Übungen zu Bildgebende Verfahren

Übungsblatt 8 , Abgabe: 20.12.99, 15.00 Uhr, Übungskasten F 13

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Sei für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ und $x, y \in \mathbb{R}^3$

$$(Df)(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x+ty)dt \ .$$

Sei $g = Df$. Zeigen Sie:

(a) g erfüllt die Differentialgleichung von *John*:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial y_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial y_i} = 0 \ , \qquad i,j = 1,2,3 \ .$$

(b) Sei $\hat{g}$ die Fourier-Transformation von g bezüglich der zweiten Variablen. Dann ist $\hat{g}(\cdot,\eta)$ konstant auf allen Ebenen, die zu η senkrecht sind.

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: Für $m = 0,1,2,\ldots$ ist

$$p_m(\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} s^m (Rf)(\theta,s)ds$$

ein Polynom in θ, welches homogen vom Grade m ist.

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: Für $m = 0,1,2,\ldots$ ist

$$q_m(y) = \int\limits_{\theta^\perp} (x \cdot y)^m (Pf)(\theta,x)dx$$

auf $\theta^\perp$ ein Polynom, welches homogen vom Grade m und unabhängig von θ ist.

Aufgabe 32: (Programmieraufgabe) Nach Aufgabe 30 für $n = 2$ ist für $|k| > m \geq 0$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{ik\varphi} p_m(\theta) d\varphi = 0 \ , \qquad \theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \ .$$

Prüfen Sie dies für Ihr Programm aus Aufgabe 29 an Hand der charakteristischen Funktion eines Kreises um den Punkt $(0.5, 0.5)$ mit Radius 0.2 für f nummerisch nach.

<u>Hinweis:</u> Berechnen Sie das Integral durch die Trapezregel mit Schrittweite $h \leq 2\pi/(|k| + m)$ (vgl. Korollar zur Poissonschen Formel).