\
l(\eta)\hat{w} &= \hat{f}, \\
\mathcal{M} &:= \{\eta \,|\, l(\eta) = 0\}.
\end{aligned}$$

Definiere nun Überdeckungen von $\mathcal{M}$ und $\mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_2 &= \mathcal{M} \cap \{\eta \,|\, (\eta_2 - \frac{s}{2})^2 > \frac{s^2}{8n}\}, \\
\mathcal{U}_j &= \mathcal{M} \cap \{\eta \,|\, \eta_j^2 > \frac{s^2}{8n}\} \quad j = 3, \dots, n, \\
\mathcal{V}_1 &= \mathbb{R}^n \setminus N_{\varepsilon/2}(\mathcal{M}), \\
\mathcal{V}_j &= N_\varepsilon(\mathcal{U}_j), \quad j = 2, \dots, n, \quad \frac{a}{4} < \varepsilon < \frac{s}{4},
\end{aligned}$$

wobei $N_\varepsilon(A)$ die $\varepsilon$-Umgebung einer Menge $A$ bezeichne.

Sei $\rho_j$ eine Zerlegung der Eins mit Träger in $\mathcal{V}_j$ und

$$\hat{f}_j = \rho_j \hat{f}.$$

In $\mathcal{V}_1$ gilt

$$|l(\eta)| > \frac{\eta s}{2} > \frac{as}{8}.$$

Hier ist also nichts zu zeigen.

In $\mathcal{V}_j$, $j = 2, \dots, n$ führt man neue Koordinaten $\beta^1, \dots, \beta^n$ ein, so daß

$$l(\beta) = s(\beta^j + i\beta^1),$$

und man definiert

$$\hat{u}_j = \frac{\hat{f}_j}{l}.$$

*Sylvester und Uhlmann* haben in [S-U] gezeigt, daß die Behauptung auch unter den notwendigen Koordinatentransformationen $\phi_j$ erhalten bleibt. Also folgt mit Plancherel

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\delta-1} &\leq \|\phi_j^{-1}\left(Z\left(\phi_j(f_j)\right)\right)\|_{\delta-1} \\
&\leq \frac{C}{s}\|f\|_\delta. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Die Konstante $C$ hängt nur von $\delta$ und $a$ ab. Daraus ergibt sich die Behauptung für $g_\zeta * f$, da $-g_\zeta$ Fundamentallösung zu $L_\zeta$ ist. □

**Lemma 2.2.2** *Seien $\Omega$ und $\Omega'_\rho$ wie oben und $u = S_\zeta f$ $(u = D_\zeta f)$ für $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ $(f \in H^{3/2}(\partial\Omega))$. Dann gilt:*

$$\lim_{\rho \to 0} \int\limits_{|y|=\rho} \left[G_\zeta(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu_y} - u(y)\frac{\partial G_\zeta(x,y)}{\partial \nu_y}\right] dS_y = 0 \qquad (2.20)$$

*und sogar*

$$\int\limits_{|y|=\rho} \left[G_\zeta(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu_y} - u(y)\frac{\partial G_\zeta(x,y)}{\partial \nu_y}\right] dS_y = 0. \qquad (2.21)$$

**Beweis:** Man regularisiert $G_\zeta$ durch

$$G_\zeta^\varepsilon(x,y) = \frac{(|x-y|^2+\varepsilon^2)^{(2-n)/2}}{(n-2)\omega_n} + H_\zeta. \quad \text{(vgl. (2.11))}$$

Dann wendet man den Gauß'schen Integralsatz auf $G_\zeta^\varepsilon(x,y)$ und $G_\zeta^{\varepsilon'}(y,z)$ an. Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$, die Vertauschung der Integrationsreihenfolge und anschließend der Grenzübergang $\varepsilon' \to 0$ liefern dann das gewünschte Ergebnis. □

## 2.3 Beweis von Satz 2.1.9

**Korollar 2.3.1** *Sei $\delta = \frac{1}{2}$ und $|\zeta| > c(\delta,a)\|q(x)(1+x^2)^\delta\|_\infty$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $\psi(x,\zeta)$ von (2.10), und diese erfüllt*

$$\left\| e^{-ix\cdot\zeta}\psi(\cdot,\zeta) - 1 \right\|_{-\delta} \le \frac{\tilde{c}(\delta,a)}{|\zeta|}\|q\|_\delta. \tag{2.22}$$

**Beweis:** In diesem Beweis verwende ich zur besseren Verdeutlichung $e^{i\langle x,\zeta\rangle}$ anstelle von $e^{ix\cdot\zeta}$.

Der Operator $T : L^2_{-\delta} \to L^2_\delta$, $\phi \mapsto q\cdot\phi$ ist durch $\|q(x)(1+x^2)^\delta\|_\infty$ beschränkt. Also ist der Operator $K_\zeta : L^2_{-\delta} \to L^2_{-\delta}$, definiert durch

$$K_\zeta\phi = g_\zeta * (T\phi),$$

beschränkt durch $c(\delta,a)|\zeta|^{-1}\|q(x)(1+x^2)^\delta\|_\infty < 1$. Deshalb ist $(I+K_\zeta)$ invertierbar. Definiere $\psi(x,\zeta)$ durch

$$\psi(x,\zeta) = e^{i\langle x,\zeta\rangle}\left(1 - (I+K_\zeta)^{-1}(g_\zeta * q)\right).$$

Für eine beliebige Lösung $\phi$ von (2.10) gilt:

$$\begin{aligned}
& & \phi(x) &= e^{i\langle x,\zeta\rangle} - \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\zeta\rangle} g_\zeta(x-y)q(y)\phi(y)\,dy \\
\Leftrightarrow & & e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\phi(x) - 1 &= -\int_{\mathbb{R}^n} g_\zeta(x-y)q(y)e^{-i\langle y,\zeta\rangle}\phi(y)\,dy \\
& & &= -K_\zeta(e^{-i\langle\cdot,\zeta\rangle}\phi). \\
\Rightarrow & & (I+K_\zeta)(e^{-i\langle\cdot,\zeta\rangle}\phi(\cdot) - 1)(x) &= e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\phi(x) - 1 - \left(e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\phi(x) - 1\right) - K_\zeta(1)(x) \\
& & &= -(g_\zeta * q)(x).
\end{aligned}$$

Für zwei Lösungen $\psi_1$ und $\psi_2$ gilt

$$(I+K_\zeta)\left(e^{-i\langle x,\zeta\rangle}(\psi_1(x,\zeta) - \psi_2(x,\zeta))\right) = 0.$$

Da $(I + K_\zeta)$ invertierbar ist, folgt $\psi_1 = \psi_2$. Die Abschätzung (2.22) ergibt sich aus

$$e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\psi(x,\zeta) - 1 = -K_\zeta(e^{-i\langle\cdot,\zeta\rangle}\psi(\cdot,\zeta))$$

mit dem vorher Erwähnten und Lemma 2.2.1.

□

Damit kann man nun Satz 2.1.9 beweisen:
**Beweis:**

$$\begin{aligned} t(\xi,\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)} q(x)\psi(x,\zeta)\, dx \\ &= \hat{q}(\xi) + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} q(x) \left(\psi(x,\zeta)e^{-ix\cdot\zeta} - 1\right) dx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left\| q(x)\left(\psi(x,\zeta)e^{-ix\cdot\zeta} - 1\right)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \|q\|_\delta \|\psi(x,\zeta)e^{-ix\cdot\zeta} - 1\|_{-\delta} \\ &\leq \frac{\tilde{c}(\delta,a)}{|\zeta|}\|q\|_\delta^2. \end{aligned}$$

□

## 2.4 Berechnung der Scattering-Amplitude

Im Verlauf dieses Abschnitts möchte man den Gauß'schen Integralsatz auf $G_\zeta$ anwenden. Da dieses nicht geht, verwendet man zunächst wie im Beweis von Lemma 2.2.2

$$G_\zeta^\varepsilon(x,y) = \frac{(|x-y|^2 + \varepsilon^2)^{(2-n)/2}}{(n-2)\omega_n} + H_\zeta. \tag{2.23}$$

In Definition 2.1.8 betrachtet man das Problem (2.6). Es sei $\Omega' = \mathbb{R} \setminus \overline{\Omega}$. Man teilt dieses Problem in ein inneres und ein äußeres auf:

**Inneres Problem:** Für Lösungen $u$ von

$$-\Delta u + qu = 0 \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = f,$$

definiert man den Lösungsoperator

$$P_q : H^{3/2}(\partial\Omega) \to H^2(\Omega), \quad P_q f := u.$$

**Äußeres Problem:** Es sei $h \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch.

$$\Delta\psi = 0 \text{ in } \Omega'_\rho, \tag{2.24}$$
$$\psi \in H^2(\Omega'_\rho) \quad \text{für alle } \rho > \rho_0, \tag{2.25}$$
$$\psi(x,\zeta) - h(x) \quad \text{erfüllt (2.20)}, \tag{2.26}$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu_+} = \Lambda_q\psi \text{ auf } \partial\Omega. \tag{2.27}$$

Es sei $\psi$ eine Lösung von (2.6), die sich wie, in Definition 2.1.8 beschrieben, wie $e^{ix\cdot\zeta}$ verhält. Mit dem Gauß'schen Integralsatz in $\Omega$ gilt für $(\xi+\zeta)^2 = 0$ und $f_\zeta := \psi|_{\partial\Omega}$

$$\begin{aligned} t(\xi,\zeta) &= \int_\Omega e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)} q(x)\psi(x)\,dx \\ &= \int_\Omega e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)} \Delta\psi(x)\,dx \\ &= \int_{\partial\Omega} e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)} \left(\Lambda_q f_\zeta + i(\xi+\zeta)\cdot\nu f_\zeta\right) dS. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Da $\Lambda_q$ bekannt ist, benötigt man nur die Randwerte $f_\zeta$. Das Problem ist aber, wie sieht man den Randwerten an, daß die korrespondierende Lösung sich wie $e^{ix\cdot\zeta}$, $\zeta\cdot\zeta = 0$, verhält.

Es sei

$$\begin{aligned} T_\zeta &:= -S_\zeta\Lambda_q + B_\zeta + \frac{1}{2}I, \\ R_\zeta &:= -S_\zeta\Lambda_q + D_\zeta, \end{aligned}$$

und $\psi$ löse (2.24)-(2.27). Da $h$ harmonisch ist, gilt

$$h(x) = \int_{|y|=\rho} G_\zeta(x,y)\frac{\partial h(y)}{\partial\nu_y} - \frac{\partial G_\zeta(x,y)}{\partial\nu_y}h(y)\,dS_y.$$

Der Gauß'sche Integralsatz angewandt auf $\psi$ und $G_\zeta^\varepsilon$ in $\Omega'_\rho$ mit anschließendem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert mit $f = \psi|_{\partial\Omega}$

$$\begin{aligned} \psi(x) \quad &= \int_{|y|=\rho} G_\zeta(x,y)\frac{\partial(\psi(y)-h(y))}{\partial\nu_y} - \frac{\partial G_\zeta(x,y)}{\partial\nu_y}(\psi(y)-h(y))\,dS_y \\ &\quad + \int_{|y|=\rho} G_\zeta(x,y)\frac{\partial h(y)}{\partial\nu_y} - \frac{\partial G_\zeta(x,y)}{\partial\nu_y}h(y)\,dS_y + R_\zeta f \\ \to_{\rho\to 0} \quad & h(x) + R_\zeta f \end{aligned}$$

wegen (2.26). Also erfüllen die Randwerte $f$ von $\psi$ aufgrund von (2.15) für den nichttangentialen Grenzwert von $x \in \Omega'_\rho$ gegen $\partial\Omega$ die Integralgleichung

$$f = h + T_\zeta f. \tag{2.29}$$

Sei andersherum $f \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ eine Lösung von (2.29). Nun definiert man $\psi$ durch

$$\psi := h + R_\zeta f. \tag{2.30}$$

Wegen der Eigenschaft e) von $S_\zeta$, der eindeutigen Lösbarkeit der Laplacegleichung in $\Omega'_\rho$ unter den gegebenen Voraussetzungen und schließlich (2.14) für $f = 0$ ist $S_\zeta$ injektiv. Nun folgt mit den gleichen Argumenten wie oben

$$S_\zeta \left( \Lambda_q f - \frac{\partial\psi}{\partial\nu_+} \right) = 0$$

und damit

$$\Lambda_q f = \frac{\partial\psi}{\partial\nu_+}.$$

Also ist $\psi$ aufgrund der Eigenschaften von $S_\zeta$ und $D_\zeta$ eine Lösung von (2.24)-(2.27).

**Lösen des äußeren Problems ist also gleichbedeutend mit dem Lösen der Gleichung (2.29).**

Man betrachte nun die Integralgleichung

$$\psi(x) = h(x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\zeta(x,y) q(y) \psi(y)\, dy, \tag{2.31}$$

$h$ wie oben. Betrachtet man die rechte Seite von (2.31) für eine Lösung $\psi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, dann ist aufgrund der Eigenschaften von $G_\zeta$ die Lösung $\psi \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. In der Kugel $|y| < \rho$ gilt

$$\begin{aligned} &\int\limits_{|y|=\rho} G_\zeta(x,y) \frac{\partial\psi(y)}{\partial\nu_y} - \frac{\partial G_\zeta(x,y)}{\partial\nu_y} \psi(y)\, dS_y \\ &= \int\limits_{|y|<\rho} G_\zeta(x,y) q(y) \psi(y)\, dy + \psi(x) \quad \text{fast überall} \\ &\to_{\rho\to\infty} h(x). \end{aligned}$$

Da $h$ harmonisch ist, löst $\psi$ also (2.24)-(2.27).

Andersherum kann man Lösungen $\psi \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ von (2.24)-(2.27) durch

$$\tilde{\psi} = P_q(\psi|_{\partial\Omega})$$

auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzen. Aus den Eigenschaften von $\psi$ und $G_\zeta$, und da der Träger von $q$ im Abschluß von $\Omega$ enthalten ist, ist $\tilde{\psi}$ eine Lösung von (2.31). Aufgrund der Eigenschaften der Grenzwerte von $\psi(x)$ und $\dfrac{\partial\psi(x)}{\partial\nu}$ für $x$ gegen $\partial\Omega$ ist die Fortsetzung $\tilde{\psi}$ eindeutig in $H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

**Lösen des äußeren Problems ist also gleichbedeutend mit dem Lösen der Gleichung (2.31).**

Es sei die Abbildung $\gamma$ definiert durch

$$\gamma : H^2(\Omega) \to H^{3/2}(\Omega), \quad \gamma u := u|_\partial\Omega.$$

Man rechnet leicht nach, daß man $T_\zeta$ durch

$$\begin{aligned} T_\zeta f &= \left.\left(\int_\Omega G_\zeta(x-y)q(y)(P_q f)(y)\,dy\right)\right|_{\partial\Omega} \\ &= \gamma G_\zeta q \mathcal{I} P_q f \end{aligned}$$

mit der kompakten Inklusion $\mathcal{I} : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ faktorisieren kann. Deshalb ist auch $T_\zeta$ kompakt. Hier bezeichnet $q$ die Multiplikation mit $q(x)$ als Operator und

$$G_\zeta w(x) := \int_\Omega G_\zeta(x-y)w(y)\,dy.$$

Nun kann man folgenden Satz beweisen:

**Satz 2.4.1** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ein beschränktes Gebiet mit $C^{1,1}$ Rand, $q \in L^\infty$ reellwertig. Sei $0$ kein Eigenwert von $-\Delta + q$ in $\Omega$. Dann existiert ein $M > 0$ derart, daß*

$$f_\zeta = e^{ix\cdot\zeta} - \left(S_\zeta\Lambda_q - B_\zeta - \frac{1}{2}I\right) f_\zeta \tag{2.32}$$

*eine eindeutige Lösung $f_\zeta \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ $\forall\zeta \in \mathbb{C}^n$ mit $\zeta\cdot\zeta = 0$ und $|\zeta| \geq M$ existiert. Zusätzlich erfüllt diese Lösung*

$$\begin{aligned} t(\xi,\zeta) &= \int_{\partial\Omega} e^{-ix\cdot(\xi+\zeta)}\left[\Lambda_q + i(\xi+\zeta)\cdot\nu\right] f_\zeta\,dS \qquad (2.33) \\ & \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n \text{ mit } (\xi+\zeta)^2 = 0 \end{aligned}$$

**Beweis:** Man wählt mit den Bezeichnungen aus Korollar 2.3.1 $M > c(\delta,a)\|q(x)(1+x^2)\|_\infty$. Sei $g$ im Nullraum von $I - T_\zeta$. Man kann durch $\phi = R_\zeta g$ die eindeutige Lösung von (2.24)-(2.27) für $h \equiv 0$ bestimmen.

Diese kann aber zu der eindeutigen Lösung $\tilde{\phi}$ von (2.31), $h \equiv 0$, fortgesetzt werden. Dann gilt

$$e^{-ix\cdot\zeta}\tilde{\phi} = -K_\zeta\left(e^{-ix\cdot\zeta}\tilde{\phi}\right).$$

Wegen $|\zeta| \geq M$ folgt also aus Korollar 2.3.1, daß $\tilde{\phi} \equiv 0$ und damit $g \equiv 0$ ist. Also ist $I - T_\zeta$ injektiv, und da $T_\zeta$ kompakt ist, sogar invertierbar. Man kann $f_\zeta$ also durch

$$f_\zeta = \left(\frac{1}{2}I + S_\zeta\Lambda_q - B_\zeta\right)^{-1}\left(e^{ix\cdot\zeta}\right) \tag{2.34}$$

definieren. Für $\zeta \cdot \zeta = 0$ ist $e^{ix\cdot\zeta}$ in ganz $\mathbb{R}^n$ harmonisch. Deshalb ist $f_\zeta$ ein Randwert zu einer Lösung von (2.6), die sich für $|\zeta|$ groß wie $e^{ix\cdot\zeta}$ verhält. □

## 2.5 Die Randwerte von $\sigma$

**Satz 2.5.1** *Seien $\Omega$, $\Omega'$ und $\sigma$ wie vorhin. Es gilt:*

*a)*

$$\lim_{|\eta|\to\infty}\left\|2e^{-ix\cdot\eta}S_0\Lambda_\sigma e^{ix\cdot\eta} - \sigma(x)\right\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0.$$

*b)*

$$\lim_{|\eta|\to\infty}\left\|e^{-ix\cdot\eta}\left(\sigma\Lambda_1 + \Lambda_1\sigma - 2\Lambda_\sigma\right)e^{ix\cdot\eta} - \frac{\partial\sigma}{\partial\nu}(x)\right\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0.$$

*Damit sind $\sigma$ und $\dfrac{\partial\sigma}{\partial\nu}$ auf $\partial\Omega$ bekannt.*

**Beweis:**

a) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösung von $\nabla \cdot \sigma\nabla u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = f$ und $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ beliebig. Der Gauß'sche Integralsatz in $\Omega$ liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (\nabla \cdot \sigma\nabla u)\, v\, dx \\ &= \int_\Omega u\,(\nabla \cdot \sigma\nabla v)\; dx + \int_{\partial\Omega} \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}v - u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right) dS. \end{aligned}$$

Nun setzt man $G_\zeta^\varepsilon$ aus dem Beweis zu Lemma 2.2.2 für $v$ ein um

$$S_0\Lambda_\sigma f - \frac{1}{2}\sigma f = B_0(\sigma f) - \left(\int_\Omega u(y)\nabla_y G_0(x,y)\cdot\nabla\sigma(y)\,dy\right)\Bigg|_{\partial\Omega} \tag{2.35}$$

zu zeigen. Die rechte Seite der Gleichung (2.35) läßt sich, wie in *Nachman* [N], Kapitel 4 unter zu Hilfenahme von *Fabes, Jodeit und Rivère* [F-J-R] gezeigt, gegen $C|\eta|^{-1/2}$ abschätzen.

b) Man zeigt leicht, daß für $u_\eta$ und $v_\eta$ mit

$$\begin{aligned} \Delta v_\eta = 0 \text{ in } \Omega, &\qquad v_\eta|_{\partial\Omega} = e^{ix\cdot\eta}, \\ \nabla\cdot\sigma\nabla u = 0 \text{ in } \Omega, &\qquad u_\eta|_{\partial\Omega} = e^{ix\cdot\eta}, \end{aligned}$$

$$\|u_\eta - v_\eta\|_{H^1(\Omega)} \le c|\eta|^{-1/2}$$

gilt. Außerdem ist $S_0$, wie in Abschnitt 2.4 gezeigt, injektiv und, da $\Omega$ beschränkt ist, sogar invertierbar. Die Behauptung folgt ähnlich wie im Beweis zu Teil a) (siehe *Nachman* [N], Kapitel 4, Satz 4.3, Lemma 4.4 und Anhang A).

