

# Praktische Einführung in die Numerik für Lehramtskandidaten

Frank Wübbeling

17. Juni 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>8 Numerische Berechnung von Eigenwerten</b>	<b>3</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>12</b>

# Kapitel 8

## Numerische Berechnung von Eigenwerten

Die Berechnung der Eigenwerte einer Matrix spielt in der Numerik eine große Rolle, z.B.

1. Bestimmung optimaler Iterationsparameter (max. Eigenwert einer hermiteschen Matrix).
2. Bestimmung der Kondition einer Matrix (wie oben, zusätzlich Bestimmung des kleinsten Eigenwerts).
3. Bestimmung von Eigenschwingungen einer Brücke. Dies lässt sich (stark vereinfacht) so erklären: Eine Brücke reagiere auf eine Belastung  $L$  von außen mit einer Stressverteilung  $p = AL$ . Falls  $L$  ein Eigenvektor zu einem Eigenwert von  $A$  größer als 1 ist, so wird die wirkende Belastung durch die Brücke nicht verteilt (als Gegendruck), sondern sogar noch verstärkt. Die Belastung kann sich also immer weiter aufbauen.

In der Matlab-Demo truss lässt sich das an einem sehr einfachen zweidimensionalen Beispiel beobachten. Insbesondere sieht man, dass für höhere Moden (kleinere Eigenwerte) die Eigenschwingungen eine komplexe Struktur zeigen. Eine genauere Analyse dieses Beispiels finden Sie in Hanke-Bourgeois [2006], Kapitel V.22.

Diese Untersuchung ist keineswegs akademisch. Immer wieder gern zitiertes Standardbeispiel ist die Tacoma Narrows Bridge, bei der eine (gar nicht so große) kontinuierliche Windanregung in der falschen Frequenz zu großen Auslenkungen und letztlich zur Zerstörung der Brücke führte. Der Film zeigt, dass die Brücke keineswegs nur einfach schwingt, sondern zusätzlich eine Torsionsstruktur hat (wie wir sie nach der Matlab-Analyse erwarten würden). Eine mehrmals überarbeitete mathematische Untersuchung dieser Zerstörung finden Sie unter anderem in McKenna [1999].

Aus diesem Grund sind Eigenwertanalysen in der Statik unerlässlich. Die Tatsache, dass es nur wenige Beispiele für solche Komplettzerstörungen gibt, zeigt, dass dieses Problem gelöst ist (und andererseits dieses Phänomen nur recht selten auftritt).

4. Google–PageRank–Matrix. Hier wird gegeben eine große Zahl von Webseiten (mind.  $N = 10^{10}$ ), die aufeinander verweisen. Es sei  $I(i)$  die Menge der Indizes aller Webseiten, die auf die Webseite  $i$  verweisen. Weiter sei  $O(i)$  die Menge der Indizes aller Webseiten, auf die die Webseite  $i$  verweist (Selbstbezüge sind nicht zugelassen).

Wir wollen diese Webseiten ihrer Relevanz nach ordnen. Dazu wollen wir jeder Webseite  $i$  eine Wichtigkeit (PageRank)  $P(i)$  zuordnen. Wir schauen auf einen allgemeinen Fall, der Sonderfälle (z.B. nicht verlinkte Seiten) nicht berücksichtigt.

Eine Webseite ist besonders relevant, wenn viele Webseiten auf sie verweisen. Die erste Idee wäre also, zu definieren:

$$P(i) = |I(i)|.$$

Problem dabei: Wenn viele Webseiten auf  $i$  verweisen, diese aber alle selbst völlig unwichtig sind, sollte das weniger berücksichtigt werden, als wenn eine sehr wichtige Seite auf  $i$  verweist. Es scheint daher eine gute Idee zu sein, zu fordern, dass der PageRank einer Seite die Summe der PageRanks der Seiten ist, die auf sie verweisen, also

$$P(i) = \sum_{k \in I(i)} P(k).$$

Problem dabei: Jetzt können wir den PageRank natürlich nicht mehr einfach ausrechnen, sondern müssen ein Gleichungssystem lösen (das offensichtlich nicht mal eine eindeutige Lösung hat, denn wir suchen eine nichttriviale Lösung, aber die Lösung  $P = 0$  wäre sicherlich auch eine).

