Übungen zu Bildgebende Verfahren

Übungsblatt 10 , Abgabe: 17.01.2000, 15.00 Uhr, Übungskasten F 13

Aufgabe 35: (8 Punkte)
Sei B_1 die charakteristische Funktion von $[0,1]$ und

$$B_k = B_1 * \cdots * B_1 \ \ (k \text{ Faktoren}) \ .$$

(a) Berechnen Sie B_k für $k = 1,2,3$ explizit und fertigen Sie Skizzen an.

(b) Zeigen Sie $B_k \in C^{k-1}$, und $B_k(x) \geq 0$, und $B_k(x) = 0$ für $x \notin [0,k]$.

(c) Zeigen Sie:

$$\hat{B}_k(\xi) = (2\pi)^{-1/2}(\mathrm{sinc}(\sigma/2))^k$$

(d) Sei

$$(I_h g)(s) = \sum_\ell g(h\ell) B\left(\frac{s-h\ell}{h}\right) \ .$$

Zeigen Sie: Ist g Ω-bandbeschränkt und $h \leq \frac{\pi}{\Omega}$, so ist für $|\sigma| \leq \Omega$

$$(I_h g)^\wedge(\sigma) = \hat{g}(\sigma)\left(\mathrm{sinc}\ (\frac{\sigma h}{2})\right)^k \ .$$

Aufgabe 36: (8 Punkte)
Sei $g = Rf$ mit der zweidimensionalen Radon-Transformation R und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ verschwinde außerhalb $|x| \leq \rho$. Sei $v \in L_1(\mathbb{R}^1)$.

(a) Zeigen Sie:

$$\frac{\pi}{p}\sum_{j=1}^{p}(v * g)(\theta_j, x\cdot\theta_j) = (V_p * f)(x) \ ,$$

$$V_p(x) = \frac{\pi}{p}\sum_{j=1}^{p} v(x\cdot\theta_j)$$

(b) Berechnen Sie nummerisch $V_p(x)$ für $v = v_\Omega$ aus §1 mit dem Ram-Lak-Filter. Wählen Sie $\Omega = 64$, $p = 16$, $\theta_j = (\cos\varphi_j, \sin\varphi_j)^T$, $\varphi_j = \pi j/p$, $j = 0,\ldots,p-1$ und stellen Sie $V_p(x)$ für $|x_i| \leq 1$, $i = 1,2$, graphisch dar.