□

## 2.6 Die eindeutige Lösung des inversen Problems

**Satz 2.6.1** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ein beschränktes Gebiet mit $C^{1,1}$ Rand, und sei $\Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ zusammenhängend. Sei $\sigma \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ reellwertig mit positiver unterer Schranke. Dann ist $\sigma$ eindeutig durch $\Lambda_\sigma$ bestimmt und kann folgendermaßen rekonstruiert werden:*

1. *Berechne die Randwerte $\sigma|_{\partial\Omega}$ und $\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}|_{\partial\Omega}$ aus $\Lambda_\sigma$.*
2. *Löse (2.32) um $t(\xi,\zeta)$ aus $\Lambda_q$ für $|\zeta| \geq M$, wie in Satz 2.4.1 gezeigt, zu berechnen.*
3. *Benutze Formel (2.8) aus Satz 2.1.9 oder Formel (2.9) um $q$ aus $t(\xi,\zeta)$ zu ermitteln.*
4. *Berechne $\sigma$ aus $q$ durch Lösen der partiellen Differentialgleichung*

$$-\Delta\sigma^{1/2} + q\sigma^{1/2} = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

*dabei ist $\sigma^{1/2}|_{\partial\Omega}$ aus Satz 2.5.1 bekannt.*

# Kapitel 3

# Numerische Verfahren

## 3.1 Übersicht

In diesem Kapitel stelle ich einige numerische Verfahren zur Rekonstruktion der Leitfähigkeit $\sigma$ vor. Es gibt noch andere Verfahren, die ich an dieser Stelle nicht nennen werde, weil sie nicht stabil sind oder nur aufgrund sehr großer Einschränkungen funktionieren. Trotzdem habe ich die entsprechenden Originalarbeiten im Literaturverzeichnis erwähnt.

Das erste Verfahren ist die gefilterte Rückprojektion nach Barber und Brown. Dieses klassische Verfahren stammt aus der Computer-Tomographie (CT). Die Methode beruht auf der Arbeit von Radon aus dem Jahre 1917.

Danach betrachte ich einen Ansatz aus der Variationsrechnung. Hier minimiert man ein nichtlineares Funktional. Dazu wird eine quadratische Approximation des Funktionals hergeleitet. Die numerische Implementierung erfolgt mit finiten Elementen.

Beim Layer-Stripping rekonstruiert man die Leitfähigkeit nur auf dem Rand eines Gebietes. Um aber Daten aus dem Innern zu erhalten, stellt man das Problem in Untergebieten. Numerisch wird dieses Verfahren mit Fourierreihen implementiert.

In dem letzen Verfahren in diesem Kapitel will man stückweise konstante Leitfähigkeiten rekonstruieren. Man sucht also nicht die Leitfähigkeit $\sigma$ an sich, sondern das Gebiet, in dem $\sigma$ einen bestimmten Wert annimmt. Dieses Verfahren stelle ich vor, weil ich diesen komplett anderen Ansatz interessant finde.

Schließlich wird in den anschließenden beiden Kapiteln ein iteratives Verfahren hergeleitet. Dazu werde ich auch eigene numerische Ergebnisse präsentieren.

## 3.2 Lineare Rückprojektion

### 3.2.1 Die verallgemeinerte Radontransformation

Als Analogon zum Skalarpordukt in der klassischen Radontransformation führt man für die verallgemeinerte Radontransformation eine Funktion $\phi(x,\theta)$ definiert auf $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ ein. Dabei soll $\phi$ folgende Bedingungen erfüllen:

*(i)* $\phi(x,\theta)$ ist eine reellwertige $C^\infty$-Funktion auf $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

*(ii)* $\phi(x,\theta)$ ist homogen vom Grad eins bzgl. $\theta$:

$$\phi(x,\lambda\theta) = \lambda\phi(x,\theta)\,\forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

*(iii)* $\nabla_x\phi$ verschwindet nirgendwo in $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

*(iv)* Für

$$h(x,\theta) := \det\left(\frac{\partial^2\phi(x,\theta)}{\partial x^j\,\partial\theta^k}\right)$$

gilt: $h(x,\theta) > 0$ in $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Zu gegebenem $\phi$ konstruiert man nun eine Familie $\mathcal{H}$ von $(n-1)$-dimensionalen Oberflächen $H_{s,\omega}$ im Gebiet $X$ mit

$$H_{s,\omega} = \left\{x \in X | s = \phi(x,\omega), s \in \mathbb{R}^1, \omega \in S^{n-1}\right\}.$$

Aus *(ii)* folgt, daß $H_{s,\omega} = H_{-s,-\omega}$ gilt. Also ist $\mathcal{H}$ isomorph zu $(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})/\mathbb{Z}_2$. Zu gegbenem $x \in X$ sei $Y_x$ die Menge aller Hyperoberflächen der Familie $\mathcal{H}$, die durch den Punkt $x$ verlaufen,

$$Y_x = \left\{[\phi(x,\omega),\omega] \in \mathrm{H} | \omega \in S^{n-1}\right\}.$$

Die Funktion $\phi$ muß noch zwei zusätzliche Bedingungen erfüllen:

*(v)* Aus $H_{s,\omega} = H_{s',\omega'}$ folgt schon $[s,\omega] = [s',\omega']$.

*(vi)* Ist $Y_x = Y_{x'}$, dann folgt $x = x'$.

Nun definiert man die verallgemeinerte Radontransformation durch

$$(Ru)([s,\omega]) = \int\limits_{H_{s,\omega}} u(x)a(x,\omega)\Omega \tag{3.1}$$

mit einer positiven Gewichtsfunktion $a(x,\omega)$. Dabei ist die Differentialform

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial\phi(x,\omega)/\partial x_j}{|\nabla_x \phi(x,\omega)|^2} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n \tag{3.2}$$

so gewählt, daß

$$d_x\phi(x,\omega) \wedge \Omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \tag{3.3}$$

gilt.

Der zu $R$ duale Operator $R^*$ lautet:

$$R^* v(y) = \int\limits_{|\omega|=1} b(y,\omega) v(s,\omega)|_{s=\phi(y,\omega)}\, dS_\omega \tag{3.4}$$

mit

$$b(x,\omega) = \frac{h(x,\omega)}{a(x,\omega)}.$$

In *Beylkin* [B1] wird nun gezeigt, daß folgender Satz gilt:

**Satz 3.2.1** *Sei $K$ der Integraloperator definiert als Faltung mit dem Kern*

$$K(s) = \frac{1}{2(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |r|^{n-1} e^{irs}\, dr. \tag{3.5}$$

*Dann gilt für $F = R^*KR$:*

$$F = I + T \tag{3.6}$$

*mit einem kompakten Operator $T$.*

**Bemerkung 3.2.2** *$K(s)$ existiert nicht im klassischen Sinne, sondern als Distribution, d.h., man integriert $K(s)$ gegen eine schnell fallende $C^\infty$-Funktion (Schwartz'scher Raum $\mathcal{S}$, siehe Anhang B) und vertauscht die Integrationsreihenfolge. Die Existenz folgt nun aus der Glattheit der Testfunktion.*

Mit Hilfe dieses Satzes kann man nun die Radontransformation approximativ invertieren, indem man ganz einfach den kompakten Operator $T$ vernachlässigt.

Einen anderen Ansatz die Radontransformation zu invertieren wird in *Berenstein* [B-C-T] gegeben. In diesem Artikel wird gezeigt, daß für den Laplace-Beltrami-Operator $\Delta$ in gewissen Koordinaten

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta S R^* R = I$$

gilt. Dabei sei der Operator $S$ als Faltung mit dem Kern

$$\tilde{S}(r) = \coth(r) - 1$$

definiert.

### 3.2.2 Linearisierung

Man betrachte das in Kapitel 1 hergeleitete mathematische Modell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} &= f \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Zur Vereinfachung linearisiert man dieses Problem um $u$, $\sigma$: Für eine kleine Störung $\eta$ in $\sigma$ erfüllt nach Vernachlässigung von Termen zweiter Ordnung die zugehörige Störung $w$ in $u$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma \nabla w) &= -\nabla \cdot (\eta \nabla u) \text{ in } \Omega, \\ \sigma \frac{\partial w}{\partial \nu} &= -\eta \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Im weiteren Verlauf betrachtet man das Problem noch unter folgenden Voraussetzungen:

1. $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$.

2. $\sigma \equiv 1$. $u$ sei eine Dipollösung bzgl. $\omega$, d.h. $u$ löst

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= -\pi \delta'_\omega \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.9}$$

   Dieses entspricht in der Praxis zwei aufeinander folgenden, entgegengesetzt gepolten Elektroden.

3. Da man Effekte aus dem Innern sucht, nimmt man an, daß $\eta = 0$ in einer Umgebung von $\omega$ ist.

Unter diesen Annahmen vereinfacht sich (3.8) zu

$$\begin{aligned} \Delta w &= -\nabla \eta \cdot \nabla u \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Die derart vereinfachte Aufgabe besteht nun darin, zu gegebenen Störungen $w$ von verschiedenen Dipollösungen $u$ ein $\eta$ zu suchen, so daß (3.10) für alle Dipol-Positionen $\omega$ erfüllt wird.

### 3.2.3 Die Poincaré-Abbildung

Sei $\Omega$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$, $\omega \in \partial\Omega$. Zu gegebenem $\omega$ definiert man $U$ und $V$ als

$$\begin{aligned} x_1' &= \omega^\perp \cdot x, \\ x_2' &= 1 - \omega \cdot x, \\ U &= \frac{x_1'}{x_1'^{\,2} + x_2'^{\,2}}, \\ V &= \frac{x_2'}{x_1'^{\,2} + x_2'^{\,2}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Santosa nennt die Abbildung $x \mapsto (-U, V)$ die Poincaré-Abbildung. Wie man leicht nachrechnet, bildet sie $\Omega$ konform auf $P = \left\{(x,y), x > \frac{1}{2}\right\}$ ab.

Außerdem ist $U$ die Dipollösung von (3.9) in der Einheitskugel.

Betrachtet man nun das Problem (3.10) in $(U, V)$-Koordinaten, so erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \Delta W &= -\frac{\partial \eta}{\partial U} \quad \text{in } \mathbf{P}, \\ \frac{\partial W}{\partial V} &= 0 \quad \text{auf } \partial\mathbf{P}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

$W$ und $\eta$ hängen in diesen Koordinaten noch von der Dipol-Position $\omega$ ab.

### 3.2.4 Anwendung der Radontransformation

In der EIT wählt man die in Abschnitt 3.2.1 eingeführten Funktionen $\phi$ und $a$ folgendermaßen:

$$\phi(x, \xi) = |\xi| U(x, \xi/|\xi|), \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \tag{3.13}$$
$$a(x, \omega) = |\nabla_x \phi(x, \omega)|^2. \tag{3.14}$$

Man rechnet leicht nach, daß $\phi$ die Eigenschaften *(i)-(vi)* erfüllt und sich die Gewichtsfunktion $b(x, \omega)$ von $R^*$ zu

$$b(x, \omega) = \frac{h(x, \omega)}{a(x, \omega)} = 2V(x, \omega) - 1, \quad x \in \Omega, \quad |\omega| = 1, \tag{3.15}$$

errechnet. Der Beweis kann in *Santosa* [S] nachgelesen werden.

**Satz 3.2.3** *Seien $W$, $U$, $V$ und $\omega$ wie oben. Dann ist in der Notation von Abschnitt 3.2.1*

$$KR(\eta) \approx -\frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{\partial W}{\partial U}\right|_{V=1/2}\right)(s,\omega).$$

**Beweis:**

In $\mathbb{R}^2$ ist

$$\gamma_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

eine Fundamentallösung der Gleichung $-\Delta u = f$. Nun betrachte man

$$\tilde{G}(x,y) = -\frac{\partial\gamma_2}{\partial x} = \frac{x}{2\pi(x^2+y^2)}.$$

Mittels der Theorie über distributive Ableitungen erhält man so eine Fundamentallösung zu $-\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}$. Die Greensche Funktion in $P$ muß nun noch

$$\left.\frac{\partial G(u,v,U,V)}{\partial V}\right|_{V=\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall\, u,U\in\mathbb{R},\ v\in\left[\frac{1}{2};\infty\right[,$$

erfüllen und ergibt sich zu

$$\begin{aligned} G(u,v,U,V) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{G}(U-u,V-v)+\tilde{G}(U-u,1-V-v)\right) \\ &= -\frac{U-u}{4\pi}\left(\frac{1}{(U-u)^2+(V-v)^2}+\frac{1}{(U-u)^2+(1-V-v)^2}\right). \end{aligned}$$

Nun konstruiert man Lösungen von (3.12) durch

$$W(U,V,\omega) = \int_P G(u,v,U,V)\eta(u,v,\omega)\,du\,dv.$$

Differenziert man $W$ nach $U$, so ergibt Einsetzen von $G$

$$-\left(\left.\frac{\partial W}{\partial U}\right|_{V=1/2}\right)(s,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{1/2}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1/2-v)^2-(s-u)^2}{((s-u)^2+(1/2-v)^2)^2}\eta(u,v,\omega)\,du\,dv. \tag{3.16}$$

Man betrachte nun für $q>0$

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{q^2-p^2}{(q^2+p^2)^2}, \\ h(r) &= \begin{cases} r & , \ r\geq 0 \\ 0 & , \ r<0 \end{cases} \\ \text{und}\qquad f(r) &= |r|e^{-q|r|} = h(r)e^{-qr}+h(-r)e^{qr}. \end{aligned}$$

Die Fouriertransformation von $g$ bestimmt man durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)e^{-qr+irp}\,dr &= \lim_{R\to 0}\int_0^R re^{(ip-q)r}\,dr \\ &= \lim_{R\to 0}\left(\frac{Re^{(ip-q)R}}{ip-q} - \frac{e^{(ip-q)R}-1}{(ip-q)^2}\right) \\ &= \frac{1}{(ip-q)^2}.\end{aligned}$$

Analog folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(-r)e^{qr+irp}\,dr = \frac{1}{(ip+q)^2}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\tilde{f}(p) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{q^2-p^2}{(q^2+p^2)^2} \\ \text{oder}\qquad \hat{g}(r) &= \sqrt{2\pi}\frac{|r|}{2}e^{-q|r|}.\end{aligned}$$

Mit $q = v - \frac{1}{2}$ kann man nun (3.16) als

$$-\left(\left.\frac{\partial W}{\partial U}\right|_{V=1/2}\right)(s,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{1/2}^{\infty} g * \eta(\cdot, v, \omega)\,dv$$

schreiben und Fouriertransformation bezüglich $s$ führt zu

$$-\left(\left.\frac{\partial W}{\partial U}\right|_{V=1/2}\right)^{\wedge}(r,\omega) = \frac{|r|}{2}\int_{1/2}^{\infty} e^{-q|r|}\hat{\eta}(r,v,\omega)\,dv.$$

Vernachlässigt man nun den Term $e^{-q|r|}$ unter dem Integral, dann folgt nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\begin{aligned}-\left(\left.\frac{\partial W}{\partial U}\right|_{V=1/2}\right)^{\wedge}(r,\omega) &\approx \frac{|r|}{2}\left(\int_{1/2}^{\infty}\eta(\cdot,v,\omega)\,dv\right)^{\wedge}(r) \\ &= 2\pi K\left(\int_{1/2}^{\infty}\eta(\cdot,v,\omega)\,dv\right)(s).\end{aligned}$$

Der Operator $K$ sei wie in Satz 3.2.1 für $n = 2$ gegeben.

