Beispiel zum Newtonverfahren

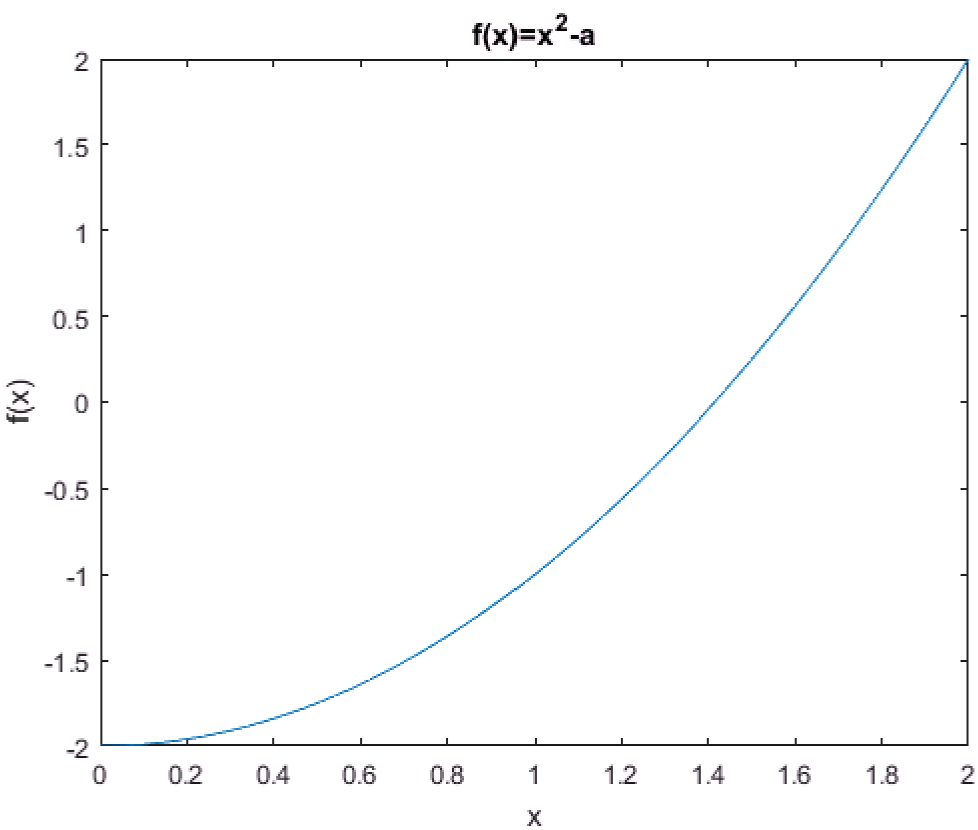
Aufgabe: Es sei $a > 0$. Gesucht sei die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2 - a$$

Zeigen Sie: Das Newtonverfahren für diese Funktion konvergiert für alle Startwerte $x^{(0)} > 0$ gegen die gesuchte Nullstelle.

Lösung: Für die Beispiele wählen wir $a = 2$. Wir zeichnen zunächst mal die Funktion.

```
a=2;
x=0:0.01:2;
f=@(x) x.*x-a;
df=@(x) 2*x;
F=f(x);
plot(x,F);
title('f(x)=x^2-a');
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
```



Natürlich ist die Nullstelle wie erwartet $x = \sqrt{a}$. Für das Newtonverfahren definieren wir zunächst die zugehörige Funktion $g(x)$

