Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, MSc. Marcel Koch 11.01.2018

Übung zur Vorlesung

Wissenschaftliches Rechnen

WS 2017/18 — Blatt 12

Abgabe: 18.01.2018, 10:00 Uhr, Briefkasten 111
Code zusätzlich per e-mail an `marcel.koch@uni-muenster.de`

Aufgabe 1 (Symmetrie des Spannungstensors) (4 Punkte)

Das Drehmoment in einem Volumen V ist gegeben durch

$$M = \int_V r \times (\varrho f)\, dx + \int_{\partial V} r \times (\sigma n)\, ds.$$

Dabei ist r der Ortsvektor zu einem Punkt.

(a) Bezeichne σ_i die i-te Spalte von σ. Zeigen Sie

$$r \times (\sigma n) = (r \times \sigma_1 \quad r \times \sigma_2 \quad r \times \sigma_3) \cdot n,$$

wobei $(\cdot)$ eine Matrix meint.

(b) Verwenden Sie den Satz von Gauß um zu zeigen dass

$$M = \int_V r \times (\varrho f + \nabla \cdot \sigma)\, dx + \int_V \frac{\partial r}{\partial x} \times \sigma_1 + \frac{\partial r}{\partial y} \times \sigma_2 + \frac{\partial r}{\partial z} \times \sigma_3\, dx.$$

(c) Wenn keine Kräfte auf die Flüßigkeit wirken, also $\varrho f + \nabla \cdot \sigma = 0$, so befindet sie sich im Gleichgewicht und das Drehmoment M ist 0. Zeigen Sie, dass daraus die Symmetrie des Spannungstensors folgt.

Aufgabe 2 (Strömung durch ein Rohr) (4 Punkte)

Wir möchten die Strömung einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit durch ein Rohr

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x_1 < L,\ x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$$

mit Länge $L \in \mathbb{R}^+$ und Radius $R \in \mathbb{R}^+$ beschreiben.

Lösen Sie das stationäre Navier-Stokes-System

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v &= 0, \\ \varrho\, (v \cdot \nabla) v - \mu\, \Delta v &= -\nabla p, \end{aligned}$$

in Ω mit Randbedingungen $p(x) = p_1 \in \mathbb{R}$ für $x_1 = 0$, $p(x) = p_2 \in \mathbb{R}$ für $x_1 = L$ und $v(x) = 0$ für $x_2^2 + x_3^2 = R^2$. Verwenden Sie dazu den Ansatz

$$v(x) = w(r(x))\, e_1 \quad \text{mit} \quad r(x) = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \qquad \text{sowie} \qquad p(x) = q(x_1),$$

mit Funktionen $w, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tipps: Der Ansatz führt zu einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung in w, deren Lösung Sie von Hand, aber auch gerne mit dem Computer (`www.wolframalpha.com`, …) bestimmen können. Über die Symmetrieeigenschaften des Ansatzes für v und die Stetigkeit des Spannungstensors erhalten Sie die Bedingung $w'(0) = 0$.

Aufgabe 3 (Navier-Stokes-Operator, Divergenz-Theorem) (4 Punkte)

In einem Gebiet Ω sei (v, p) eine glatte Lösung der homogenen Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Fluide:

$$\varrho\, \partial_t v + \varrho\, (v \cdot \nabla) v - \mu\, \Delta v + \nabla p = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{1a}$$

$$\nabla \cdot v = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{1b}$$

$$v = 0 \qquad \text{auf} \quad \Gamma = \partial\Omega. \tag{1c}$$

Wir nehmen dabei an, dass die Massendichte ϱ und die dynamische Viskosität μ positive Konstanten sind. Zeigen Sie

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \frac{\varrho}{2} |v|^2 \, dx \right) + \int_\Omega \mu |Dv|^2 \, dx = 0,$$

wobei $|Dv|^2 = \sum_{i=1}^3 |\nabla v_i|^2$. Diese Gleichung zeigt, dass die kinetische Energie in einem inkompressiblen Fluid, auf das keine äußeren Kräfte wirken, nicht zunehmen kann.

Tipp: Multiplizieren Sie Gleichung (1a) *mit v und verwenden Sie das Divergenz-Theorem auf eine geeignete Art und Weise.*