Variablentransformation ergibt nun

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{\infty} \eta(s,v,\omega)\,dv &= \int_{H_{s,\omega}} \eta |\nabla_x U(x,\omega)|\,dS \\ &= R(\eta)(s,\omega).\end{aligned}$$

□

**Korollar 3.2.4** *Zusammenfassend gilt mit den Bezeichnungen aus Satz 3.2.1:*

$$\begin{aligned}B(x) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \left( \left.\frac{\partial W}{\partial U}\right|_{V=1/2} \right) (U(x,\omega),\omega)(1-2V(x,\omega))\,dS_\omega \\ &\approx R^* K R\,(\eta)\,(x) \\ &= (I+T)\,(\eta)\,(x).\end{aligned}$$

*Damit ist $B(x)$ eine Approximation von $\eta(x)$.*

## 3.3 Variationsrechnung

### 3.3.1 Formulierung der Minimierungsaufgabe

**Satz 3.3.1** *Minimieren des Funktionals*

$$I(\sigma, u_1, \ldots, u_N, v_1, \ldots, v_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \sigma^{1/2} \nabla v_i - \sigma^{1/2} \nabla u_i \right|^2 dx \tag{3.17}$$

*mit den Randbedingungen*

$$\sigma \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = f_i, \qquad v_i|_{\partial\Omega} = g_i \tag{3.18}$$

*über alle Argumente löst (1.6), (1.7) und das inverse Problem.*

**Beweis:** Es gilt:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \left| \nabla v_i \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \left| \nabla u_i \right|^2 dx + \int_{\partial\Omega} f_i g_i \, dS \right]. \tag{3.19}$$

Lösen der Variationsgleichung $a(u, w) = F(w) \, \forall w$ (vgl. Abschnitt 1.3) ist äquivalent zur Bestimmung von $\inf_u (a(u, v) - 2F(u))$. Falls $u_i$ und $v_i$ schwache Lösungen von (1.6) und (1.7) sind und übereinstimmen, ist $I(\sigma, u_1, \ldots, u_N, v_1, \ldots, v_N) = 0$, also minimal. Ist $I$ aber minimal, so müssen $u_i$ und $v_i$ Lösungen von (1.6) und (1.7) sein und übereinstimmen. Also ist $\sigma$ Lösung des inversen Problems. $\square$

### 3.3.2 Numerische Methoden

**Bezeichnungen:**

$$\begin{aligned} J_i &:= -\sigma \nabla u_i, \\ E_i &:= -\nabla v_i, \\ \mathbf{E} &:= -(\nabla v_1, \ldots, \nabla v_N), \\ \mathbf{J} &:= (J_1, \ldots, J_N), \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}|^2 &= \sum_{i=1}^{N} |\nabla v_i|^2, \\ |\mathbf{J}|^2 &= \sum_{i=1}^{N} |J_i|^2, \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} &= \sum_{i=1}^{N} \nabla v_i \cdot J_i. \end{aligned} \tag{3.21}$$

(3.17) läßt sich dadurch in folgender Form schreiben:

$$I(\sigma; \mathbf{E}; \mathbf{J}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \sigma^{1/2} \mathbf{E} - \sigma^{-1/2} \mathbf{J} \right|^2 \, dx. \tag{3.22}$$

### Die Gutman-Methode

Die erste in *Kohn und McKenny* [K-M] vorgestellte Methode kann man die Gutman-Methode nennen. Kohn und McKenny bezeichnen sie als die *alternating direction implicit* Methode, was aber eventuell im Widerspruch zur Literatur steht. Das Verfahren ist in zwei Schritte unterteilt:

1. Für ein festes vorgegebenes $\sigma_n$ minimiere $I$ über $v_1, \ldots, v_N$ und $J_1, \ldots, J_N$. Man erhält also $\mathbf{E}(\sigma_n)$ und $\mathbf{J}(\sigma_n)$.

2. Mit $\mathbf{E}(\sigma_n)$ und $\mathbf{J}(\sigma_n)$ aus dem 1. Schritt minimiere $I$ über $\sigma$, um eine neue Approximation $\sigma_{n+1}$ zu berechnen:
   Wie oben gezeigt, läßt sich $I(\sigma; \mathbf{E}; \mathbf{J})$ auch als

   $$I(\sigma; \mathbf{E}; \mathbf{J}) = \int_{\Omega} \sigma |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\sigma} |\mathbf{J}|^2 \, dx + \text{Randintegral unabhängig von } \sigma$$

   schreiben. Das Integral wird minimal, wenn der Integrand minimal wird. Also:

   $$\sigma_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{N} |J_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} |\nabla v_i|^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{|\mathbf{J}(\sigma_n)|}{|\mathbf{E}(\sigma_n)|}. \tag{3.23}$$

Man erhält so eine Folge $I(\sigma_{n+1}; \mathbf{E}(\sigma_n); \mathbf{J}(\sigma_n))$, die gegen das Minimum von $I$ konvergiert. *Gutman* [G] zeigt, daß sich diese Folge folgendermaßen einschachteln läßt:

$$I(\sigma_{n+1}; \mathbf{E}(\sigma_{n+1}); \mathbf{J}(\sigma_{n+1})) \leq I(\sigma_{n+1}; \mathbf{E}(\sigma_n); \mathbf{J}(\sigma_n)) \leq I(\sigma_n; \mathbf{E}(\sigma_n); \mathbf{J}(\sigma_n)).$$

### Die modifizierte Newtonmethode

Um die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhöhen, schlagen *Kohn und McKenny* in [K-M] für den zweiten Schritt einen quadratischen Algorithmus vor. Dabei ist jedoch nicht immer die positive Definitheit der 2. Ableitung des betrachteten Funktionals gegeben, so daß dort die Newtonmethode modifiziert werden muß.

Streng genommen wird (3.22) nicht über alle Variablen minimiert, sondern man behandelt $\sigma$ als bestimmt durch $\mathbf{E}$ und $\mathbf{J}$. $I$ wird also unter Zuhilfenahme von (3.23) minimiert.

Die quadratische Approximation von $I$ ermittelt man durch Auswerten von (3.22) in $\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \delta\mathbf{E}$ und $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \delta\mathbf{J}$ bis zur 2. Ordnung. Dabei müssen für $i = 1, \ldots, N$ folgende Randbedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \delta v_i|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \delta J_i \cdot \nu|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \nabla \cdot \delta J_i &= 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Dann ist

$$I(\sigma, \mathbf{E}, \mathbf{J}) = I(\sigma_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{J}_0) + \delta I + \frac{1}{2}\delta^2 I + O\left(|\delta\mathbf{E}|^2 + |\delta\mathbf{E}|^2 + (\delta\sigma)^2\right) \tag{3.25}$$

mit

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_0 + \delta\sigma} = \frac{1}{\sigma_0} - \frac{\delta\sigma}{\sigma_0^2} + \frac{(\delta\sigma)^2}{\sigma_0^3} + O((\delta\sigma)^3), \tag{3.26}$$

$$\delta I = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\left(|\mathbf{E}_0|^2 - \frac{1}{\sigma_0^2}|\mathbf{J}_0|^2\right)\delta\sigma + 2\sigma_0\mathbf{E}_0 \cdot \delta\mathbf{E} + \frac{2}{\sigma_0}\mathbf{J}_0 \cdot \delta\mathbf{J}\right] dx, \tag{3.27}$$

$$\delta^2 I = \int_\Omega \left[\frac{1}{\sigma_0^3}|\mathbf{J}_0|^2(\delta\sigma)^2 + 2\left(\mathbf{E}_0 \cdot \delta\mathbf{E} - \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{J}_0 \cdot \delta\mathbf{J}\right)\delta\sigma + \sigma_0|\delta\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\sigma_0}|\delta\mathbf{J}|^2\right] dx.$$

Aus (3.23) ergibt sich nun

$$\sigma_0 = \frac{|\mathbf{J}_0|}{|\mathbf{E}_0|}, \tag{3.28}$$

$$\delta\sigma = \frac{\mathbf{J}_0 \cdot \delta\mathbf{J} - \sigma_0^2\mathbf{E}_0 \cdot \delta\mathbf{E}}{|\mathbf{E}_0||\mathbf{J}_0|} + O(|\delta\mathbf{E}|^2 + |\delta\mathbf{J}|^2). \tag{3.29}$$

Einsetzen von (3.28) und (3.29) in (3.27) führt zu

$$\delta I' = \int_\Omega \left[\sigma_0\mathbf{E}_0 \cdot \delta\mathbf{E} + \frac{1}{\sigma_0}\mathbf{J}_0 \cdot \delta\mathbf{J}\right] dx, \tag{3.30}$$

$$\delta^2 I' = \int_\Omega \sigma_0|\delta\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\sigma_0}|\delta\mathbf{J}|^2 - \frac{\sigma_0}{|\mathbf{E}_0|^2}\left(\mathbf{E}_0 \cdot \delta\mathbf{E} - \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{J}_0 \cdot \delta\mathbf{J}\right)^2 dx. \tag{3.31}$$

Da (3.31) im Allgemeinen nicht positiv definit ist, ersetzen *Kohn und Mc Kenny* $\delta^2 I'$ durch

$$\delta^2 I'' = \int_\Omega \sigma_0|\delta\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\sigma_0}|\delta\mathbf{J}|^2 - \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\sigma_0}{|\mathbf{E}_0|^2}\left(\mathbf{E}_0 \cdot \left[\delta\mathbf{E} - \frac{1}{\sigma_0}\delta\mathbf{J}\right]\right)^2 dx. \tag{3.32}$$

Es gilt für $|\mathbf{J}-\sigma_0\mathbf{E}| \to 0$ und $\varepsilon \to 0$, daß

$$|\mathbf{J} - \frac{\sigma}{\sqrt{1+\varepsilon}}\mathbf{E}| \to 0 \tag{3.33}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}
\delta^2 I'' - \delta^2 I' &= \int_\Omega \frac{\sigma_0}{|\mathbf{E}_0|^2}\left[\left(\mathbf{E}_0\cdot\delta\mathbf{E} - \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{J}_0\cdot\delta\mathbf{J}\right)^2 - \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\mathbf{E}_0\cdot\left[\delta\mathbf{E}-\frac{1}{\sigma_0}\delta\mathbf{J}\right]\right)^2\right] dx \\
&= \int_\Omega \frac{\sigma_0}{|\mathbf{E}_0|^2}\left[\frac{1}{\sigma_0^2}\left((\mathbf{J}_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{1+\varepsilon}}\mathbf{E}_0)\cdot\delta\mathbf{J}\right)\right. \\
&\quad \left.\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)\mathbf{E}_0\cdot\delta\mathbf{E} - \frac{1}{\sigma_0^2}\left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{1+\varepsilon}}\mathbf{E}+\mathbf{J}_0\right)\cdot\delta\mathbf{J}\right)\right] dx \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Nun folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{\sigma_0}{|\mathbf{E}_0|^2}\left(\mathbf{E}_0\cdot\left[\delta\mathbf{E}-\frac{1}{\sigma_0}\delta\mathbf{J}\right]\right)^2 &\le \frac{\sigma_0}{1+\varepsilon}\left|\delta\mathbf{E}_0 - \frac{1}{\sigma_0}\delta\mathbf{J}\right|^2 \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\sigma_0|\delta\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\sigma_0}|\delta\mathbf{J}|^2 - 2\delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{J}\right),
\end{aligned}$$

und partielles Integrieren unter Verwendung von (3.20) und (3.24) ergibt

$$\int_\Omega \delta\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{J}\,dx = 0.$$

Deshalb ist $\delta^2 I''$ positiv definit:

$$\delta^2 I'' \ge \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\int_\Omega \sigma_0|\delta\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\sigma_0}|\delta\mathbf{J}|^2\,dx > 0. \tag{3.34}$$

Man kann also

$$I \approx I_0 + \delta I' + \frac{1}{2}\delta^2 I''$$

als Approximation der nach dem dritten Glied abgebrochenen Taylorentwicklung von $I$ betrachten. Da $I_0$ unabhängig von $\delta E$ und $\delta J$ ist, genügt es lediglich

$$\delta I' + \frac{1}{2}\delta^2 I''$$

zu minimieren. Nach Diskretisierung mittels finiter Elemente ergibt sich $\delta I'$ zu einem linearen Funktional für die Knotenvektoren, und aus $\delta^2 I''$ wird eine Bilinearform. So gelangt man zu einem linearen Gleichungssystem für die Knotenvektoren.

## 3.4 Layer Stripping

Grundidee der folgenden Methode ist es, das Problem in zwei Schritte aufzuteilen:

1. Berechnung der Leitfähigkeit $\sigma$ auf dem Rand eines beschränkten Gebietes $\Omega$.

2. Umrechnung des Problems auf ein kleineres Gebiet $\tilde{\Omega}$, das ganz in $\Omega$ enthalten ist, also $\overline{\tilde{\Omega}} \subset \Omega$.

Auf diese Art und Weise kann man die Leitfähigkeit $\sigma$ auf gewissen Kurven bestimmen.

### 3.4.1 Rekonstruktion auf dem Rand

Man betrachtet die etwas allgemeinere partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma \nabla u &= f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} &= j \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.35}$$

zusammen mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u \, dS &= 0, \\ \int_{\Omega} f \, dx &= \int_{\partial\Omega} j \, dS. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Zur Formulierung des Problems und des Lösungsweges verwendet man einige Operatoren:

Sei $s \geq 0$. Für eine Lösung $u$ von (3.35) definiert man

$$\begin{aligned} \gamma &: H^{s+2}(\Omega) \to H^{s+3/2}(\partial\Omega), \\ \gamma &: u \mapsto u|_{\partial\Omega}, \\ T_\sigma &: H^s(\Omega) \times H^{s+1/2}(\partial\Omega) \to H^{s+2}(\Omega), \\ T_\sigma(f,j) &:= u, \\ R &= \gamma T_\sigma|_{\{0\}\times H^{s+1/2}(\partial\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Schließlich bezeichnet man mit $T$ die Abbildung $T_\sigma$ für $\sigma \equiv 1$ und entsprechend $R_0 = \gamma T|_{\{0\}\times H^{s+1/2}(\partial\Omega)}$.

**Satz 3.4.1** *Sei $\sigma$ hinreichend glatt (z.B. $\sigma \in H^{s+2}(\Omega)$). Dann läßt sich der Operator $T_\sigma$ in*

$$T_\sigma = \frac{1}{\sigma} T + T_R \tag{3.38}$$

*aufteilen mit $T_R : H^s(\Omega) \times H^{s+1/2}(\partial\Omega) \to H^{s+3}(\Omega), s \geq 0$.*

**Beweis:** Seien $u = T_\sigma(f, j)$ und $u_0 = T(f, j)$. Es ist zu zeigen, daß

$$u_R = u - \frac{1}{\sigma} u_0 \in H^{s+3}(\Omega).$$

$u_R$ erfüllt wegen $\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0$ und $\Delta u_0 = 0$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma \nabla u_R &= \nabla \cdot u_0 \nabla \eta, \\ \sigma \frac{\partial u_R}{\partial \nu} &= u_0 \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \end{aligned}$$

mit $\eta = \log \sigma$. Es folgt

$$u_R = T_\sigma B u_0 = T_\sigma B T(f, j) \tag{3.39}$$

mit

$$B\psi = (\nabla \cdot (\psi \nabla \eta), \psi \frac{\partial \eta}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}).$$

Wenn nun $\eta$ hinreichend glatt ist, so gilt

$$B : H^{s+2}(\Omega) \to H^{s+1}(\Omega) \times H^{s+3/2}(\partial\Omega). \tag{3.40}$$

Zusammen mit (3.37) ist nun $u_R \in H^{s+3}(\Omega)$. Setze $T_R := T_\sigma B T$. $\square$

Aus dem gerade gezeigten Satz folgt nun für die Randwerte

$$\begin{aligned} R &= \gamma T_\sigma|_{\{0\}\times H^{s+1/2}(\partial\Omega)} \\ &= \gamma \frac{1}{\sigma} T|_{\{0\}\times H^{s+1/2}(\partial\Omega)} + \gamma T_R|_{\{0\}\times H^{s+1/2}(\partial\Omega)} \\ &= \frac{1}{\sigma}\Big|_{\partial\Omega} R_0 + R_R \\ \text{und} \quad R_R &: H^{s+1/2}(\partial\Omega) \to H^{s+5/2}(\partial\Omega). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Die Bedeutung dieser Formel sieht man am besten an einem kleinen Beispiel.

### Beispiel

In dem Gebiet $\Omega := \left\{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1\right\}$ kann man den Operator $R_0$ folgenderma-ßen berechnen:

Man betrachtet Lösungen von

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= j \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

in Polarkoordinaten, die sich in der Form

$$u_0(r,\theta) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} c_m r^{|m|} e^{im\theta}$$

schreiben lassen. Die Randbedingung wird so zu

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq 0}}^{\infty} |m| c_m e^{im\theta} = j(\theta).$$

Schreibt man $j$ als Fourierreihe und sei $j_m$ der m-te Fourierkoeffizient von $j$, dann folgt daraus

$$c_m = \frac{1}{|m|} j_m.$$

Zusammenfassend gilt

$$R_0\left(e^{in\cdot}\right)(\theta) = \frac{1}{|n|} e^{in\theta}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0. \tag{3.42}$$

Den Fall $n = 0$ kann man wegen (3.36) ausschließen.

Aufbauend auf Satz 3.4.1 kann man damit folgenden Satz über die Fourierkoef-fizienten von $\dfrac{1}{\sigma(1,\theta)}$ beweisen:

**Satz 3.4.2** *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis und $\sigma$ hinreichend glatt mit positiver unterer Schranke. Dann ist*

$$\lim_{|n|\to\infty} |n| R_{n+k,n} = \rho_k, \quad n, k \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \tag{3.43}$$

*mit*

$$\begin{aligned} R_{m,n} &= \left\langle e^{im\theta}, R\left(e^{in\cdot}\right)(\theta)\right\rangle, \qquad (3.44) \\ \rho_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \frac{1}{\sigma(1,\theta)}\, d\theta. \end{aligned}$$

**Beweis:** Aus (3.42) und (3.44) folgt

$$R_{m,n} = \frac{1}{|n|}\rho_{m-n} + \left\langle e^{im\theta}, R_R\left(e^{in\cdot}\right)(\theta)\right\rangle. \tag{3.45}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} m^2\left\langle e^{im\theta}, R_R\left(e^{in\cdot}\right)(\theta)\right\rangle &= m^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\theta}R_R\left(e^{in\cdot}\right)(\theta)\,d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 e^{-im\theta}}{\partial\theta^2}R_R\left(e^{in\cdot}\right)(\theta)\,d\theta \end{aligned}$$

Durch Anwenden der Cauchy-Schwartz'schen-Ungleichung erhält man

$$\left|m^2\left\langle e^{im\theta}, R_R\left(e^{in\cdot}\right)(\theta)\right\rangle\right| \le \frac{1}{2\pi}\left\|e^{im\cdot}\right\|_{H^{-(s+5/2)+2}(S^1)}\left\|R_R\left(e^{in\cdot}\right)\right\|_{H^{s+5/2}(S^1)}.$$

mit $s \geq 0$. Nach Satz 3.4.1 ist $R_R : H^{s+1/2}(S^1) \longrightarrow H^{s+5/2}(S^1)$ beschränkt, deshalb gilt

$$\begin{aligned} \left|m^2\left\langle e^{im\theta}, R_R\left(e^{in\cdot}\right)(\theta)\right\rangle\right| &\le C\left\|e^{im\cdot}\right\|_{H^{-(s+1/2)}(S^1)}\left\|e^{in\cdot}\right\|_{H^{s+1/2}(S^1)} \\ &\le C\frac{(1+n^2)^{(2s+1)/4}}{(1+m^2)^{(2s+1)/4}}. \end{aligned}$$

Für $m = n + k$ folgt dann

$$\left|\left\langle e^{im\theta}, R_R\left(e^{in\cdot}\right)(\theta)\right\rangle\right| \in O(n^{-2}).$$

□

### 3.4.2 Unteroberflächensynthese von Daten im Innern

Somersalo, Cheney, Isaacson und Isaacson [S-C-I-I] entwickeln in sphärischen Gebieten eine Differentialgleichung für $R$. Diese nennen sie die *Riccatigleichung*. Sei $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < t\}$, $0 < t \leq 1$, und $\Omega = \Omega_1$. Für jedes $t$ kann man nun das Randwertproblem lösen:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\sigma\nabla u &= 0 \quad \text{für } |x| < t, \\ \sigma\frac{\partial u}{\partial\nu} &= j \quad \text{für } |x| = t. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Damit definiert man eine Familie von Operatoren

$$\begin{aligned} R(t) &: H^s(S^{n-1}) \to H^{s+1}(S^{n-1}),\ s \geq \frac{1}{2}, \\ R(t) &: \qquad j \mapsto u|_{\partial\Omega_t}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

**Satz 3.4.3** *Die Operatoren $R(t)$, $0 < t \leq 1$, bilden eine linksstetige Familie bzgl. $t$ in der starken Operatortopologie von $L(H^s(S^{n-1}), H^{s+1}(S^{n-1}))$, $s \geq \frac{3}{2}$. Zusätzlich existiert der starke Limes*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\varepsilon} \left(R(t) - R(t-\varepsilon)\right) =: \frac{d}{dt_-} R(t)$$

*in $L(H^s(S^{n-1}), H^{s+1}(S^{n-1}))$, und es gilt*

$$\frac{d}{dt_-} R(t) = \frac{1}{\sigma} + \frac{n-1}{t} R(t) + R(t) \nabla_\tau \cdot \sigma \nabla_\tau R(t). \tag{3.48}$$

*Dabei ist $\nabla_\tau \cdot \sigma \nabla_\tau$ der tangentiale Teil von $\nabla \cdot \sigma \nabla$ entlang der Oberfläche $|x| = t$.*

**Beweis:**

1. Stetigkeit: Sei $u$ eine Lösung von (3.46).

$$\begin{aligned}
(R(t) - R(t-\varepsilon))j &= (R(t)j - u|_{|x|=t-\varepsilon}) + (u|_{|x|=t-\varepsilon} - R(t-\varepsilon)j) \\
&= (u|_{|x|=t} - u|_{|x|=t-\varepsilon}) + R(t-\varepsilon) \left( \sigma \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{|x|=t-\varepsilon} - \sigma \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{|x|=t} \right).
\end{aligned}$$

   Die Abbildung $u \mapsto u|_{|x|=r}$ ist für $r \leq t$ stetig von $H^{s+3/2}(\Omega_t)$ nach $H^{s+1}(S^1)$. Deshalb gilt

$$\left\| u|_{|x|=t} - u|_{|x|=t-\varepsilon} \right\|_{H^{s+1}(S^{n-1})} \to_{\varepsilon \to 0} 0$$

   und entsprechend

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{|x|=t} - \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{|x|=t-\varepsilon} \right\|_{H^s(S^{n-1})} \to_{\varepsilon \to 0} 0.$$

   Mit $R(t)$ ist auch $R(t-\varepsilon)$ für kleine $\varepsilon$ beschränkt. Daraus folgt die Stetigkeit.

