Übungen zu Bildgebende Verfahren

Übungsblatt 4 , Abgabe: 22.11.99, 15.00 Uhr, Übungskasten F 13

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Sei f lokal integrierbar in $\mathbb{R}^1$ und periodisch mit der Periode $2A$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \hat{f} &= (2\pi)^{1/2} \sum_k \hat{f}_k \delta_{\pi k/A} , \\ \hat{f}_k &= \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} f(x) e^{-i\pi x k/A} dx . \end{aligned}$$

Aufgabe 14: (4 Punkte)
Sei f stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^1$ und periodisch mit der Periode $2A$. Zeigen Sie:

$$\int_{-A}^{A} f(x)dx = h \sum_{k=0}^{p-1} f(hk) - 2A \sum_{\ell \neq 0} \hat{f}_{\ell p} , \qquad h = 2A/p$$

mit den f_k aus Aufgabe 13.

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Berechnen Sie den $\cos^2$-Filter

$$\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\Omega}^{\Omega} \cos^2\left(\frac{\pi\xi}{2\Omega}\right) e^{ix\xi} d\xi$$

und zeichen Sie ihn zusammen mit dem idealen Tiefpass der Bandbreite Ω. Kennzeichnen Sie die x-Achse mit den Abtastpunkten $\pi\ell/\Omega$, $\ell \in \mathbb{Z}$ der Nyquist-Abtastung.

Aufgabe 16: (4 Punkte)
Sei $f \in S(\mathbb{R}^1)$ bandbeschränkt außerhalb eines Intervalls, d.h.

$$\hat{f}(\xi) = 0 , \quad \text{falls } |\xi| \le f_L \text{ oder } |\xi| \ge f_U .$$

Sei $B = f_U - f_L$ und $f_L = 2NB$.

(a) Zeigen Sie: f ist durch die Werte $f(k \cdot h)$, $h \le \frac{\pi}{B}$, $k \in \mathbb{Z}$, eindeutig bestimmt.

(b) Berechnen Sie f aus den $f(k \cdot h)$.