Zweites Problem: Wenn eine Seite nur auf eine weitere Seite verweist, dann sollte dies ein größeres Gewicht haben, als wenn eine Seite auf sehr viele Seiten verweist. Wir teilen daher nochmal das Seitengewicht durch die Anzahl der Seiten, auf die verlinkt wird.

$$P(i) = \sum_{k \in I(i)} \frac{1}{|O(k)|} P(k).$$

In Matrixschreibweise:

$$P = 1 \cdot P = GP$$

wobei  $G = (a_{i,k}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Also: Unser gesuchter Vektor  $P$  ist Eigenvektor der Matrix  $G$  zum Eigenwert 1. Nach Konstruktion gilt:

- (a)  $a_{i,k}$  ist Null, falls die Seite  $k$  nicht auf die Seite  $i$  verlinkt. Es sind also sehr viele (eigentlich fast alle) Einträge der Matrix Null, denn: Insgesamt hat die Matrix  $10^{10} \cdot 10^{10}$  Einträge. Jede Seite verlinkt im Durchschnitt auf 10 weitere Seiten. Es sind also nur  $10 \cdot 10^{10}$  Einträge der Matrix von Null verschieden.

Matrizen mit sehr wenigen von Null verschiedenen Einträgen nennen wir sparse oder dünn besetzt. Wir müssen diese Eigenschaft nutzen, wenn wir Eigenwerte großer Matrizen berechnen wollen.

- (b)  $a_{i,k}$  ist  $\frac{1}{|O(k)|}$ , falls die Seite  $k$  auf die Seite  $i$  verlinkt.

- (c) Es gilt

$$\sum_i a_{i,k} = \sum_{i \in O(k)} \frac{1}{|O(k)|} = 1,$$

d.h. die Summe aller Elemente in jeder Spalte ist 1.

- (d)

$$a_{i,i} = 0, i = 1, \dots, n.$$

- (e)  $G^t$  bezeichnet man auch als stochastische Matrix (alle Einträge sind nichtnegativ, die Zeilensumme ist 1). Diese Matrizen sind in der Statistik von großer Bedeutung, die Eigenschaften ihrer Eigenwerte sind gut untersucht.

Diese Definition ist noch nicht vollständig. Wir werden noch eine kleine Modifikation später anbringen, damit die Eigenwerte gut ausgerechnet werden können.

Wir bemerken, dass insbesondere ein Interesse daran besteht, große oder kleine Eigenwerte von (hermiteschen) Matrizen zu berechnen.

Zur Untersuchung der Konvergenzeigenschaften müssen wir die Eigenwerte einer Matrix abschätzen. Dabei ist häufig der Satz von Gerschgorin nützlich.

### Satz 8.1 (Satz von Gerschgorin)

Sei  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Sei  $K_i \in \mathbb{C}$  (also in der komplexen Ebene) der Kreis um das Diagonalelement  $a_{i,i}$  mit dem Radius der Summe der Beträge der Außerdiagonalelemente in Zeile  $i$ , also

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \quad K_i = \{z : |z - a_{i,i}| \leq r_i\}.$$

Dann liegen alle Eigenwerte von  $A$  in der Vereinigung der Kreise  $K_i$ .

Falls die Vereinigung  $V$  von  $m$  Kreisen disjunkt ist zum Rest der Kreise, so liegen in  $V$  genau  $m$  Eigenwerte von  $A$ .