2. Differenzierbarkeit: Es ist zu zeigen

$$\frac{1}{\varepsilon}(u|_{|x|=t} - u|_{|x|=t-\varepsilon}) \longrightarrow_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{|x|=t} \quad \text{in } H^s(S^{n-1}) \text{ und}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left( \sigma \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{|x|=t} - \sigma \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{|x|=t-\varepsilon} \right) \longrightarrow_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial}{\partial r} \sigma \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{|x|=t} \quad \text{in } H^{s-1}(S^{n-1}).$$

   Für $t = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{\varepsilon}(u|_{|x|=1} - u|_{|x|=1-\varepsilon}) - \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{|x|=1} \right\|_{H^s(S^{n-1})} \\
&\qquad = \left\| \frac{1}{\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^{1} \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{|x|=t} dt - \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{|x|=1} \right\|_{H^s(S^{n-1})} \\
&\qquad \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^{1} \left\| \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{|x|=t} - \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{|x|=1} \right\|_{H^s(S^{n-1})} dt \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} 0.
\end{aligned}$$

Der zweite Limes folgt analog mit $\sigma\frac{\partial u}{\partial r}$ anstatt $u$.

3. Die Differentialgleichung für $R(t)$: Es gilt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt_-}R(t)\right) j &= \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{|x|=t} - R(t)\left.\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{|x|=t} \\
&= \frac{1}{\sigma}j - R(t)\left.\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{|x|=t}. \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

Außerdem ist $\Delta u \in H^{s+1/2}(\{|x|<1\})$, so daß die Einschränkung auf $|x|=t$ in $H^s(S^{n-1})$ existiert und

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla\cdot\sigma\nabla u|_{|x|=t} \\
&= \left.\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{n-1}{r}\sigma\frac{\partial u}{\partial r} + \nabla_\tau\cdot\sigma\nabla_\tau u\right)\right|_{|x|=t} \\
&= \left.\left(\frac{\partial}{\partial r}\sigma\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{|x|=t} + \frac{n-1}{t}j + \nabla_\tau\cdot\sigma\nabla_\tau R(t)j. \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Einsetzen von (3.50) in (3.49) ergibt die Behauptung.

□

## Beispiel

Im folgenden beachte man, daß die Funktionen $e^{in\theta} \in C^\infty(]-\pi;\pi[)$, $n \in \mathbb{Z}$, ein vollständiges Orthonormalsystem des Raumes $L^2(]-\pi;\pi[)$ bilden.

Zurückkehrend zum vorherigen Beispiel nimmt die Gleichung (3.48) in $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| < t\}$ folgende Gestalt in Polarkoordinaten $(r,\theta)$ an:

$$\frac{d}{dt_-}R(t) = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{t}R(t) + \frac{1}{t^2}R(t)\frac{\partial}{\partial\theta}\sigma\frac{\partial}{\partial\theta}R(t).$$

Dabei ist mit $\frac{1}{\sigma}$ die Multiplikation mit dieser Funktion als Operator gemeint. Ersetzt man $R(t)$ durch $tW(t)$, so ergibt dieses

$$t\frac{d}{dt_-}W(t) = \frac{1}{\sigma} + W(t)\frac{\partial}{\partial\theta}\sigma\frac{\partial}{\partial\theta}W(t). \tag{3.51}$$

Mit Hilfe von

$$w_{m,n}(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta}\left(W(t)e^{in\cdot}\right)(\theta)\,d\theta \tag{3.52}$$

kann man $W(t)$ durch

$$\left(W(t)f\right)(\theta) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} w_{m,n}(t)f_n e^{im\theta}$$

ausdrücken, falls $f$ die Fourierreihe

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}$$

besitzt.

Es seien $\sigma_n(t)$ und $\rho_n(t)$ die Fourierkoeffizienten von $\sigma(t,\theta)$ bzw. $\frac{1}{\sigma(t,\theta)}$. Um aus (3.51) eine Gleichung für $w_{m,n}(t)$ abzuleiten, betrachte man

$$\begin{aligned}
& & \left(W(t)e^{in\cdot}\right)(\theta) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} w_{l,n}(t)e^{il\theta}\\
&\Rightarrow & \frac{\partial}{\partial\theta}\left(W(t)e^{in\cdot}\right)(\theta) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} w_{l,n}(t)ile^{il\theta}\\
&\Rightarrow & \sigma(t,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(W(t)e^{in\cdot}\right)(\theta) &= \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} \sigma_{k-l}(t)w_{l,n}(t)ile^{ik\theta}\\
&\Rightarrow & \frac{\partial}{\partial\theta}\sigma(t,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(W(t)e^{in\cdot}\right)(\theta) &= -\sum_{k,l=-\infty}^{\infty} k\sigma_{k-l}(t)w_{l,n}(t)le^{ik\theta}\\
&\Rightarrow & W(t)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sigma(t,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(W(t)e^{in\cdot}\right)(\theta)\right) &= -\sum_{k,l=-\infty}^{\infty} k\sigma_{k-l}(t)w_{l,n}(t)l\left(W(t)e^{ik\cdot}\right)(\theta).
\end{aligned}$$

Setzt man dieses in (3.52) ein, dann folgt

$$t\frac{dw_{m,n}}{dt_-}(t) = \rho_{m-n}(t) - \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} w_{m,k}(t)k\sigma_{k-l}(t)w_{l,n}(t).$$

**Zusammenfassend hat man nun**

1. $w_{n+k,n}(t) = \dfrac{t}{|n|}\rho_k(t) + O(\dfrac{1}{n^2})$, d.h., man kann $\dfrac{1}{\sigma}$ aus $w_{m,n}(t)$ und damit aus $R(t)$ berechnen in $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| < t\}$.

2. $w_{m,n}(t-\varepsilon) = w_{m,n}(t) - \varepsilon\dfrac{dw_{m,n}}{dt_-}(t) + O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon > 0$, d.h., man kann aus dem Problem in dem Gebiet $\Omega_t$ eines in $\Omega_{t-\varepsilon}$ ableiten.

## 3.5 Ermittlung unstetiger Leitfähigkeiten

### 3.5.1 Das Problem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, beschränkt und einfach zusammenhängend mit $C^2$-Rand, und seien $D \subset \Omega$ offen und $K > 0$. Definiere $\sigma(x)$ als

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \setminus D, \\ k, & x \in D. \end{cases}$$

Sei $u$ die Lösung von

$$\begin{aligned} L_\sigma u := \nabla \cdot \sigma \nabla u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} &= g, \\ \int_{\partial\Omega} u \, dS &= 0, \\ \text{mit } \int_{\partial\Omega} g \, dS &= 0. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Gesucht ist bei dieser Formulierung des inversen Problems das Gebiet $D$, wobei $k$ *à priori* bekannt ist. Zur Vereinfachung werde angenommen, daß eine Abbildung von einer kompakten Menge $Q \subset \mathbb{R}^M$ in die Menge der Gebiete $D$ existiert: $q \mapsto D(q)$. Sei $u^q$ die Lösung von (3.53) mit $D = D(q)$ und $u$ die Lösung von (3.53) zum gesuchten Gebiet $D$.

**Definition 3.5.1** *Seien $N_i$ offene Teilmengen von $\partial\Omega$, und sei $F : L^2(\partial\Omega) \to \mathbb{R}^M$ definiert durch*

$$F_i(\phi) = \int_{N_i} f_i \phi \, dS, \quad i = 1, \ldots, M$$

*mit Gewichtsfunktionen $f_i$. Definiere nun die fit-to-data Funktion durch*

$$J(q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} |F_i(u^q) - F_i(u)|^2. \tag{3.54}$$

### 3.5.2 Eine Approximation von $u$

Im Einheitskreis ist

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi}(\log(|x - y|) + log(|\frac{x}{|x|^2} - y|))$$

eine Green'sche Funktion für $-\Delta u = f$, d.h., $G(x, y)$ ist Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta_y G(x,y) &= -\delta(x) \quad \text{für } y \in \Omega, \quad \forall x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)|_{y \in \partial\Omega} &= -\frac{1}{|\partial\Omega|}, \\ \int\limits_{\partial\Omega} G(x,y)\, dS_y &= 0. \end{aligned}$$

Um Lösungen von

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u_o}{\partial \nu} &= g \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \text{mit } \int\limits_{\partial\Omega} u_0\, dS &= 0 \end{aligned}$$

zu ermitteln, kann man nun $G(x, y)$ verwenden:

$$u_0(x) = \int\limits_{\partial\Omega} G(x,y) g(y)\, dS_y - \int\limits_{\Omega} G(x,y) f(y)\, dy, \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.55}$$

Zu gegebenem $D$ sei $u(k, x)$ die Lösung von (3.53). Definiere $\psi$ als

$$\psi(x) = \int\limits_{\partial D} u_0(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\, dS_y, \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{3.56}$$

Damit kann man $u(k, x)$ folgendermaßen approximieren:

**Satz 3.5.2** *Für festes $x \in \partial\Omega$ ist die Abbildung $k \mapsto (u(k, x))$ in $k = 1$ differenzierbar bzgl. $k$, und die Ableitung ist durch (3.56) gegeben. Es gilt sogar*

$$|u(k,x) - u_0(x) - (k-1)\psi(x)| \le C(k-1)^2,$$

*für eine Konstante $C$, die lediglich von $D$ und $u_0$ abhängt.*

**Beweis:** Aufgrund der Eigenschaften von $G(x, y)$ und des Gauß'schen Integralsatzes kann man für die Lösung $u(k, x)$ von (3.53) folgende zwei Integralgleichungen herleiten:

Für $x \in \bar{\Omega} \setminus D$ gilt

$$u(k,x) = u_0(x) + (1-k) \int\limits_{\partial D} u(k,y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\, dS_y. \tag{3.57}$$

Für $x \in \partial D$ genügt $u(k,x)$ der Gleichung

$$u(k,x) = \frac{2}{1+k} u_0(x) + \frac{2(1-k)}{1+k} \int\limits_{\partial D} u(k,y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\, dS_y. \tag{3.58}$$

Die Behauptung beweist man nun, indem man (3.58) in der Supremumsnorm abschätzt und das Ergebnis dann in (3.57) einsetzt. Den genauen Beweis kann man in *Bryan* [B3] nachlesen. □

Eine lineare Approximation $\tilde{u}(x)$ der Lösung $u(k,x)$ von (3.53) ist also durch

$$\tilde{u}(x) = u_0(x) + (k-1)\psi(x).$$

gegeben.

### 3.5.3 Numerische Experimente

Nun kann man das originale inverse Problem umformulieren, indem man $u$ durch $\tilde{u}$ aus Definition 3.5.2 ersetzt. Für numerische Berechnungen müssen noch $Q$ und $D(q)$ definiert werden. Als einfachstes Beispiel für $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1\right\}$ nennt Bryan in [B3]

$$\begin{aligned} Q &:= \left\{(a,b,r) \in \mathbb{R}^3,\ \sqrt{a^2+b^2} + r \le \rho < 1\right\} \quad \text{und} \\ D(q) &:= \left\{x \in \Omega,\ (x_1-a)^2 + (x_2-b)^2 \le r^2\right\}. \end{aligned}$$

Damit führt Bryan zunächst eine erste Approximation durch. Um aber allgemeinere Gebiete zu ermitteln, parametrisiert er $\partial D(q)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} x(t) &= a + r(t)\cos(t), \\ y(t) &= b + r(t)\sin(t), \end{aligned}$$

für $0 \le t \le 2\pi$ und $a$ und $b$ aus der ersten Approximation. $r(t)$ sei ein kubischer Spline mit $r(0) = r(2\pi)$, $r'(0) = r'(2\pi)$ und $r(t_i) = q_i$, $i = 1 \ldots m$ mit $t_i = 2\pi i/m$. Nun wendet man den Algorithmus auf $q_i \ldots q_m$ an.

# Kapitel 4

# Ein spezielles iteratives Verfahren

## 4.1 Das Iterationsverfahren

### 4.1.1 Der nichtlineare Fall

Sei $R_j(f)$ eine Familie nichtlinearer Fréchet-differenzierbarer Operatoren, und gesucht sei eine Lösung des Systems

$$R_j(f) = 0, \quad \text{für } j = 1, \dots, p. \tag{4.1}$$

Da $R_j(f)$ Fréchet-differenzierbar ist, gilt

$$R_j(f+h) - R_j(f) = R_j'(f)h + o(\|h\|^2). \tag{4.2}$$

Nun soll $f + h$ eine Approximation der Lösung $f^*$ von (4.1) sein. Man setzt deshalb $R_j(f+h) = 0$. Vernachlässigt man den $o(\|h\|^2)$ Term und löst nach $h$ auf, so erhält man als kleinste-Quadrate-Lösung

$$h = -R_j'(f)^* \left(R_j'(f)R_j'(f)^*\right)^{-1} R_j(f). \tag{4.3}$$

Ersetzt man $R_j'(f)R_j'(f)^*$ zur weiteren Vereinfachung durch eine Konstante $c_j$, dann führt dieses zu folgendem Verfahren:

$$\begin{aligned} f_0 &= f^0, \\ f_j &= f_{j-1} - \frac{1}{c_j} R_j'(f)^* R_j(f), \quad j = 1, \dots, p, \\ f^1 &= f_p. \end{aligned} \tag{4.4}$$

### 4.1.2 Der lineare Fall

**Satz 4.1.1** *Für ein konsistentes System linearer Gleichungen*

$$R_j f = g_j, \quad j = 1, \ldots, p, \tag{4.5}$$

*konvergiert das Iterationsverfahren*

$$\begin{aligned} f_0 &= f^0, \\ f_j &= f_{j-1} - \frac{1}{c_j} R_j^* R_j f_{j-1}, \\ f^1 &= f_p \end{aligned} \tag{4.6}$$

*für* $c_j > \frac{1}{2}\rho\left(R_j R_j^*\right)$. *Gilt zusätzlich*

$$f^0 \in \sum_{j=1}^{p} \mathit{Bild}\left(R_j^*\right), \tag{4.7}$$

*dann konvergiert (4.6) gegen die Lösung von (4.5) mit minimaler Norm.*

**Bemerkung 4.1.2** *Dieses Iterationsverfahren ist als* **algebraic reconstruction technique (ART)** *oder* **Kaczmarzmethode** *bekannt.*

**Beweis:**

Sei

$$f_j = f^0 + \sum_{k=1}^{j} R_k^* u_k.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & f^0 + \sum_{k=1}^{j} R_k^* u_k &=& \left(I - \frac{1}{c_j} R_j^* R_j\right)\left(f^0 + \sum_{k=1}^{j-1} R_k^* u_k\right) \\ \Rightarrow \quad & R_j^* u_j &=& -\frac{1}{c_j} R_j^* R_j f^0 - \frac{1}{c_j} R_j^* \sum_{k=1}^{j-1} R_j R_k^* u_k \\ \Rightarrow \quad & c_j u_j &=& -R_j f^0 - \sum_{k=1}^{j-1} R_j R_k^* u_k. \end{aligned}$$

Setze nun

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_p \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} R_1 R_1^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_p R_p^* \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} c_1 I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_p I \end{pmatrix}, \\ A &= RR^* = L + L^* + D. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{array}{rrcl} & Cu & = & -Rf^0 - Lu \\ \Rightarrow & u & = & -(C+L)^{-1}Rf^0. \end{array}$$

Man nehme jetzt $f^k = \sum_{j=1}^{p} R_j^* u_j^k = R^* u^k$ und damit

$$\begin{array}{rrcl} & R^*u^1 & = & f^1 \\ & & = & f^0 + R^*u = R^*u^0 + R^*u \\ & & = & R^*u^0 - R^*(C+L)^{-1}RR^*u^0 \\ \Rightarrow & u^1 & = & u^0 - (C+L)^{-1}RR^*u^0 \\ & & & = (C+L)^{-1}(C+L-L-L^*-D)u^0 \\ & & & = (C+L)^{-1}(C-L^*-D)u^0. \end{array}$$

Betrachte nun das Eigenpaar $(\lambda, v)$ von $B = (C+L)^{-1}(C-L^*-D)$:

$$\begin{array}{rcl} (C+L)^{-1}(C-L^*-D)v & = & \lambda v \\ \Rightarrow \qquad \lambda & = & \dfrac{\langle (C-L^*-D)v, v\rangle}{\langle (C+L)v, v\rangle}. \end{array}$$

