Übungen zu Bildgebende Verfahren

Übungsblatt 11 , Abgabe: 24.01.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten F 13

Aufgabe 37: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Moore-Penrose-Inverse A^+ für folgende Matrizen A:

(a) $A = (1, \dots, 1)$

(b) A orthonormal

(c) A diagonal mit Diagonalelementen, die nicht notwendig $\neq 0$ sind.

Aufgabe 38: (4 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Bestimmen Sie die Moore-Penrose-Inverse folgender Operatoren:

(a) $A : L_2(I) \to \mathbb{R}^1$, $\quad Af = \int\limits_I f(x)dx$

(b) $A : L_2(I) \to \mathbb{R}^n$, $\quad (Af)_i := \int\limits_I f(x)v_i(x)dx$, $\quad i = 1, \dots, n$,
wobei $v_1, \dots, v_n$ ein Orthonormalsystem in $L_2(I)$ ist.

(c) $A : L_2(I) \to L_2(I)$, $\quad (Af)(x) = g(x)f(x)$
mit $g \in C(I)$.

Aufgabe 39: (4 Punkte)
Seien (f_k), (g_k) Orthonormalsysteme in den Hilberträumen H, K, und sei $\sigma_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$ Sei

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (f, f_k)_H g_k$$

absolut konvergent für alle f.

Zeigen Sie: A ist stetig als Operator von H nach K, und

$$\begin{aligned} A^* g &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (g, g_k)_K f_k \ , \\ A^+ g &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} (g, g_k)_K f_k \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 40: (Programmieraufgabe) Schreiben Sie ein Programm für das Kaczmarz-Verfahren für eine beliebige (m, n)-Matrix A. Testen Sie Ihr Programm an Hand des linearen Systems

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{i+j} f_j = g_i \ , \quad g_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{i+j} \ , \quad i = 1, \ldots, n$$

mit (a) $m = 10, \ \ n = 20$ und (b) $m = 20, \ \ n = 10$.