Übungen zu Bildgebende Verfahren

Übungsblatt 12 , Abgabe: 31.01.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten F 13

Aufgabe 41: (4 Punkte)
Sei T_ℓ das Tschebyscheff-Polynom 1. Art vom Grad ℓ, also

$$T_\ell(x) = \cos(\ell \arccos x) \ , \quad |x| \leq 1 \ .$$

Zeigen Sie: Für $|x| \geq 1$ gilt

$$|T_\ell(x)| \geq \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^\ell \ .$$

Aufgabe 42: (4 Punkte)
Sei M die Mellin-Transformation

$$(Mf)(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx \ .$$

Zeigen Sie

$$\begin{aligned}(Mf')(s) &= (1-s)(Mf)(s-1)\\ (Mx^p f)(s) &= (Mf)(s+p)\\ (M(f*g))(s) &= MfMg \ ,\end{aligned}$$

wobei

$$(f*g)(x) = \int_0^\infty f(r) g\left(\frac{x}{r}\right)\frac{dr}{r} \quad .$$

Aufgabe 43: (4 Punkte)
Sei für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $\mu \in \mathbb{R}$

$$g(\theta, s) = (T_\mu f)(\theta, s) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{\mu t} f(s\theta + t\theta^\perp) dt$$

die exponentielle Radon-Transformation. Zeigen Sie:

(a) $(T_\mu f)^\wedge(\theta, \sigma) = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\sigma\theta + i\mu\theta^\perp)$.

(b) Sei $g(\theta, \sigma) = (T_\mu f)^\wedge(\theta, i\sigma)$. Dann gilt

$$g(\theta(\varphi - \alpha), \sigma) = g(\theta(\varphi + \alpha), -\sigma) \ ,$$

$$\alpha = \arcsin \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \mu^2}} \ , \qquad \theta(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \ .$$

(c)

$$\mu = \frac{\int \frac{\partial}{\partial\varphi} g(\theta, s) ds}{\int s g(\theta, s) ds} \ .$$