Seien nun o.E. $\langle Dv, v\rangle = 1$, $\langle Cv, v\rangle = \gamma > \frac{1}{2}$ und $\langle Lv, v\rangle = \alpha + i\beta$. Da $0 \leq \langle RR^*v, v\rangle = \langle (L+L^*+D)v, v\rangle$, folgt $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ und deshalb

$$\begin{array}{rrcl} & \gamma - \alpha - 1 & \leq & \gamma + \dfrac{1}{2} - 1 \\ & & \leq & \gamma + \alpha \\ \text{und} & \alpha + 1 - \gamma & < & \alpha + 1 - \dfrac{1}{2} \\ & & < & \alpha + \gamma \\ & \Rightarrow |\gamma - \alpha - 1| & \leq & |\gamma + \alpha| = \gamma + \alpha. \end{array}$$

Daraus folgt nun

$$\begin{array}{rcl} |\lambda|^2 & = & \left| \dfrac{\gamma - \alpha - 1 + i\beta}{\gamma + \alpha + i\beta} \right|^2 \\ & = & \dfrac{(\gamma - \alpha - 1)^2 + \beta^2}{(\gamma + \alpha)^2 + \beta^2} \leq 1, \end{array}$$

und für $\langle RR^*v, v\rangle \neq 0$ gilt sogar

$$\alpha > -\frac{1}{2} \quad \text{und deshalb} \quad |\lambda| < 1. \tag{4.8}$$

Also ist der Spektralradius $\rho(B) < 1$, und das Iterationsverfahren konvergiert nach dem Banachschem Fixpunktsatz. □

### 4.1.3 Die optimale Wahl von $c_j$

Zurückkehrend zum nichtlinearen Fall sei $s = \frac{1}{c_j}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\|f^* - f_j\|^2 &= \|f^* - f_{j-1} + sR_j^* R_j f_{j-1}\|^2 \\
&= \|f^* - f_{j-1}\|^2 + s^2 \|R_j^* R_j f_{j-1}\|^2 + 2s\langle f^* - f_j, R_j^* R_j f_{j-1}\rangle \\
&= \|f^* - f_{j-1}\|^2 + s^2 \|R_j^* R_j f_{j-1}\|^2 + 2s\langle R_j(f^* - f_{j-1}), R_j f_{j-1}\rangle \\
&= \|f^* - f_{j-1}\|^2 + s^2 \|R_j^* R_j f_{j-1}\|^2 - 2s\langle R_j f_{j-1}, R_j f_{j-1}\rangle,
\end{aligned}
$$

da $R_j f^* = 0$. Differenziert man nun diese Gleichung nach $s$, um das Minimum zu finden, und setzt die Ableitung gleich Null, so erhält man als Bedingung

$$0 = \frac{d}{ds}\|f^* - f_j\|^2 = 2s\|R_j^* R_j f_{j-1}\|^2 - 2\|R_j f_{j-1}\|^2.$$

Die optimal Wahl von $c_j$ erfüllt also

$$\frac{1}{c_j} = \frac{\|R_j f_{j-1}\|^2}{\|R_j^* R_j f_{j-1}\|^2} \tag{4.9}$$

oder

$$
\begin{aligned}
c_j &= \frac{\|R_j^* R_j f_{j-1}\|^2}{\|R_j f_{j-1}\|^2} \\
&= \frac{\langle R_j R_j^* v, v\rangle}{\|v\|^2} \quad \text{mit } v = R_j f_{j-1}.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Da $\rho(R_j R_j^*) = \sup\limits_{v \neq 0} \frac{\langle R_j R_j^* v, v\rangle}{\|v\|^2}$, ist also zu hoffen, daß $v$ "geeignet" ist, so daß $c_j > \frac{1}{2}\rho(R_j R_j^*)$, und damit die Konvergenz im linearen Fall gewährleistet ist.

## 4.2 Anwendung auf die EIT

### 4.2.1 Die Fréchet-Ableitung

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ein beschränktes, hinreichend glattes Gebiet, $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ mit positiver unterer Schranke ($\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0 \,\forall\, x \in \Omega$) und $f_j \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Dann besitzt die Randwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \sigma \nabla u_j &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\
\sigma \frac{\partial u_j}{\partial \nu} &= f_j \quad \text{auf} \quad \partial\Omega
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

eine eindeutige (schwache) Lösung $u_j \in H^1(\Omega)$.

Da $\Omega$ ein beschränktes Gebiet ist, also für das Lebesguemaß $\lambda$ gilt: $\lambda(\Omega) < \infty$, ist $L^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ wegen $\|f\|_{L^2} \leq \sqrt{\lambda(\Omega)}\|f\|_{L^\infty}$. Seien nun $g_j \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ Meßwerte, die zu der angelegten Stromdichte $f_j$ gehören. Für allgemeine $\sigma$ (ohne positive untere Schranke) definiert man den Operator $R_j : L^2(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ durch

$$R_j(\sigma) = u_j|_{\partial\Omega} - g_j. \tag{4.12}$$

Da $u_j \in H^1(\Omega)$ ist, gilt $u_j|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\Omega)$ (siehe Anhang B). Für allgemeine $\sigma$ in $L^2(\Omega)$ geht natürlich die Eindeutigkeit in (4.11) verloren, aber darauf komme ich im nächsten Abschnitt zurück.

Um die Fréchet-Ableitung zu bilden, linearisiert man (4.11) und (4.12), indem man zunächst $u_j$ durch $u_j + w_j$ und $\sigma$ durch $\sigma + \eta$ ersetzt:

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla((\sigma+\eta)\nabla(u_j + w_j)) \\
&= \nabla(\sigma\nabla u_j) + \nabla(\eta\nabla u_j) + \nabla(\sigma\nabla w_j) + \nabla(\eta\nabla w_j) \\
\text{in } \Omega. & \\
f_j &= (\sigma+\eta)\frac{\partial(u_j + w_j)}{\partial\nu} \\
&= \sigma\frac{\partial u_j}{\partial\nu} + \eta\frac{\partial u_j}{\partial\nu} + \sigma\frac{\partial w_j}{\partial\nu} + \eta\frac{\partial w_j}{\partial\nu} \\
\text{auf } \partial\Omega. & \\
R_j(\sigma+\eta) &= (u_j + w_j)|_{\partial\Omega} - g_j \\
&= R_j(\sigma) + w_j|_{\partial\Omega}.
\end{aligned}$$

Benutzt man, daß $u_j$ (4.11) löst, und vernachlässigt man die Terme, in denen sowohl $w_j$, als auch $\eta$ auftauchen (dieses ist möglich, da sie von zweiter Ordnung sind), so erhält man die Fréchet-Ableitung

$$\begin{aligned}
\nabla(\sigma\nabla w_j) &= -\nabla(\eta\nabla u_j) \quad \text{in } \Omega, && (4.13)\\
\sigma\frac{\partial w_j}{\partial\nu} &= -\eta\frac{\partial u_j}{\partial\nu} \quad \text{auf } \partial\Omega, &&\\
R_j'(\sigma)\eta &= w_j|_{\partial\Omega}, && (4.14)
\end{aligned}$$

und für festes $\sigma$ ist die Richtungsableitung $R_j'(\sigma)$ ein Operator von $L^2(\Omega)$ nach $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Da $u_j$ bekannt ist und die Richtung $\eta$ vorgegeben ist, sind die rechten Seiten in (4.13) bekannt.

### 4.2.2 Der adjungierte Operator

**Satz 4.2.1** *Der zu $R_j'(\sigma)$ adjungierte Operator $R_j'(\sigma)^* : H^{-1/2}(\partial\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist gegeben durch*

$$(R_j'(\sigma))^* g = \nabla u_j \cdot \nabla z, \tag{4.15}$$

*wobei $z \in H^1(\Omega)$ die (eindeutige) Lösung von*

$$\begin{aligned} \nabla(\sigma \nabla z) &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ \sigma \frac{\partial z}{\partial \nu} &= -g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \quad g \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \end{aligned} \tag{4.16}$$

*und $u_j \in H^1(\Omega)$ die Lösung von (4.11) ist.*

**Beweis:** $\forall z, w \in C^2(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega (\nabla(\sigma\nabla w)z - w\nabla(\sigma\nabla z))\,dx = \int_{\partial\Omega} \sigma \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} z - w \frac{\partial z}{\partial \nu}\right) dS.$$

Durch Einsetzen von (4.14) und (4.16) erhält man

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \nabla(\eta\nabla u_j) z\,dx &= \int_{\partial\Omega} wg - \eta \frac{\partial u_j}{\partial \nu} z\,dS \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(R_j'(\sigma)\eta\right) g - \eta \frac{\partial u_j}{\partial \nu} z\,dS. \end{aligned}$$

Nach dem Gauß'schen Integralsatz gilt:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla(\eta\nabla u_j)z + \eta\nabla u_j \cdot \nabla z\,dx &= \int_\Omega \nabla \cdot (z\eta\nabla u_j)\,dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \eta \frac{\partial u_j}{\partial \nu} z\,dS \end{aligned}$$

und deshalb

$$\int_\Omega \eta \nabla u_j \cdot \nabla z\,dx = \int_{\partial\Omega} \left(R_j'(\sigma)\eta\right) g\,dS.$$

Da $C^2(\Omega)$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt und $H^{1/2}(\partial\Omega)$ bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\partial\Omega)}$ der Dualraum von $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ ist, gilt:

$$\langle \eta, \nabla u_j \cdot \nabla z\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle R_j'(\sigma)\eta, g\rangle_{L^2(\partial\Omega)},$$

also

$$(R_j'(\sigma))^* g = \nabla u_j \cdot \nabla z.$$

□

## 4.3 Zusammenfassung

In der Impedanz-Tomographie hat der $i$-te Schritt des Iterationsverfahrens folgende Gestalt:

- $\sigma_0 = \sigma^i$.
- Für $j = 1, \ldots, p$ und $\sigma_{j-1}$ fest löse

$$\begin{aligned}
&\nabla(\sigma_{j-1}\nabla u_j) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \sigma_{j-1}\frac{\partial u_j}{\partial \nu} = f_j \text{ auf } \partial\Omega, \\
&\nabla(\sigma_{j-1}\nabla z_j) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \sigma_{j-1}\frac{\partial u_j}{\partial \nu} = u_j - g_j \text{ auf } \partial\Omega, \\
&h_j = \frac{1}{c_j}\nabla u_j \cdot \nabla z_j, \\
&c_j = \frac{||h_j||^2_{L^2(\Omega)}}{||u_j - g_j||^2_{L^2(\partial\Omega)}}, \\
&\sigma_j = \sigma_{j-1} + \omega h_j,
\end{aligned}$$

  für ein "geeignetes" $\omega > 0$ (z.B. $\omega = 1$).
- $\sigma^{i+1} = \sigma_p$.

Wie im vorherigen Abschnitt schon erwähnt, benötigt man für Eindeutigkeit in (4.11), daß $\sigma_j \in L^2(\Omega)$ eine positive untere Schranke besitzt. In der Anwendung kann man sicherlich annehmen, daß für die gesuchte Leitfähigkeit $\sigma^*$ eine positive untere Schranke $\sigma_0^*$ bekannt ist. Den Startwert $\sigma^0$ wählt man so, daß er dieses auch erfüllt.

Im linearen Fall ist die einzige Bedingung an $\omega$, daß

$$\frac{c_j}{\omega} > \frac{1}{2}\rho(R_j R_j^*)$$

gilt. Deshalb kann man $\omega$ in jedem Schritt so klein wählen, daß z.B. immer noch

$$\sigma_j(x) > \frac{\sigma_0^*}{2}, \quad \forall\, x \in \Omega \quad \forall\, j = 1, \ldots, p,$$

erfüllt wird. Also ist die Positivität der $\sigma_j$ in jedem einzelnen Schritt garantiert. Damit sind (4.11) und (4.16) eindeutig (schwach) lösbar, da die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung streng elliptisch ist.

# Kapitel 5

# Numerische Experimente

Die Fähigkeiten des Algorithmus will ich anhand einiger Ergebnisse erläutern, die ich mit einem kleinen, selbstgeschriebenen Programm erzielt habe. Für einen Schritt des Algorithmus muß zweimal das von-Neumann-Problem

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma \nabla u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} &= f \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.1}$$

mit verschiedenen Randdaten $f$ für festes $\sigma$ gelöst werden. Dieses Problem löse ich numerisch mit finiten Differenzen und einem SOR-Iterationsverfahren. Als Grundgebiet sind sowohl $\Omega = (0,1)^2$ in euklidischen Koordinaten, als auch $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ in Polarkoordinaten implementiert.

## 5.1 Approximation der Differentialgleichung

Für $u \in C^4(\Omega)$ werden Ableitungen erster und zweiter Ordnung durch folgende Approximationen ersetzt:

$$\frac{u(x+h,y) - u(x-h,y)}{2h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi, y), \tag{5.2}$$

$$\frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{\xi}, y). \tag{5.3}$$

### 5.1.1 Der Fall $\Omega = (0,1)^2$

Die Differentialgleichung läßt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\nabla \sigma \cdot \nabla u + \sigma \Delta u = 0. \tag{5.4}$$

Legt man über $\Omega$ ein äquidistantes Gitter mit Schrittweite $h = 1/M$ und ersetzt nun die Ableitungen erster und zweiter Ordung durch (5.2) und (5.3), so erhält man:

$$\begin{aligned}16\sigma_{i,j}u_{i,j} &= (\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j} + 4\sigma_{i,j})u_{i+1,j} \\ &\quad +(\sigma_{i-1,j} - \sigma_{i+1,j} + 4\sigma_{i,j})u_{i-1,j} \\ &\quad +(\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j-1} + 4\sigma_{i,j})u_{i,j+1} \\ &\quad +(\sigma_{i,j-1} - \sigma_{i,j+1} + 4\sigma_{i,j})u_{i,j-1} \end{aligned} \tag{5.5}$$

mit einem lokalen Fehler $O(h^2)$. Für die Normalableitung auf $\partial\Omega$ gilt folgende Beziehung:

$$\sigma\frac{u(x+h\nu) - u(x-h\nu)}{2h} = \sigma\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + O(h^2) = f(x) + O(h^2). \tag{5.6}$$

Dadurch lassen sich die "Randterme" $u_{-1,j}$, $u_{M+1,j}$, $u_{i,-1}$ und $u_{i,M+1}$ bestimmen:

$$u_{-1,j} = \frac{2h}{\sigma_{0,j}}f(0, y_j) + u_{1,j}. \tag{5.7}$$

Die "Randterme" $\sigma_{-1,j}$, $\sigma_{M+1,j}$, $\sigma_{i,-1}$ und $\sigma_{i,M+1}$ werden durch lineare Interpolation ermittelt. Dieses ist gleichbedeutend mit Verwendung von Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzen anstatt zentrierter Differenzen:

$$\begin{aligned}\sigma_{M+1,j} &:= 2\sigma_{M,j} - \sigma_{M-1,j} \\ \Longrightarrow \sigma_{M+1,j} - \sigma_{M-1,j} &= 2\sigma_{M,j} - \sigma_{M-1,j} - \sigma_{M-1,j} \\ &= 2(\sigma_{M,j} - \sigma_{M-1,j}).\end{aligned}$$

Dadurch ist allerdings der lokale Fehler am Rand $O(h)$. Im Programm kann man die Interpolation leichter implementieren, indem man den Test, ob ein Parameterpaar auf dem Rand liegt, in einer externen Prozedur durchführt und sich so in der eigentlichen Prozedur nicht mehr um Randterme kümmern muß.

Im SOR-Verfahren habe ich $\omega = \dfrac{2}{1+\sin(\pi h)}$ gesetzt. Dieser Wert ist für das Dirichlet Problem und $\sigma \equiv 1$ optimal. Es gilt nämlich:

$$u_{i,j}^{(k,l)} = \sin(\pi hik)\sin(\pi hjl), \quad 1 \leq k, l < M,$$

ist Eigenvektor von

$$(Au)_{i,j} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}$$

zum Eigenwert $1 - \sin^2(\pi hk) - \sin^2(\pi hl)$. Da die $u^{(k,l)}$ linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis des $\mathbb{R}^{2(M-1)}$. Daraus folgt, daß $\rho(A) = \cos(\pi h)$. Die optimale Wahl von $\omega$ für dieses SOR-Verfahren lautet:

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(A)^2}} = \frac{2}{1+\sin(\pi h)}.$$

**Beweis:** Siehe Skript zu Cryer, Numerik Partieller Differentialgleichungen II. □

Da die tatsächlich verwendete Matrix $A(\sigma)$ diesem Problem sehr ähnlich ist, hoffe ich, damit eine bessere Konvergenzgeschwindigkeit zu erzielen.

### 5.1.2 Der Fall $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$

Für $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ führe ich zunächst Polarkoordinaten ein:

$$\begin{aligned} x(r,\phi) &= r\cos(\phi), \\ y(r,\phi) &= r\sin(\phi). \end{aligned}$$

In $(r,\phi)$-Koordinaten lautet (5.1):

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}\frac{\partial u}{\partial\phi} + \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right) = 0. \tag{5.8}$$

Für jede Funktion $v$ in Polarkoordinaten muß $v(0,\phi) = v(0,0)$, also konstant sein. Deshalb folgt für $r \to 0$ nach de l'Hôspital

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r}(0,\phi)\frac{\partial u}{\partial r}(0,\phi) + 2\sigma(0,\phi)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(0,\phi) = 0. \tag{5.9}$$

Die Ableitungen und Randterme werden wie oben approximiert. Hier habe ich für das SOR-Verfahren $\omega = \dfrac{2}{1+\sin(k)}$ gewählt, dabei entspricht $k$ der Gitterweite in Winkelrichtung. Dieses begründe ich wie oben, indem ich die Eigenfunktionen und Eigenwerte in Radiusrichtung vernachlässige.

### 5.1.3 Randdaten

Zunächst fällt auf, daß die Lösung $u$ von (5.1) linear von den Randdaten $f$ abhängt. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts werde ich im Gegensatz zum vorherigen Kapitel die Randwerte mit zwei Indizes $(k,l)$ numerieren. Mit $E$ bezeichne ich die Anzahl Elektroden auf $\partial\Omega$. Seien $(x_k, y_k)$ und $(x_l, y_l)$ Randgitterpunkte, fortlaufend numeriert, dann ist $f_{k,l}$ für $k \neq l$ gegeben durch

$$f_{k,l}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad (x,y) = (x_k,y_k) \in \partial\Omega, \\ -1 & \text{für} \quad (x,y) = (x_l,y_l) \in \partial\Omega, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier genügt es aus Symmetriegründen, daß $l \leq E/2$ ist ($E$ sei ohne Einschränkung gerade). Um effizient eine (exakte) Messung von Randdaten $g_{k,l} := u_{k,l}|_{\partial\Omega}$ zu simulieren, nutze ich die lineare Abhängigkeit der Lösungen von den Randdaten aus. Eine Basis des Raumes der $f_{k,l}$ sind die Funktionen $f_{k,k+1}$. Durch Addition kann man alle anderen Randdaten errechnen. Rauschen wird natürlich erst nach dieser Addition zu den $g_{k,l}$ hinzugefügt.