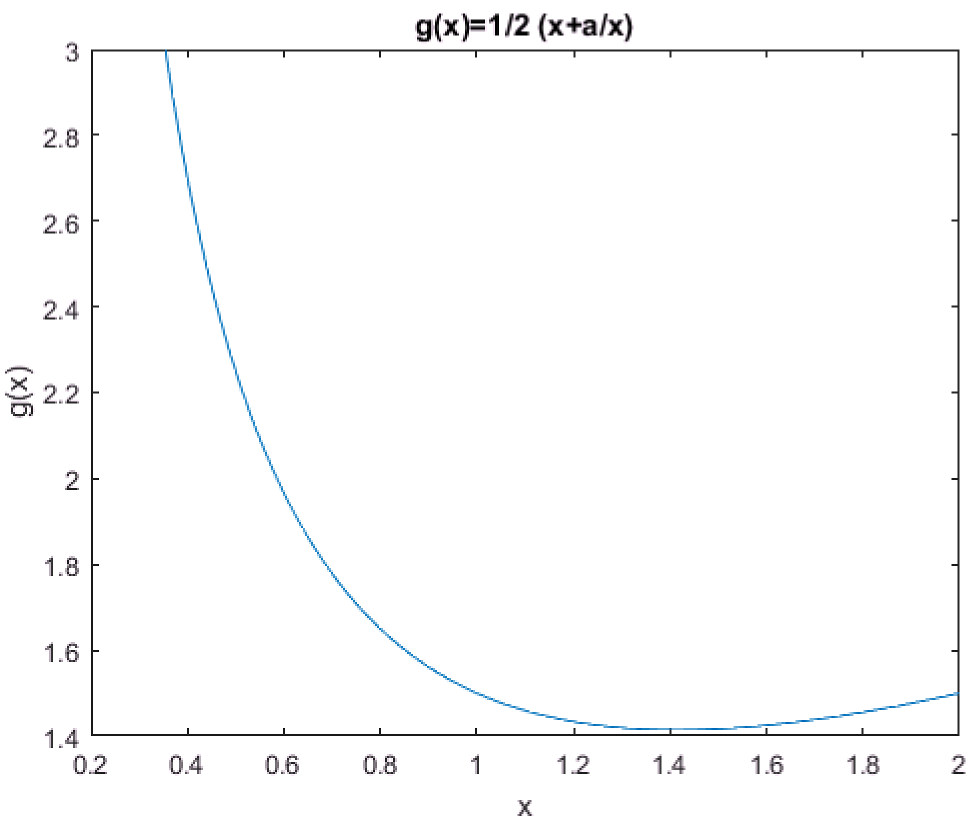
$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Für $a > 0$ und $x > 0$ ist offensichtlich auch $g(x) > 0$, also gilt für alle Folgeglieder des Newtonverfahrens

$$x^{(k)} > 0$$

Auch diese Funktion zeichnen wir wieder.

```
g=@(x) x-f(x)./df(x);
G=g(x);
plot(x,G);
title('g(x)=1/2 (x+a/x)');
xlabel('x');
ylabel('g(x)');
ylim([1.4 3]);
```



Bei genauem Hinsehen: Die Funktion g fällt zunächst bis $\sqrt{a}$ und steigt dann wieder an. Dies rechnen wir natürlich schnell nach. Für die Ableitung gilt

$$g'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2})$$

Die einzige positive Nullstelle der Ableitung ist also $x = \sqrt{a}$, und die Funktion hat dort ein Minimum, denn die zweite Ableitung ist $\frac{a}{x^3} > 0$. Insbesondere gilt für alle $x > 0$

$$g(x) \geq g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$$

Da $x^{(k)} > 0$, gilt $x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \geq \sqrt{a}$ und damit

$$x^{(k)} \geq \sqrt{a} \forall k \geq 1.$$

Ab Folgeglied 1 ist die Folge also durch $\sqrt{a}$ nach unten beschränkt. Dies war der Stand in der Vorlesung.