Also: Sei  $M \subset \{1 \dots n\}$ ,  $m = |M|$ . Weiter sei

$$\bigcup_{i \in M} K_i \cap \bigcup_{i \notin M} K_i = \emptyset,$$

dann ist

$$|\{\lambda_k \in \bigcup_{i \in M} K_i : \lambda_k \text{ Eigenwert von } A\}| = m,$$

wobei die Eigenwerte mit ihrer Vielfachheit im charakteristischen Polynom gezählt werden.

Zunächst ein kurzes Beispiel. Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Die Gerschgorinkreise sind der Kreis  $K_1$  um 4 mit Radius 1, der Kreis  $K_2$  um 1 mit Radius 1 und der Kreis  $K_3$  um  $1/2$  mit Radius 1 (alles in der komplexen Ebene, natürlich). Dann garantiert der Satz von Gerschgorin, dass in  $K_1$  genau ein Eigenwert von  $A$  liegt, in  $K_2 \cup K_3$  liegen zwei.

Ausdrücklich: Der Satz von Gerschgorin garantiert in diesem Fall **nicht**, dass in  $K_2$  bzw.  $K_3$  ein Eigenwert liegt (nur in der Vereinigung liegen zwei).

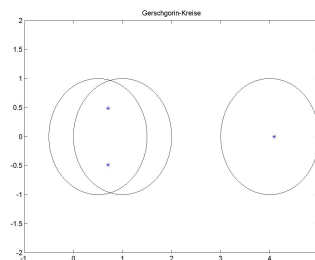


Abbildung 8.1: Gerschgorin–Kreise von  $A$

[Klick für Bild gerschgorin](#)  
[Klick für Matlab Figure gerschgorin](#)

```
function gerschgorin
%GERSCHGORIN Demo Gerschgorin–Kreise
%A=[1 3 3 ;4 5 3;7 8 2];
%A=diag([1 2 3 4])+rand(4);
```

```
%A=[5 1 0 1; 2 4 1 0; 0 1 4 1; 2 2 1 6];
A=[4 0 1; 1 1 0; 0 1 0.5];
```

Listing 8.1: Stetige Abhängigkeit der Nullstellen und Gerschgorinkreise (Gerschgorin/gerschgorin.m)

[Klicken für den Quellcode von Gerschgorin/gerschgorin.m](#)

### Beweis:

Wir beweisen nur den ersten Teil dieses Satzes.

1. Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ . Sei  $x$  Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  mit  $\|x\|_\infty = 1$ . Es gibt also ein  $m$  mit  $|x_m| = 1$ .

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)x = 0 &\implies (a_{m,m} - \lambda)x_m = - \sum_{j \neq m} a_{m,j} x_j \\ &\implies |a_{m,m} - \lambda| \leq \sum_{j \neq m} |a_{m,j}| \cdot |x_j| \\ &\implies |a_{m,m} - \lambda| \leq \sum_{j \neq m} |a_{m,j}| = r_m \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:** Da die Eigenwerte von  $A$  und  $A^t$  dieselben sind, kann man den Satz statt auf die Zeilensumme auch auf die Spaltensumme anwenden.

Häufig kann man die Abschätzung verschärfen, indem man das Kriterium statt auf  $A$  auf  $\mathcal{D}A\mathcal{D}^{-1}$  mit einer Diagonalmatrix  $\mathcal{D}$  anwendet.

Wir wollen iterativ vorgehen, d.h. wir wollen eine Folge von Vektoren angeben, die gegen einen Eigenvektor konvergiert.

Sei  $A$  eine reelle, symmetrische  $n \times n$ -Matrix.

Wir wählen zunächst irgendeinen von Null verschiedenen Vektor  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  und wenden Potenzen der  $n \times n$ -Matrix  $A$  auf  $x^{(0)}$  an. Wir setzen

$$x^{(j)} = A^j x^{(0)}, \text{ also } x^{(j+1)} = Ax^{(j)}.$$

$A$  ist symmetrisch, also besitzt der  $\mathbb{R}^n$  eine Basis aus Eigenvektoren  $y_k$  zu Eigenwerten  $\lambda_k$ ,  $k = 1 \dots n$  von  $A$ . In allen Betrachtungen seien unsere Eigenwerte immer der Größe des Betrages nach geordnet, d.h.