### 5.1.4 Meßfehler

Um Meßfehler zu simulieren, werden die Meßwerte $g_{k,l}$ mit dem Faktor

$$1 + p \cdot r_{k,l}(x)$$

multipliziert. Dabei sind die $r_{k,l}(x) \in [-1, 1]$ Zufallszahlen (für jedes $g_{k,l}$ für jeden Gitterpunkt $x$ unabhängig voneinander bestimmt), und $p \in [0, 1]$ gibt an, um wieviel die so erzeugten "fehlerhaften" Daten maximal von den korrekten Werten abweichen. Im weiteren Verlauf werde ich, falls $p > 0$ ist, p in Prozent Rauschen angeben.

### 5.1.5 Numerische Durchführung einer Berechnung

Die beiden von-Neumann-Probleme eines einzelnen Schrittes werden, wie oben beschrieben, berechnet. Das Skalarprodukt der Gradienten wird mit zentrierten Differenzen approximiert. Dabei nimmt man an, daß $\sigma$ auf dem Rand von $\Omega$ bekannt ist. So tauchen bei den zentrierten Differenzen auch keine undefinierten Randwerte auf.

## 5.2 Ergebnisse

### 5.2.1 Erste Ergebnisse

Zuerst beschäftige ich mich mit einem einfachen Problem (siehe Abb. 5.1). Hieran kann man gut erkennen, wie der Algorithmus arbeitet, und was er überhaupt leistet. Wie bei allen weiteren Experimenten hat die Leitfähigkeit $\sigma$ normalerweise den Wert Eins. Die Aufgabe besteht darin, eine Kreisscheibe zu indentifizieren, in der $\sigma$ den Wert 2 hat. Abbildung 5.1 wurde in Polarkoordinaten mit 16 Gitterpunkten in Radiusrichtung und 64 Gitterpunkten in Winkelrichtung erstellt. Das Verhältnis von viermal so vielen Gitterpunkten in Winkelrichtung erwies sich bei ersten Versuchen als besonders günstig, außerdem kann man so die Ergebnisse besser mit den Ergebnissen in orthographischen Koordinaten vergleichen:

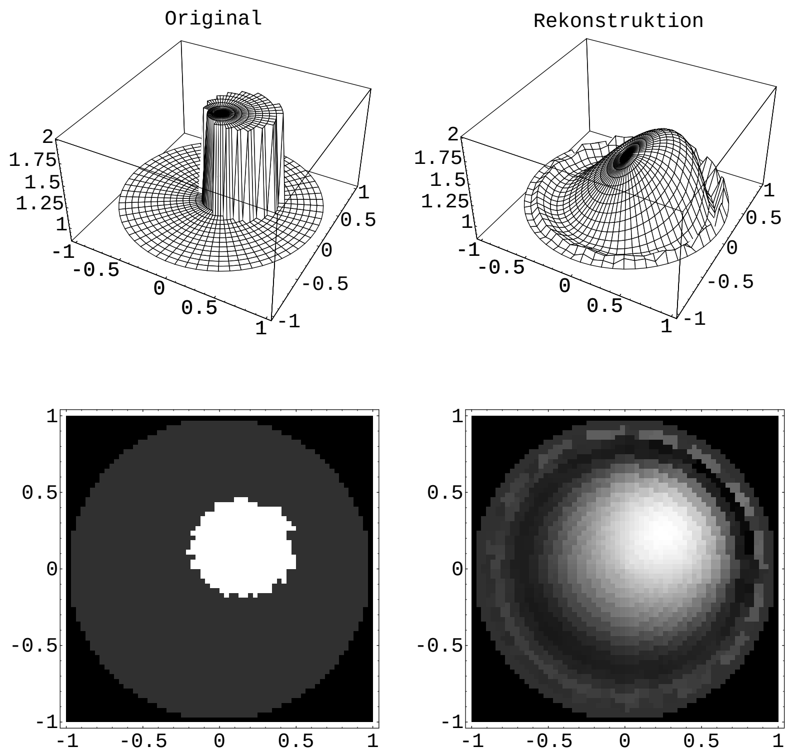


Abbildung 5.1: Kreis der Höhe 2 in einem Gebiet der Höhe 1

Bei gleicher Gesamtanzahl an Gitterpunkten bleibt so auch die Anzahl Gitterpunkte in horizontaler bzw. vertikaler Richtung über die Mitte hinweg konstant. Es wurde immer $\omega = 3$ gesetzt, was sich als der beste Kompromiß zwischen Konvergenzgeschwindigkeit und Stabilität erwies.

Man sieht deutlich, wie in der Approximation die Inhomogenität verschwimmt, besonders zur Mitte hin. Außerdem bildet sich am Rand ein kleiner "Graben", und die Spitze wandert leicht nach außen. Ferner zeigte sich, daß der Algorithmus nur so lange schnell konvergiert, bis die Approximation ungefähr die gleiche $l_2$-Norm wie das Original besitzt. Deshalb ist auch nicht verwunderlich, daß die Höhe der rekonstruierten Inhomogenität nur ungefähr 1,6 beträgt, da sie sich über ein viel größeres Gebiet verteilt. ($l_2$-Norm des Originals: 46.8188; $l_2$-Norm der Rekonstruktion: 42.0642) Dieser Effekt wird sich im weiteren besonders bei der Identifizierung von "kleinen" Objekten zeigen. Ein ähnliches Ergebnis erhält man in karthesischen Koordinaten im Quadrat mit einer rechteckigen Inhomogenität, in der $\sigma = 2$ gilt, mit einem 32x32 Gitter (Abb. 5.2).

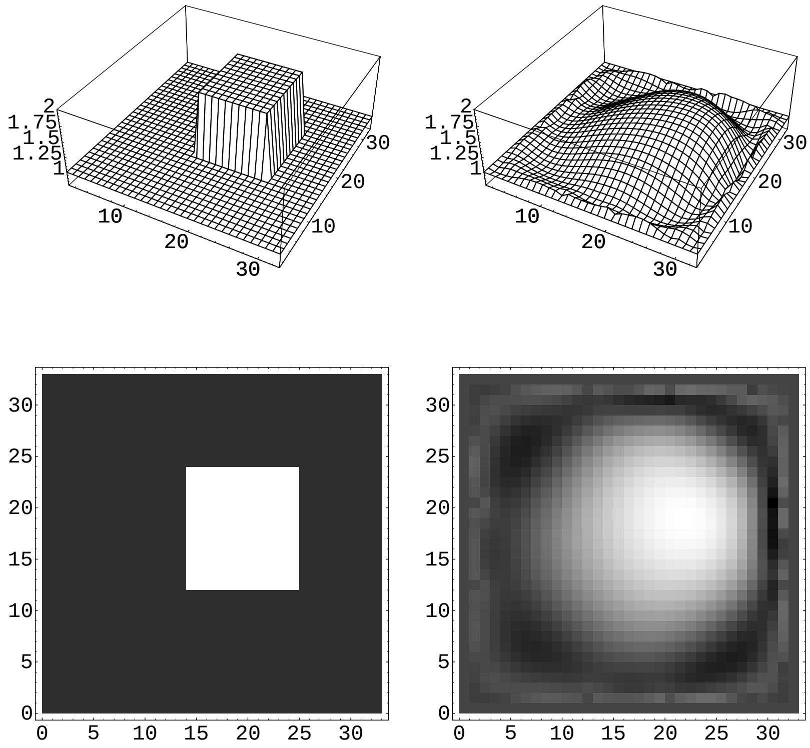


Abbildung 5.2: Rechteck der Höhe 2 in einem Gebiet der Höhe 1

### 5.2.2 Rauschen

Hier habe ich die gleichen Berechnungen wie oben durchgeführt, mit dem einzigen Unterschied, daß die simulierten Meßdaten mit 10 Prozent Rauschen versehen wurden (vergleiche Abschnitt 5.1.4). Das Ergebnis wird noch mehr verwischt, und die Artefakte am Rand nehmen deutlich zu. Trotzdem lassen sich noch qualitative Schlußfolgerungen aus der Grafik ziehen (siehe Abb. 5.3).

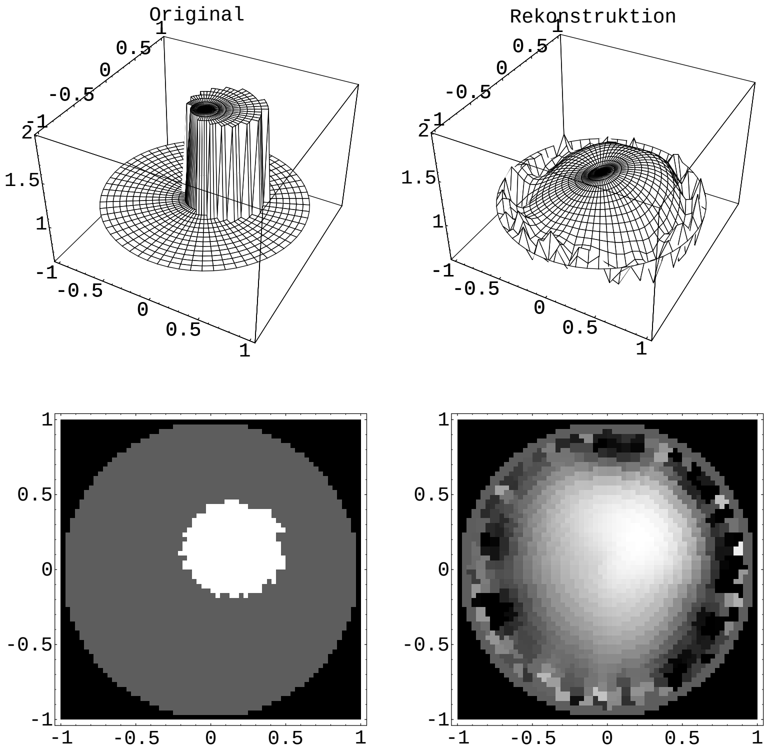


Abbildung 5.3: Wie oben mit 10 Prozent Rauschen

### 5.2.3 Trennung mehrerer Objekte

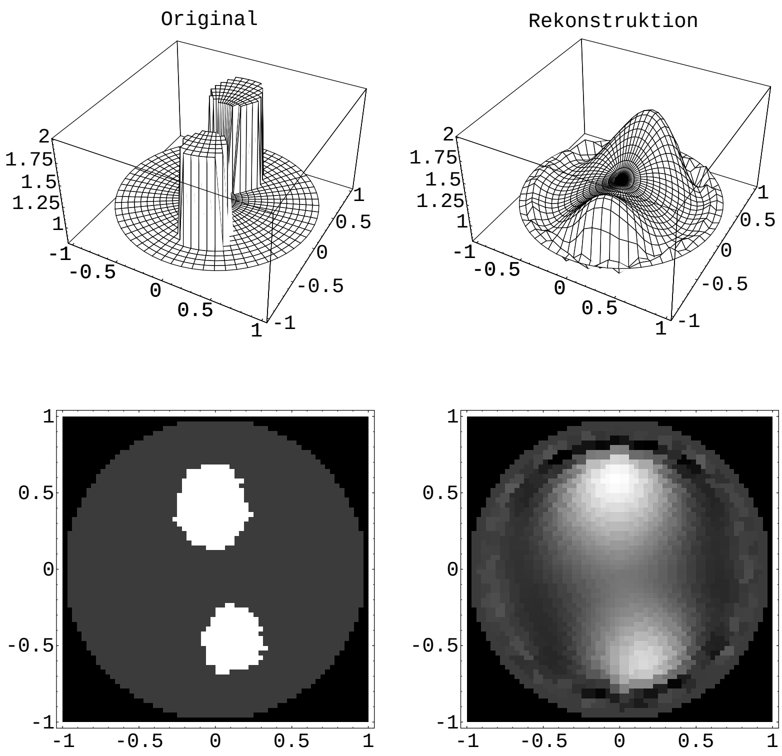


Abbildung 5.4: Zwei Kreise der Höhe 2, gleiches Gitter

Der Algorithmus trennt größere, gleichhohe Objekte mit einem relativ großen Abstand recht gut (Abb. 5.4 und Abb. 5.6). In Abbildung 5.5 sieht man den Einfluß von 10 Prozent Rauschen in den Anfangsdaten auf die Rekonstruktion. Problematisch werden erst Objekte verschiedener Größe. Abbildung 5.7 zeigt, wie ein niedriges Objekt (Höhe 1,5) im "Schatten" eines hohen Objekts (Höhe 3,0) verschwindet. Das Objekt der Höhe 2,5 wird recht gut rekonstruiert, während das Objekt der Höhe 2 nur noch gerade eben getrennt werden kann.

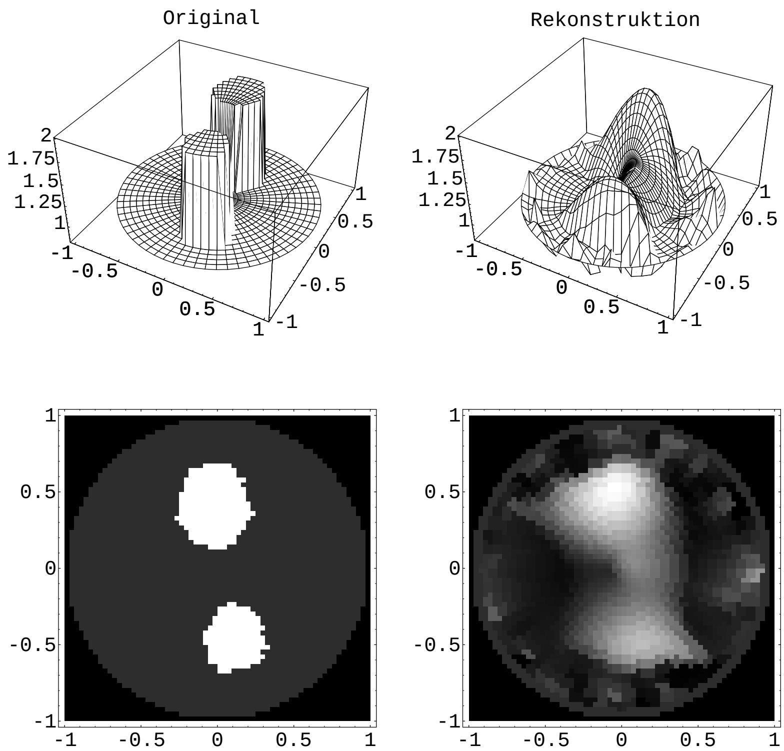


Abbildung 5.5: Das gleiche mit 10 Prozent Rauschen

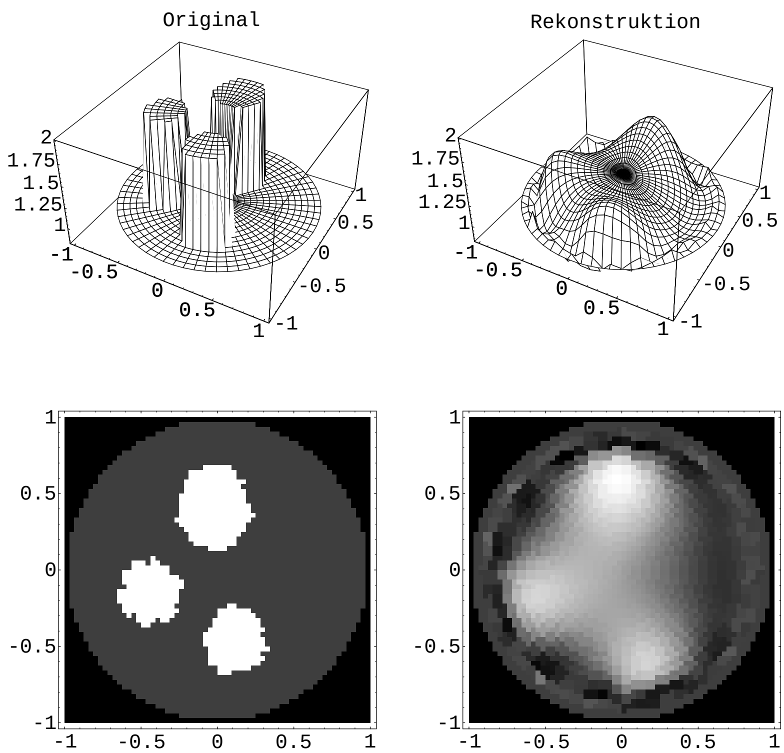


Abbildung 5.6: 3 Objekte der Höhe 2

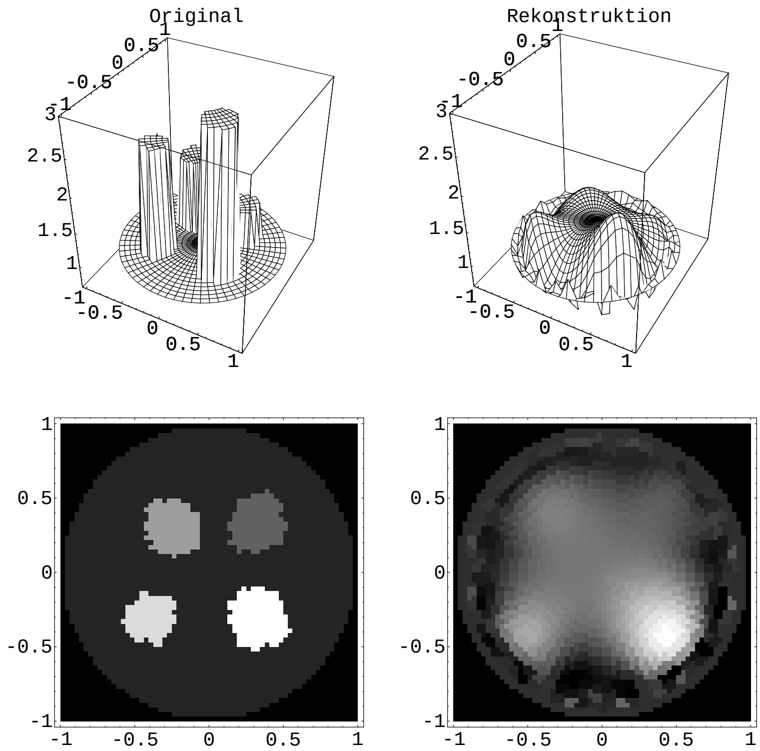


Abbildung 5.7: Vier Objekte mit Höhen 1,5 bis 3,0 auf einem Gebiet mit Höhe 1

### 5.2.4 Kleine Objekte

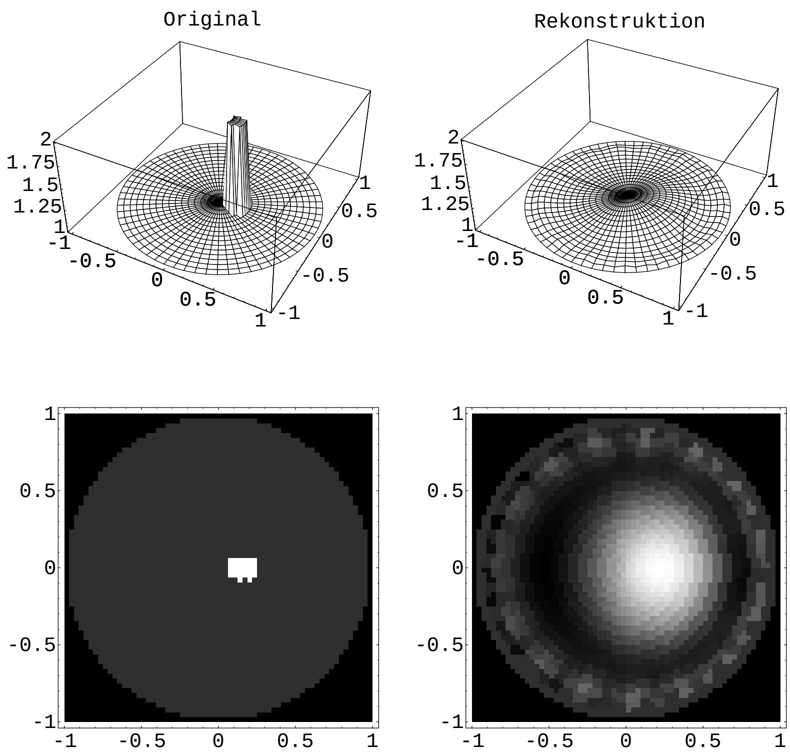


Abbildung 5.8: Ein kleiner Kreis der Höhe 2

Das Problem bei kleinen Inhomogenitäten ist, daß der Algorithmus zwar das Objekt findet, aber die ermittelte Höhe ist so gering, daß das Ergebnis im Rauschen untergeht. Das Ergebnis in Abbildung 5.8 stimmt mit der Beobachtung überein, daß der Algorithmus nur solange konvergiert, bis die Rekonstruktion ungefähr die gleiche $l_2$-Norm wie das Original hat ($l_2$-Norm des Originals: 34.322; $l_2$-Norm der Rekonstruktion: 33.783). Dieses ist auch nicht weiter verwunderlich, da der Algorithmus die kleinste-Quadrate-Lösung von (4.12) approximieren soll. Allerdings verschwinden so kleine Inhomogenitäten im Rauschen, wie Abbildung 5.9 zeigt.