Wir rechnen nun beispielhaft einige Folgeglieder aus.

```
x0=0.1
```

```
x0 = 0.1000
```

```
x1=g(x0)
```

```
x1 = 10.0500
```

```
x2=g(x1)
```

```
x2 = 5.1245
```

```
x3=g(x2)
```

```
x3 = 2.7574
```

```
x4=g(x3)
```

```
x4 = 1.7414
```

```
x5=g(x4)
```

```
x5 = 1.4449
```

```
x6=g(x5)
```

```
x6 = 1.4145
```

Man hat die Vermutung, dass ab $x^{(1)}$ die Folge monoton fällt. In der Vorlesung wollte ich zeigen, dass g monoton fällt - das ist falsch und auch völlig uninteressant. Zu zeigen ist natürlich

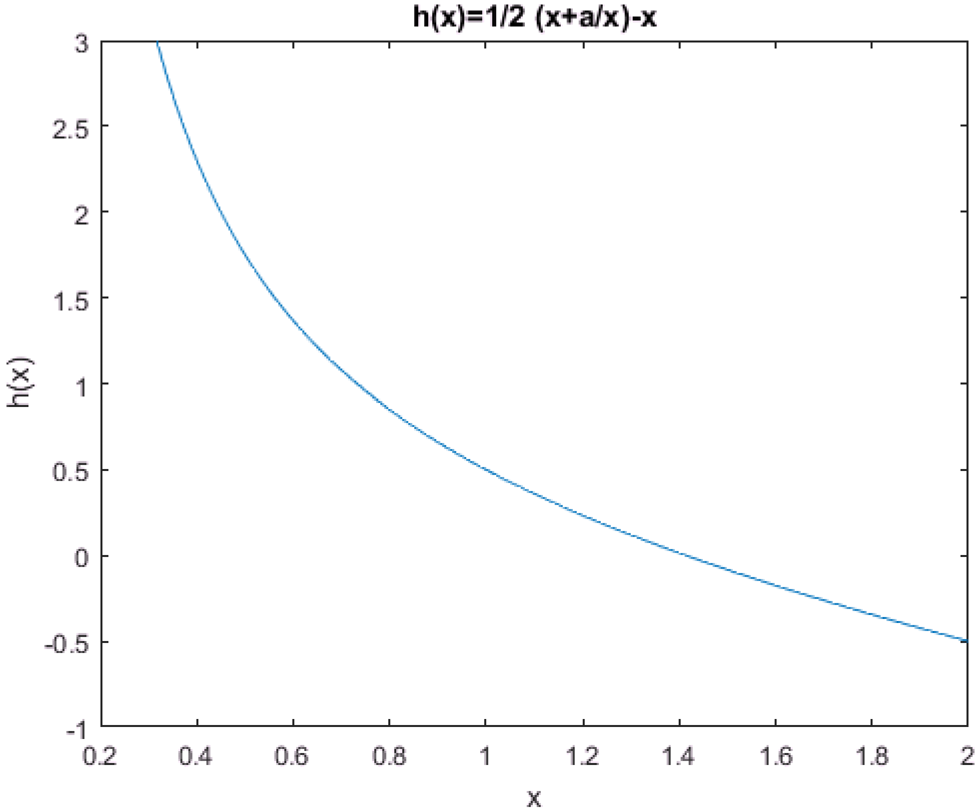
$$g(x^{(k)}) = x^{(k+1)} \leq x^{(k)} \forall k > 1.$$

Wir betrachten daher die Funktion $h(x) = g(x) - x$. Da $g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ gilt $h(\sqrt{a}) = 0$. Für die Ableitung gilt

$$h'(x) = g'(x) - 1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2}) - 1 = -\frac{1}{2}(1 + \frac{a}{x^2}) < 0$$

Zur Sicherheit plotten wir $h(x)$ auch nochmal.

```
h=@(x) g(x)-x;
H=h(x);
plot(x,H);
title('h(x)=1/2 (x+a/x)-x');
xlabel('x');
ylabel('h(x)');
ylim([-1 3]);
```



Tatsächlich, h ist (streng) monoton fallend, also ist $h(x) \leq 0$ für $x \geq \sqrt{a}$ und damit $g(x) \leq x$. Ab $x^{(1)}$ ist die Folge also monoton fallend und nach unten beschränkt. Damit muss sie gegen einen Fixpunkt von g konvergieren, der einzige mögliche ist $\sqrt{a}$, also konvergiert die Newton-Folge gegen $\sqrt{a}$.