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Da  $(y_k)$  eine Basis ist, können wir  $x^{(0)}$  darin entwickeln, also

$$x^{(0)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k.$$

Dann ist

$$x^{(j)} = A^j \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^j v_k = \lambda_1^j \underbrace{\left( \alpha_1 v_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^j v_k \right)}_{=: w^{(j)}} \quad (8.1)$$

Es sei nun  $\lambda_1$  der betragsmäßig echt größte Eigenwert, d.h.  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ . Dann ist klar, dass in der Darstellung 8.1 die Summe für  $j \mapsto \infty$  verschwindet, also  $w^{(j)}$  gegen  $\alpha_1 v_1$  konvergiert. Für große  $j$  wird also  $x^{(j)}$  zu einem Vielfachen des ersten Eigenvektors  $y_1$ . Um zu einer Konvergenz zu kommen, müsste man nun nur noch die  $x^{(j)}$  normieren, was den Faktor vor  $w^{(j)}$  eliminiert. Hierzu kann man z.B. einen Vektor  $b$  fest wählen und die Vektoren

$$y^{(j)} = \frac{1}{(x^{(j)}, b)} x^{(j)} = \frac{1}{\lambda_1^j (w^{(j)}, b)} \lambda_1^j w^{(j)} \xrightarrow{j \mapsto \infty} \frac{1}{(\alpha_1 v_1, b)} \alpha_1 v_1$$

betrachten. Für die Bestimmung des Eigenwerts betrachtet man entsprechend den Quotienten

$$\lambda^{(j)} = \frac{(x^{(j+1)}, b)}{(x^{(j)}, b)} = \frac{\lambda_1^{j+1} (w^{(j+1)}, b)}{\lambda_1^j (w^{(j)}, b)} \xrightarrow{j \mapsto \infty} \lambda_1.$$

Damit dies alles funktioniert, dürfen die Nenner nicht Null werden, d.h. es muss gelten  $\alpha_1 \neq 0$  und  $(v_1, b) \neq 0$ .

Dies ist die Potenzmethode (Vektoriteration).

### Satz 8.2 (Potenzmethode, Vektoriteration nach von Mises)

Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch. Es seien  $v_k$  Eigenvektoren von  $A$  mit zugehörigen Eigenwerten  $\lambda_k$ ,  $k = 1 \dots n$ ,  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ .

Es sei

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, x^{(0)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k, \alpha_1 \neq 0.$$

Weiter sei

$$b \in \mathbb{R}^n, (v_1, b) \neq 0.$$

Die Folgeglieder der Potenzmethode sind definiert durch

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)}$$



und werden rekursiv berechnet durch

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)}.$$

Weiter sei

$$\lambda^{(k)} = \frac{(x^{(k+1)}, b)}{(x^{(k)}, b)}.$$

Die Folge  $\lambda^{(j)}$  heißt Potenzmethode zur Bestimmung des betragsmaximalen Eigenwerts von  $A$ . Es gilt: Falls  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , so konvergiert die Potenzmethode gegen  $\lambda_1$ .

Dieser Satz wirft mehrere Fragen auf:

1. Die Bedingungen an  $x^0$  bzw.  $b$  lassen sich natürlich erst nachprüfen, wenn wir  $v_1$  bereits bestimmt haben. Dies ist aber gerade unser Ziel. Glücklicherweise spielen diese Bedingungen in der Praxis keine Rolle. Üblicherweise wählt man für beide Vektoren einen Vektor, der ausschließlich aus Einsen besteht oder einen zufälligen Vektor.
2. Falls es zwei verschiedene betragsmaximale Eigenwerte gibt, also etwa  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$  mit  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , so konvergiert die Potenzmethode im Allgemeinen nicht. In der Summe bei der Definition der Vektoren  $w^{(j)}$  tritt dann ein oszillierender Term  $(\lambda_2/\lambda_1)^j$  auf, der nicht konvergiert, so dass  $w^{(j)}$  nicht konvergiert und damit auch nicht  $\lambda^{(j)}$ .
3. Falls der betragsmaximale Eigenwert mehrfach auftritt, also etwa  $\lambda_1 = \lambda_2$ , so ist dies kein Problem. In der Definition der  $w^{(j)}$  tritt dann ein Term  $(\lambda_2/\lambda_1)^j$  auf, dieser ist aber konstant 1, so dass die  $w^{(j)}$  trotzdem konvergieren (gegen  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ ).
4. Natürlich können wir nun zur Berechnung von  $\lambda_1$  nicht **alle** Folgenglieder ausrechnen. Wir gehen so vor, dass wir einige Glieder ausrechnen und dann das aktuelle  $\lambda^{(j)}$  als Approximation für  $\lambda_1$  akzeptieren. Wir brauchen also ein Kriterium, das sagt: Das aktuelle Folgenglied ist für unsere Zwecke genau genug, wir rechnen nicht mehr weiter. Der nächste Satz liefert etwas in dieser Richtung zumindest mal für symmetrische Matrizen.

**Satz 8.3** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch. Weiter seien  $\lambda$  und  $x$  Näherungen für einen Eigenwert von  $A$  mit zugehörigem Eigenvektor, und es sei  $d := Ax - \lambda x$  das Residuum. Dann gibt es einen Eigenwert von  $A$  mit

$$|\lambda_i - \lambda| \leq \frac{\|d\|_2}{\|x\|_2}.$$

**Beweis:**  $A$  ist symmetrisch, also hat der  $\mathbb{R}^n$  eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  mit zugehörigen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Mit dem Satz des Pythagoras gilt

$$x = \sum_{k=1}^n c_k v_k, \quad c_k = (x, v_k), \quad \|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

und

$$d = Ax - \lambda x = \sum_{k=1}^n c_k (\lambda_k - \lambda) v_k.$$

Sei  $\lambda_i$  der zu  $\lambda$  nächste Eigenwert, also

$$|\lambda_i - \lambda| \leq |\lambda_k - \lambda|, \quad k = 1 \dots n.$$

Damit ist

$$\|d\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 |\lambda_k - \lambda|^2 \geq \sum_{k=1}^n |c_k|^2 |\lambda_i - \lambda|^2 = \|x\|_2^2 |\lambda_i - \lambda|^2.$$

□

Dies löst natürlich alles nur das Problem, den betragsmaximalen Eigenwert einer Matrix zu bestimmen. Wie gehen wir vor, wenn alle Matrizen zu bestimmen sind? Hierzu eine kurze Motivation ohne jeden Beweis.

Zu bestimmen seien die  $n$  Eigenwerte einer symmetrischen Matrix. Man könnte nun auf die Idee kommen, einfach  $n$ -mal die Potenzmethode mit unterschiedlichen Anfangsvektoren durchzuführen. Dies wäre aber Unfug, denn die Potenzmethode liefert immer Eigenwerte bzw. Eigenvektoren zum betragsgrößten Eigenwert, man würde also einfach nur immer  $\lambda_1$  bzw.  $v_1$  berechnen.

Wir wissen aber, dass die echten Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen. Also scheint es eine gute Idee zu sein, dies auch von den Iterierten der Potenzmethode zu fordern. Wir starten also mit  $n$  Startvektoren und schreiben diese in eine Matrix  $X^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Wir führen für alle einen Schritt der Potenzmethode durch (berechnen  $AX^{(0)}$ ), und orthogonalisieren diese Vektoren dann mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens (das, wie wir wissen, äquivalent zur Durchführung der QR-Zerlegung ist). Der Algorithmus lautet also:

1. Wähle  $X^0$ .
2. Für  $k = 0..N$ :  
 $\widetilde{X^{(k+1)}} := AX^{(k)}$   
 Berechne die QR-Zerlegung  $\widetilde{X^{(k+1)}} = QR$ .  
 Setze  $X^{(k)} := Q$ .