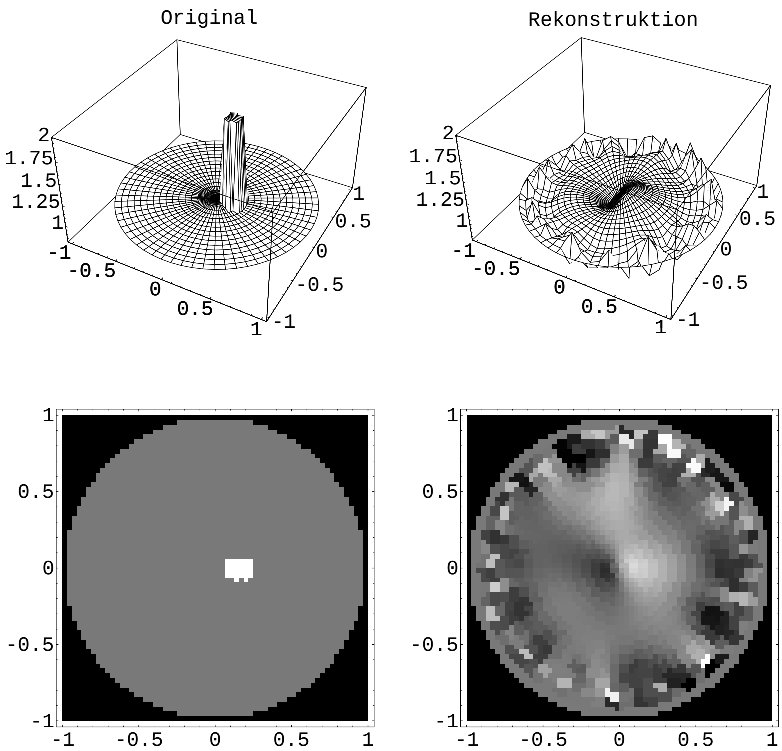


Abbildung 5.9: Ein kleiner Kreis der Höhe 2 bei 5 Prozent Rauschen

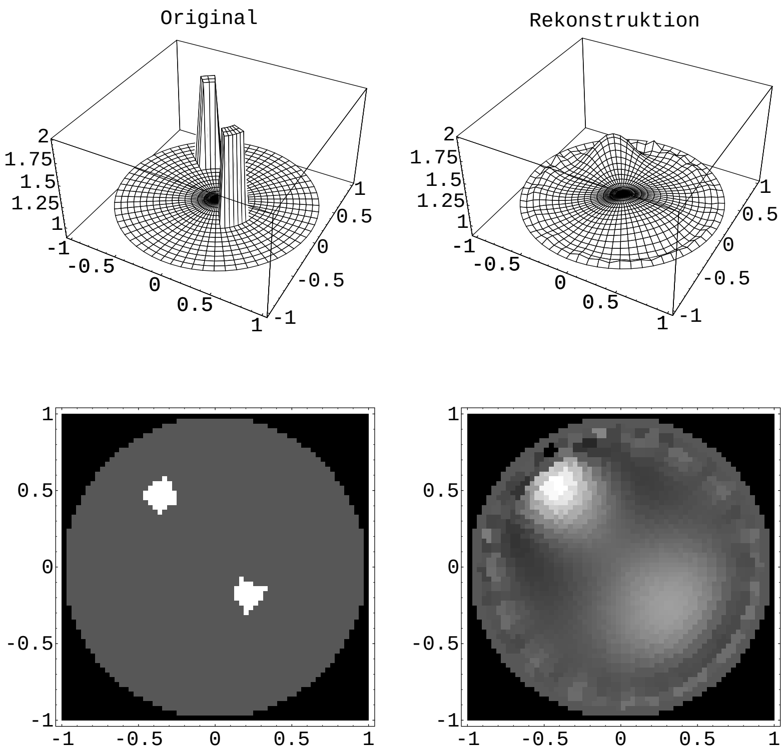


Abbildung 5.10: Zwei kleine Kreise der Höhe 2

### 5.2.5 Objekte geringer Höhe

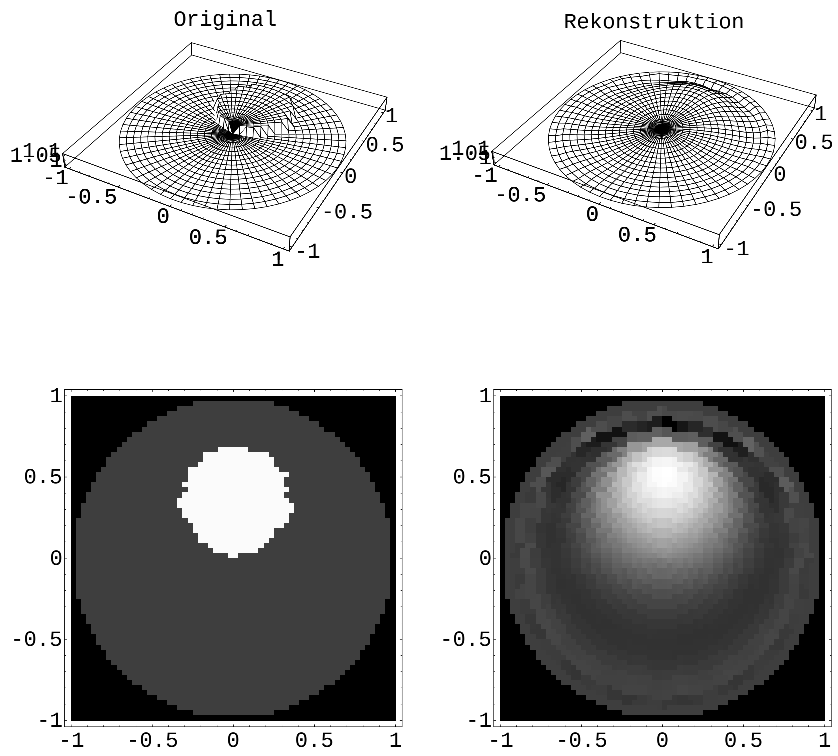


Abbildung 5.11: Ein Kreis der Höhe 1.1

Bei Objekten geringer Höhe taucht prinzipiell das gleiche Problem wie bei kleinen Objekten auf (In Abbildung 5.11: $l_2$-Norm des Originals: 33.6248; $l_2$-Norm der Rekonstruktion: 33.6743).

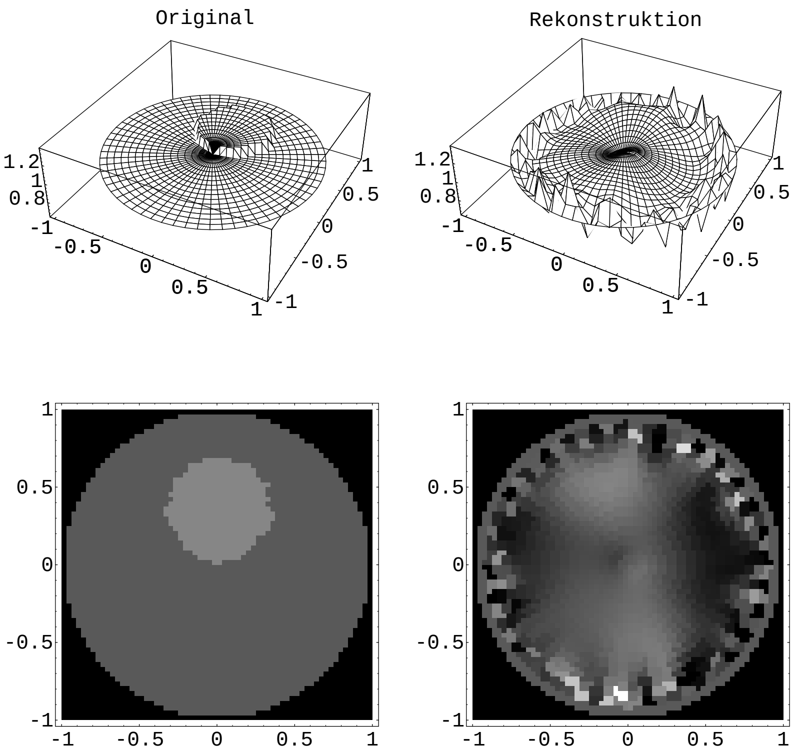


Abbildung 5.12: Ein Kreis der Höhe 1.1 bei 5 Prozent Rauschen

### 5.2.6 Geschwindigkeit

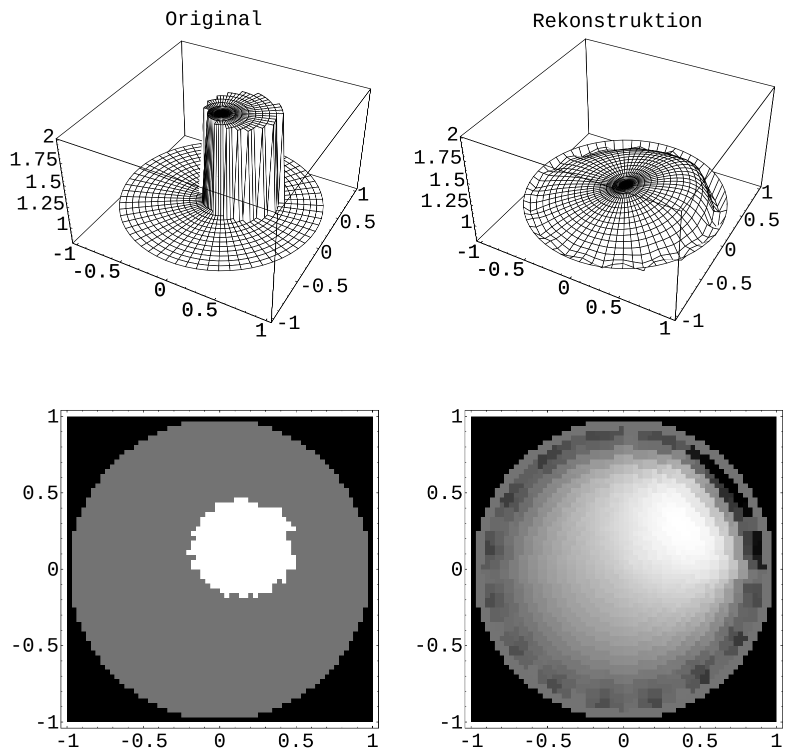


Abbildung 5.13: Wie Abb. 5.1, aber nur ein Durchlauf

Abbildung 5.13 zeigt die Rekonstruktion des gleichen Objekts wie in Abbildung 5.1, aber mit nur einem statt 20 Durchläufen. ($l_2$-Norm des Originals: 46.8188; $l_2$-Norm der Rekonstruktion: 43.4529) Ein Durchlauf benötigt bei 250 Iterationen pro von-Neumann-Problem ungefähr 46 Sekunden Systemzeit auf einer SUN SPARCstation 20 (arminius). Abb. 5.14 zeigt das gleiche Problem, rekonstruiert mit 100 Durchläufen. Es gibt zwar noch eine quantitative, aber keine qualitative Verbesserung.

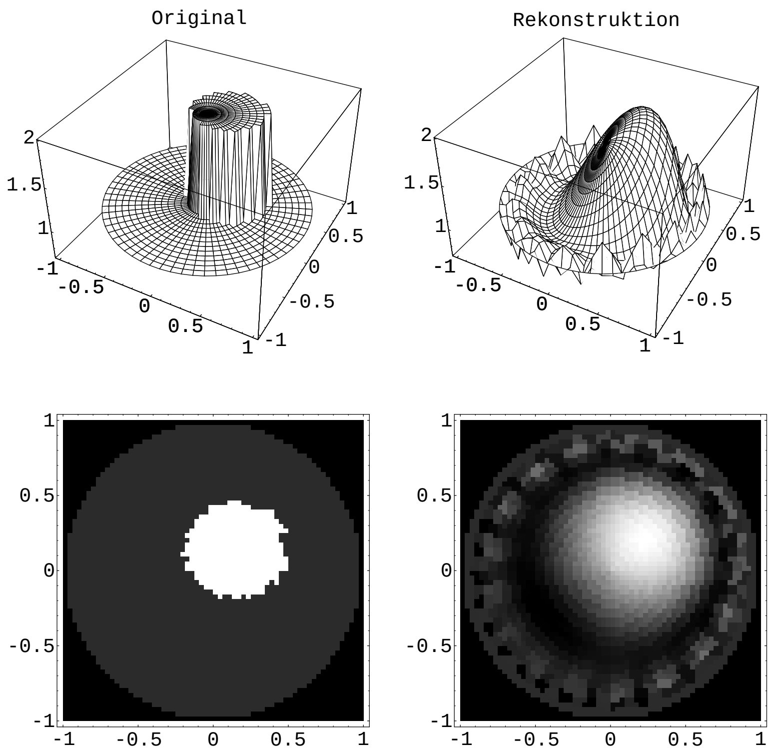


Abbildung 5.14: Wie Abb. 5.1, aber 100 Durchläufe

# Anhang A

# Das C-Programm

### Die X-Oberfläche

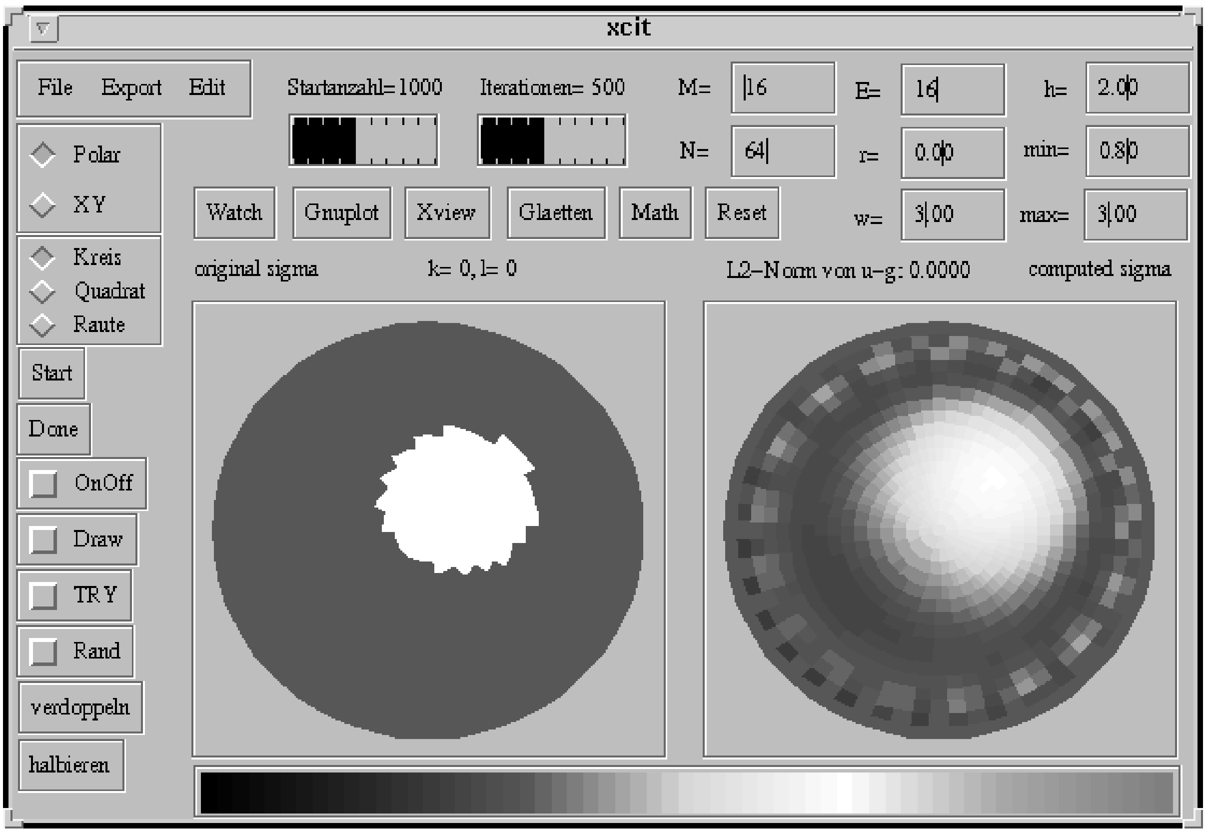


Abbildung A.1: Screendump

Zum Ausprobieren und interaktiven Verändern der vielen Parameter habe ich eine kleine X-Oberfläche für mein Programm geschrieben. So kann man dem Algorithmus direkt bei der Arbeit zuschauen. Dies war vor allem bei der Erkennung und Beseitigung von Fehlern nützlich. Außerdem konnte ich nur so sehen, welche Werte von $\omega$ noch sinnvoll sind.

