Übungen zu Bildgebende Verfahren

Übungsblatt 2 , Abgabe: 02.11.99, 15.00 Uhr, Übungskasten F 13

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Sei $T \in \mathcal{S}'$ der Cauchysche Hauptwert, also

$$T(\varphi) = \oint \frac{\varphi(x)}{x} dx \ .$$

Zeigen Sie:

$$\begin{array}{llcl} (a) & T(\varphi) & = & \int \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2x} dx \\ (b) & T'(\varphi) & = & - \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} \right\} \end{array}$$

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Für eine Funktion φ in $\mathbb{R}^n$ und $r > 0$ sei $\varphi_r(x) = \varphi(rx)$. Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sei

$$T_r(\varphi) = r^{-n} T(\varphi_{1/r}) \ .$$

Zeigen Sie:

(a) $T_r \in \mathcal{S}'$ (b) $\delta_r = r^{-n}\delta$ (c) $(T_r)^\wedge = r^{-n}(\hat{T})_{1/r}$
(d) $T_{f_r} = (T_f)_r$ falls f schwach wachsend ist.

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ homogen vom Grade k, d.h. $T_r = r^{-k}T$ (vgl. vorstehende Aufgabe).

(a) Zeigen Sie: $\hat{T}$ ist homogen vom Grade $k - n$.

(b) Verifizieren Sie (a) für $T = \frac{1}{x}$, $T = \delta$.

Aufgabe 8: (Programmieraufgabe) Die Fourier-Transformation einer Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx \ .$$

(a) Schreiben Sie ein Programm zur näherungsweisen Berechnung von $\hat{f}(\xi)$, indem Sie f auf das Intervall $[-M, M]$ einschränken und die Trapezregel anwenden.

(b) Benutzen Sie eine numerische Bibliothek (NAG, IMSL, Numerical Recipes ...), um $\hat{f}(\xi_k)$, $\xi_k = \pi k/M$, effizient zu berechnen, $k = -N \ldots N - 1$.

Testen Sie Ihr Programm am Beispiel $f(x) = e^{-x^2/2}$, $M = 8$, N = Anzahl der Diskretisierungspunkte = 1024.