Die Hoffnung wäre, dass  $X^{(k)}$  gegen eine Matrix konvergiert, in der spaltenweise die Eigenvektoren von  $A$  stehen. Dies ist unter Voraussetzungen tatsächlich der Fall – und das nicht nur, wie hier angenommen, für symmetrische Matrizen, sondern etwas erweitert sogar für allgemeine Matrizen. Dies ist der QR-Algorithmus zur Bestimmung aller Eigenwerte einer Matrix.

Der so entstehende Algorithmus ist einer der grundlegenden Algorithmen der linearen Algebra, und wohl der mit der kuriosesten Geschichte. Er wurde 1961 publiziert von John Francis, Francis [1961] und Francis [1962]. Francis hat nie einen Universitätsabschluss erhalten und den Algorithmus als Student entwickelt, aber dann das Feld verlassen und als Programmierer gearbeitet.

Ihm ist die Bedeutung seiner Arbeit erst 2007 klargeworden, als Gene Golub ihn in Kleinarbeit aufstöberte. Golub, einer der Väter von Matlab und selbsternannter Professor SVD, schreibt zum QR-Algorithmus (übrigens nicht in einem Nachruf, Francis lebt noch im Gegensatz zu Golub (Stand 2012)):

*Along with the conjugate gradient method, it provided us with one of the basic tools of numerical analysis.*

Eine Würdigung des Beitrags von Francis findet sich in Golub and Uhlig [2009].

# Literaturverzeichnis

- J. G. F. Francis. The qr transformation a unitary analogue to the lr transformation—part 1. *The Computer Journal*, 4(3):265–271, 1961. doi: 10.1093/comjnl/4.3.265. URL <http://comjnl.oxfordjournals.org/content/4/3/265.abstract>.
- J. G. F. Francis. The qr transformation—part 2. *The Computer Journal*, 4(4):332–345, 1962. URL <http://comjnl.oxfordjournals.org/content/4/4/332.abstract>.
- Gene Golub and Frank Uhlig. The qr algorithm: 50 years later its genesis by john francis and vera kublanovskaya and subsequent developments. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 29(3):467–485, 2009. doi: 10.1093/imanum/drpo12. URL <http://imajna.oxfordjournals.org/content/29/3/467.abstract>.
- M. Hanke-Bourgeois. *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. Mathematische Leitfäden. Teubner, 2006. ISBN 9783835100909. URL <http://books.google.de/books?id=tKrhTUmYNEoC>.
- P. J. McKenna. Large torsional oscillations in suspension bridges revisited: Fixing an old approximation. *The American Mathematical Monthly*, 106(1):pp. 1–18, 1999. ISSN 00029890. URL [http://scholar.google.de/scholar\\_url?hl=de&q=http://actuarialscience.math.uconn.edu/~mckenna/2410f09/monthly1.pdf&sa=X&scisig=AAGBfm1Wn1ubV1hU3qHMj1bRcNul9-GvDQ&oi=scholar&ei=99zKUJMWyNWyBom4gbgC&ved=0CDUQgAMoADAA](http://scholar.google.de/scholar_url?hl=de&q=http://actuarialscience.math.uconn.edu/~mckenna/2410f09/monthly1.pdf&sa=X&scisig=AAGBfm1Wn1ubV1hU3qHMj1bRcNul9-GvDQ&oi=scholar&ei=99zKUJMWyNWyBom4gbgC&ved=0CDUQgAMoADAA).

# Abbildungsverzeichnis

8.1	Gerschgorin–Kreise von $A$ . . . . .	6
-----	--------------------------------------	---

# Listings

8.1 Stetige Abhängigkeit der Nullstellen und Gerschgorinkreise (Gerschgorin/gerschgorin.m) . . . . .	6
---	---