### Teile des Quellcodes

Auszüge aus der Datei `citlib.c`.

```
extern float rauschen, Mult;

extern void checkAndProcess();
extern int RAND, CJSW, TRY, POLAR, Anzahl, dAnz, M, N, E;
extern float u[E_MAX][E2_MAX][I][J], f[E_MAX][E2_MAX][JJ];
extern float v[E_MAX][E2_MAX][I][J], g[E_MAX][E2_MAX][JJ];
extern float s_org[I][J], sigma[I][J], n_u_g, Cj, min_sigma, max_sigma;
extern char coordChoiceText[2][6];

inline float rauschFaktor() {
  return 1.+rauschen*(2.*drand48()-1.);
}

inline int phi( int j, int M ) {
  if ((j>=0)&&(j<M))
        return j;
  if (j<0)
        return M-1;
  else
        return 0;
}


void lift_polar( float u[I][J], int M, int N ) {
  int i, j;
  float h=0;

  for (j=0; j<N; j++)
    h+=u[M][j];
  h/=N;
  for (i=0; i<=M; i++) for (j=0; j<N; j++)
    u[i][j]-=h;
}

void neumann_polar( float u[I][J], float f[JJ], float sigma[I][J], int M, int N, int anz ){
  int i, j, k, jj=0, NN=N/2;
  float tmp=N*N/(4*M_PI*M_PI), tmp2, delta=eps+1, max_u_r;
  float srp[I][J], srm[I][J], sphip[I][J], sphim[I][J];
  float w=2./(1.+sin(M_PI/N));

  for (j=0; j<N; j++) {
        tmp2=8.0*(M*M+tmp)*sigma[M][j];
        srp[M][j]=(M*M*2*(sigma[M][j]-sigma[M-1][j])+(4.*M*M+2.*M)*sigma[M][j])
          /tmp2;
        srm[M][j]=(M*M*2*(sigma[M-1][j]-sigma[M][j])+(4.*M*M-2.*M)*sigma[M][j])
          /tmp2;
        sphip[M][j]=tmp*(sigma[M][phi(j+1,N)]-sigma[M][phi(j-1,N)]+4.*sigma[M][j])
          /tmp2;
        sphim[M][j]=tmp*(sigma[M][phi(j-1,N)]-sigma[M][phi(j+1,N)]+4.*sigma[M][j])
          /tmp2;
  }
  for (i=1; i<M; i++) for (j=0; j<N; j++) {
```

```
      tmp2=8.0*(i*i+tmp)*sigma[i][j];
      srp[i][j]=(i*i*(sigma[i+1][j]-sigma[i-1][j])+(4.*i*i+2.*i)*sigma[i][j])
        /tmp2;
      srm[i][j]=(i*i*(sigma[i-1][j]-sigma[i+1][j])+(4.*i*i-2.*i)*sigma[i][j])
        /tmp2;
      sphip[i][j]=tmp*(sigma[i][phi(j+1,N)]-sigma[i][phi(j-1,N)]+4.*sigma[i][j])
        /tmp2;
      sphim[i][j]=tmp*(sigma[i][phi(j-1,N)]-sigma[i][phi(j+1,N)]+4.*sigma[i][j])
        /tmp2;
  }
  for (k=0; k<anz; k++) {
    delta=0.0;
    max_u_r=0.0;
    for (j=0; j<N; j++)
      u[M][j]+=w*(srp[M][j]*(2*f[j]/(sigma[M][j]*M)+u[M-1][j])
                            +srm[M][j]*u[M-1][j]
                            +sphip[M][j]*u[M][phi(j+1,N)]+sphim[M][j]*u[M][phi(j-1,N)]
                            -u[M][j]);
    for (i=M-1; i>0; i--) {
      u[i][0]+=w*(srp[i][0]*u[i+1][0]+srm[i][0]*u[i-1][0]
                            +sphip[i][0]*u[i][1]+sphim[i][0]*u[i][N-1]
                            -u[i][0]);
      for (j=1; j<N-1; j++)
              u[i][j]+=w*(srp[i][j]*u[i+1][j]+srm[i][j]*u[i-1][j]
                                  +sphip[i][j]*u[i][j+1]+sphim[i][j]*u[i][j-1]
                                  -u[i][j]);
      j=N-1;
      u[i][j]+=w*(srp[i][j]*u[i+1][j]+srm[i][j]*u[i-1][j]
                            +sphip[i][j]*u[i][0]+sphim[i][j]*u[i][N-2]
                            -u[i][j]);
    }

    /* Mitte */


    u[0][0]+=w*( ( (sigma[1][jj]-sigma[1][jj+NN]+8.*sigma[0][0])*u[1][jj]
                   +(sigma[1][jj+NN]-sigma[1][jj]+8.*sigma[0][0])*u[1][jj+NN])
                 /(16.*sigma[0][0])-u[0][0]);
    for (j=1; j<N; j++)
      u[0][j]=u[0][0];
    jj++;
    if (jj>=NN)
      jj=0;
    /*
      u[0][0]=u[1][0];
      for (j=1; j<N; j++)
      u[0][0]+=u[1][j];
      u[0][0]/=N;
      for (j=1; j<N; j++)
      u[0][j]=u[0][0];
      */
  }
  lift_polar(u,M,N);
}

void cit_start_polar() {
  int i, j, l=1;
  float n;
  int k, ll, E2=E/2;

  n=((float)N)/E;
  for (k=0; k<E; k++) {
    ll=k+1;
    if (ll>=E)
      ll-=E;
```

```
    for (j=0; j<N; j++)
      f[k][1][j]=0;
    f[k][1][(int)(n*k)]=1.;
    f[k][1][(int)(n*ll)]=-1.;
    for (i=0; i<=M; i++) for (j=0; j<N; j++)
      u[k][1][i][j]=v[k][1][i][j]=0.;
    neumann_polar(u[k][1],f[k][1],s_org,M,N,Anzahl);
    for (j=0; j<N; j++)
      g[k][1][j]=u[k][1][M][j];
  }
  for (k=0; k<E; k++) for (l=1; l<E2; l++) {
    ll=l+1;
    for (j=0; j<N; j++) {
      f[k][ll][j]=f[k][1][j]+f[k+1][l][j];
      g[k][ll][j]=g[k][1][j]+g[k+1][l][j];
    }
    for (i=0; i<=M; i++) for (j=0; j<N; j++) {
      u[k][ll][i][j]=u[k][1][i][j]+u[k+1][l][i][j];
      v[k][ll][i][j]=0.;
    }
  }
  for (k=0; k<E; k++) for (l=1; l<=E2; l++) for (j=0; j<N; j++)
    g[k][l][j]*=rauschFaktor();
}

void cit_turn_polar( int k, int l ) {
  int i, j;
  float M2=M*M, N2=N*N, Pi4_2=4*M_PI*M_PI, tmp, c;
  float gg[JJ], h[I][J], ng2, nh2;

  neumann_polar(u[k][l],f[k][l],sigma,M,N,dAnz);
  checkAndProcess();
  ng2=0;
  for (j=0; j<N; j++) {
        gg[j]=u[k][l][M][j]-g[k][l][j];
        ng2+=gg[j]*gg[j];
  }
  n_u_g=sqrt(ng2);
  if (ng2>0) {
    neumann_polar(v[k][l],gg,sigma,M,N,dAnz);
    checkAndProcess();
    nh2=0;
    for (j=0; j<N; j++) {
      h[M][j]=f[k][l][j]*gg[j]
              +0.25*N2/Pi4_2*(u[k][l][M][phi(j+1,N)]-u[k][l][M][phi(j-1,N)])
                *(v[k][l][M][phi(j+1,N)]-v[k][l][M][phi(j-1,N)]);
      nh2+=h[M][j]*h[M][j];
    }
    for (i=1; i<M; i++) for (j=0; j<N; j++) {
      h[i][j]=0.25*M2*( (u[k][l][i+1][j]-u[k][l][i-1][j])
                                        *(v[k][l][i+1][j]-v[k][l][i-1][j])
                                        +N2/(Pi4_2*i*i)*(u[k][l][i][phi(j+1,N)]-u[k][l][i][phi(j-1,N)])
                                        *(v[k][l][i][phi(j+1,N)]-v[k][l][i][phi(j-1,N)]));
      nh2+=h[i][j]*h[i][j];
    }
    c=Mult*M*ng2/nh2;
    if (RAND)
      for (j=0; j<N; j++) {
              sigma[M][j]+=c*h[M][j];
              if (sigma[M][j]<min_sigma)
                sigma[M][j]=min_sigma;
      }
    for (i=1; i<M; i++) for (j=0; j<N; j++) {
      sigma[i][j]+=c*h[i][j];
      if (sigma[i][j]<min_sigma)
```

```
        sigma[i][j]=min_sigma;
      if (sigma[i][j]>max_sigma)
        sigma[i][j]=max_sigma;
    }
    tmp=sigma[1][0];
    for (j=1; j<N; j++)
      tmp+=sigma[1][j];
    sigma[0][0]=tmp/N;
    for (j=1; j<N; j++)
      sigma[0][j]=sigma[0][0];
  }
}
```

# Anhang B

# Mathematische Grundlagen

**Definition B.1 (Topologische Räume)** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ ein Gebiet.*

- $C^k(\Omega)$ *ist der Raum aller $k$-mal stetig differenzierbaren Funktionen* $f : \Omega \to \mathbb{C}$.
- $C_0^\infty(\Omega)$ *ist der Raum aller unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in* $\Omega$.
- $\mathcal{D}(\Omega)$ *ist der Raum* $C_0^\infty(\Omega)$ *versehen mit folgendem Konvergenzbegriff (Topologie): Eine Funktionenfolge* $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ *in* $\mathcal{D}(\Omega)$ *konvergiert genau dann gegen Null, wenn*
  - $\exists\, K \subset \Omega$ *kompakt, d.d. supp*$(\phi_n) \subset K \;\forall n$
  - $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_d}} \phi_n$ *konvergiert gleichmäßig gegen Null* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$.
- $\mathcal{D}'(\Omega)$ *ist der Dualraum von* $\mathcal{D}(\Omega)$*, d.h. der Raum aller stetigen linearen Funktionale* $l : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$*. Man nennt $l$ Distribution.*
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *ist der Schwartzsche Raum der schnell fallenden $C^\infty$-Funktionen.* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *bezeichnet den zugehörigen Dualraum.*
- $L^2(\Omega)$ *ist der Raum aller Funktionen* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *mit*

  $$\|f\|_{L^2(\Omega)} := \left( \int_\Omega |f|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty.$$

  *Versehen mit dem Skalarprodukt*

  $$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f \overline{g} \, dx$$

  *ist* $L^2(\Omega)$ *ein Hilbertraum.*

**Definition B.2 (Fouriertransformation)** *Die Fouriertransformation $\hat{f}$ einer Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist gegeben durch*

$$\hat{f}(k) := \mathcal{F}f(k) := (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot k} f(x)\, dx.$$

*Die inverse Fouriertransformation lautet*

$$\tilde{f}(k) := \mathcal{F}^{-1}f(k) := (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot k} f(x)\, dx.$$

**Satz B.3** *Da $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ der Dualraum von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist, läßt sich die Fouriertransformation auch in diesem Raum erklären. Der zu $\mathcal{F}$ duale Operator ist wieder $\mathcal{F}$ selber. Sei nun $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ein lineares Funktional, dann ist $\mathcal{F}T$ gegeben durch*

$$\langle \mathcal{F}T, \phi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\phi\rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

**Beweis:** Siehe Rauch [R2], Satz 2.4.5. □

**Korollar B.4** *Wegen $L^2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ist die Fouriertransformation auch hier erklärt: Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, dann ist $\mathcal{F}f$ gegeben durch*

$$\mathcal{F}f(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|<R} e^{-ikx} f(x)\, dx.$$

*Hier ist Konvergenz im Sinne von $L^2$ gemeint.*

**Bemerkung B.5** *Es gibt keine einheitliche Position der Vorfaktoren $(2\pi)^{-d/2}$ in der Fouriertransformation.*

**Definition B.6 (Sobolevräume)** *Der Sobolevraum $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ ist definiert als Vervollständigung von $C^k(\Omega)$ versehen mit der Norm*

$$||f||^2_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} ||D^\alpha f||^2_{L^2(\Omega)}.$$

**Satz B.7 (Plancherel)** *Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt:*

$$||\mathcal{F}f||_{L^2(\Omega)} = ||f||_{L^2(\Omega)}.$$

**Definition B.8 (Sobolevräume gebrochener Ordnung)** *Für $s \in \mathbb{R}$ ist $H^s(\mathbb{R}^d)$ der Raum aller Distributionen $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ mit*

$$\|f\|_s := \left( \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1+|k|^2)^s |\mathcal{F}f(k)|^2 \, dk \right)^{1/2} < \infty.$$

**Bemerkung B.9** *Aus dem Satz von Plancherel folgt, daß beide Definitionen von $H^k$ für $k \in \mathbb{N}$ übereinstimmen.*

**Bemerkung B.10** *Versehen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle_{H^s} := \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1+|k|^2)^s \hat{f}(k) \bar{\hat{g}}(k) \, dk$$

*ist $H^s$ ein Hilbertraum. Aber mit dem $L^2$-Skalarprodukt ist $H^{-s}$ der Dualraum von $H^s$.*

**Satz B.11 (Randwerte)** *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $C^m$-Rand und $f \in H^s(\Omega)$ gilt:*

$$D^\alpha f|_{\partial\Omega} \in H^{s-|\alpha|-1/2}(\partial\Omega) \text{ für } |\alpha| < m.$$

**Beweis:** Siehe Adams [A]. □

**Satz B.12 (Gauß'scher Integralsatz)** *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein hinreichend glattes beschränktes Gebiet und $F$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega} \nabla \cdot F \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS.$$

*Dabei bezeichnet $\nu$ die äußere Normale an $\Omega$ und $dS$ das übliche Oberflächenmaß.*

**Beweis:** Siehe Forster, Analysis 3, Satz 15.3. □

**Korollar B.13** *Seien $u, v \in C^2(\Omega)$ und $\sigma \in C^1(\Omega)$. Dann folgt aus dem Gauß'schen Integralsatz*

$$a_\sigma(u,v) := \int\limits_{\Omega} v \nabla \cdot \sigma \nabla u \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} v \sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \int\limits_{\Omega} \sigma \nabla v \cdot \nabla u \, dx.$$

*Deshalb läßt sich $a_\sigma(u,v)$ auf $H^1(\Omega)$ fortsetzen mit $\sigma \in L^\infty(\Omega)$.*

# Literaturverzeichnis

[A] Robert A. Adams
*Sobolev Spaces*
Academic Press, New York San Fransisco London 1975

[B-K] H.T. Banks, K. Kunisch
*Estimations Techniques for Distributed Parameter Systems*
Birkhäuser Boston, 1989

[B-B] D.C. Barber, B.H. Brown
*Applied potential tomography*
J.Phys.E.Sci.Instrum., Vol.17, 1984

[B-C-T] Carlos A. Berenstein, Enrico Casadio Tarabusi
*Inversion Formulas for the k-Dimensional Radon Transformation in Real Hyperbolic Spaces*
to appear in Duke Math. J.

[B1] Gregory Beylkin
*The Inversion Problem and Applications of the Generalized Radon Transform*
Cumm.Pure Appl.Math. 37 (1984), pp 579-599

[B2] William Breckon
*A Preliminary Report on the Reconstruction Problem*
Januar 1986

[B3] Krut Bryan
*Numerical recovery of certain discontinuous electrical conductivities*
Inverse Problems 7 (1991), pp 827-840

[C-I] Margaret Cheney, David Isaacson, Eli L. Isaacson
*Exact solutions to a linearized inverse boundary value problem*
Inverse Problems 6 (1990), pp 923-934

[C] Edward B. Curtis, James A. Morrow
*Determining the resistors in a network*
SIAM J.Appl.Math. Vol.50,3 (1990), pp 918-941

[F-J-R] E.B. Fabes, M. Jodeit, N.M. Rivière,
*Potential techniques for boundary value problems on $C^1$-domains*
Acta Math. 141 (1978), pp 165-186

[G] Semion Gutman
*Alternating directions method for impedance computed tomography*
Inverse Problems 5 (1989), pp 1027-1047

[K-M] Robert V. Kohn und Alan McKenny
*Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography*
Inverse Problems 6 (1990), pp 389-414

[K-V1] Robert Kohn, Michael Vogelius
*Determining Conductivity by Boundary Measurements*
Comm.Pure Appl.Math. 37 (1984), pp 289-298

[K-V2] Robert Kohn, Michael Vogelius
*Determining Conductivity by Boundary Measurements II. Interior Results*
Comm.Pure Appl.Math. 38 (1985), pp 643-667

[L] A.K. Louis
*Medical imaging: state of the art and future development*
Inverse Problems 8 (1992), pp 709-738

[M-G] Stephen McCormick, J. Gordon
*Multigrid solution of a linearized, regularized least-squares problem in electrical impedance tomography*
Inverse Problems 9 (1993), pp 637-713

[N] Adrian I. Nachman
*Reconstructions from boundary measurements*
Annals of Math. 128 (1988), pp 513-576

[FN1] Frank Natterer
*A constructive solution to the inverse scattering problem of the wave equation at one frequency and plane wave irradiation*
August 1989

[FN2] Frank Natterer
*Numerical Solution of Bilinear Inverse Problems*
Juli 1995

[N-G-I] J.C. Newell, David G. Gisser, David Isaacson
*An Electrical Current Tomograph*
IEEE Transactions on biomedical engineering, Vol.35, No.10, 1988

[P] Kevin Paulson, William Breckon, Michael Pidock
*Electrode Modelling in Electrical Impedance Tomography*

[R1] A.G. Ramm
*Recovery of the potential from fixed-energy scattering data*
Inverse Problems 4 (1988), pp 877-996

[R2] Jeffrey Rauch
*Partial Differential Equations*
Springer-Verlag, 1991

[S] Fadil Santosa und Michael Vogelius
*A backprojection algorithm for electrical impedance imaging*
SIAM Journal of Applied Mathematics 50 (1990), pp 216-243

[S-C-I-I] Erkki Somersalo, Margaret Cheney, David Isaacson, Eli Isaacson
*Layer stripping: a direct numerical method for impedance imaging*
Inverse Problems 7 (1991), pp 899-926

[S-U] John Sylvester, Gunther Uhlmann
*A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*
Annals of Mathematics 125 (1987), pp 153-169

[Y] Thomas J. Yorkey, John G. Webster, Willis J. Tompkins
*Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography*
IEEE Transactions on biomedical engineering, Vol.34, No.11, 1987

Hiermit versichere ich, diese Diplomarbeit eigenständig und ohne unzulässige Hilfsmittel erstellt zu haben.