Übungen zu Bildgebende Verfahren

Übungsblatt 3 , Abgabe: 15.11.99, 15.00 Uhr, Übungskasten F 13

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Ein sich mit der Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^n$ bewegendes Bild $f \in \mathcal{S}$ werde mit Belichtungszeit Δt photographiert. Auf dem Film entsteht dann das Bild

$$g(x) = \int_0^{\Delta t} f(x + tv)dt \ .$$

Sei T die Distribution

$$Tf = \int_0^{\Delta t} f(-tv)dt \ .$$

Zeigen Sie:

(a) $g = f * T$

(b) $\hat{g}(\xi) = 2\, e^{ia} \operatorname{sinc}(a)\, \hat{f}(\xi)\, \Delta t \quad \text{mit } a = \Delta t v \cdot \xi/2$.

Kann man f aus g berechnen?

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Ein mit Winkelgeschwindigkeit ω rotierendes Bild $f \in \mathcal{S}$ werde mit Belichtungszeit T photographiert. Auf dem Film entsteht dann das verschmierte Bild

$$g(x) = \int_0^T f(U(t)x)dt \ , \quad U(t) = \begin{pmatrix} \cos\ \omega t & -\sin\ \omega t \\ \sin\ \omega t & \cos\ \omega t \end{pmatrix} .$$

Setzen sie

$$x = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} , \quad f(x) = \sum_k f_k(r) e^{ik\varphi} , \quad g(x) = \sum_k g_k(r) e^{ik\varphi}$$

und berechnen Sie die g_k aus den f_k.

Kann man die f_k aus den g_k berechnen?

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Fourier-Reihen von

(a) $f(x) = \begin{cases} x & , \ |x| \le \pi/2 \\ 0 & , \ \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}$ (b) $f(x) = |\sin x|$.

Aufgabe 12: (Programmieraufgabe)

(a) Schreiben Sie ein Programm, das die Cosinus-Reihe $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$ zu der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad , \qquad x = -\pi \dots \pi \ ,$$

auswertet.

(b) Berechnen Sie numerisch das Maximum der Reihe im Intervall $[\frac{\pi}{2} - 0.1, \frac{\pi}{2} + 0.1]$ für $n = 100,\ 1000,\ 10.000$ und erklären Sie das Ergebnis.

(c) Wiederholen Sie den Versuch mit der Reihe

$$\frac{a_0}{1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin(k\pi/2n)}{k\pi/2n} \right) \cdot (a_k \cos kx) \ .$$