Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, MSc. Marcel Koch 19.10.2017

Übung zur Vorlesung

Wissenschaftliches Rechnen

WS 2017/18 — Blatt 2

Abgabe: 26.10.2017, 10:00 Uhr, Briefkasten 111
Code zusätzlich per e-mail an `marcel.koch@uni-muenster.de`

Definition 1 (Heun-Verfahren)

Gegeben sei ein Anfangswertproblem (AWP) 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y), \qquad \text{auf} \quad I := [t^0, T], \qquad && t^0, T \in \mathbb{R}_0^+, \\ y(t^0) &= y^0, && y^0 \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

mit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $n \in \mathbb{N}$. Auf I sei $I_{\Delta t} := \{t^k = t^0 + k\Delta t \mid k = 0,1,2,\ldots \ \wedge \ t^k \leq T\}$ ein gewähltes Gitter mit zugehöriger Schrittweite $\Delta t \in \mathbb{R}^+$. Dann liefert die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} \tilde{y}^{k+1} &= y^k + \Delta t f(t^k, y^k), \\ y^{k+1} &= y^k + \tfrac{\Delta t}{2}\Big(f(t^k, y^k) + f(t^{k+1}, \tilde{y}^{k+1})\Big), \quad k = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

Approximationen $y^k \approx y(t^k)$ der Lösung des AWPs. Für autonome gewöhnliche Differentialgleichungen $y' = f(y)$ mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ reduziert sich die Iterationsvorschrift analog zum expliziten Euler-Verfahren, siehe Blatt 1.

Aufgabe 1 (Energieerhaltung) (4 Punkte)

Neben der Konsistenzordnung können auch Erhaltungseigenschaften von Verfahren für die Qualität einer numerischen Lösung wichtig sein. Wir betrachten die *allgemeine Pendelgleichung*

$$my''(t) + k(y(t)) = 0, \quad y(0) = y^0, \quad y'(0) = v^0 \tag{1}$$

mit nichtlinearer Rückstellkraft $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Masse $m \in \mathbb{R}^+$, Anfangsauslenkung $y^0 \in \mathbb{R}$ und Anfangsgeschwindigkeit $v^0 \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass im linearen Fall $k(y) = \kappa y$, $\kappa \in \mathbb{R}^+$, für die Lösung der Pendelgleichung die Gesamtenergie

$$E(y, y') := \frac{1}{2} m (y')^2 + \frac{1}{2} \kappa y^2$$

in der Zeit konstant bleibt.

(b) Im nichtlinearen Fall ist die Gesamtenergie gegeben durch

$$E(y, y') := \frac{1}{2} m (y')^2 + \int_0^y k(\eta)\, d\eta.$$

Zeigen Sie, dass auch im nichtlinearen Fall für die Lösung der Pendelgleichung die Gesamtenergie in der Zeit konstant bleibt.

(c) Betrachten Sie das Heun-Verfahren zur Diskretisierung des autonomen AWPs (1) im linearen Fall. Untersuchen Sie, ob die Gesamtenergie näherungsweise erhalten wird, d.h. berechnen Sie

$$E\big[y(t^{n+1}), y'(t^{n+1})\big] - E\big[y(t^n), y'(t^n)\big].$$

Aufgabe 2 (Symplektizität) (2 Punkte)

Wir betrachten den linearen Fall der Pendelgleichung (1). Zeigen Sie, dass das Heun-Verfahren angewandt auf das zu dieser Gleichung äquivalente AWP 1. Ordnung nicht symplektisch ist.

Tipp: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das explizite Euler-Verfahren angewandt auf das dort betrachtete (entdimensionalisierte) mathematische Pendel nicht symplektisch ist. Sie können analog zur Vorlesung vorgehen. Überlegen Sie sich zunächst, wie der numerische Fluß $\Phi_{heun,\Delta t} : (y^k, v^k) \mapsto (y^{k+1}, v^{k+1})$ *aussieht.*

Aufgabe 3 (Energieerhaltung) (6 Punkte)

Wir betrachten wieder die allgemeine Pendelgleichung (1). Ist y die von uns bislang als φ bezeichnete Winkelauslenkung eines ebenen Pendels, so ist

$$my''(t) + m\frac{g}{l}\sin(y(t)) = 0, \quad y(0) = y^0, \quad y'(0) = v^0$$

die zugehörige Bewegungsgleichung, die wir in der Vorlesung sowie auf Blatt 1 als mathematisches Pendel kennengelernt haben. Für die Schwerebeschleunigung und die Pendellänge gelte $g/l = 1$. Anhand diesem Beispiel soll die Energieerhaltung der Heun-Verfahren experimentell getestet werden.

(a) Diskretisieren Sie das mathematische Pendel bzw. das zu diesem äquivalente Anfangswertproblem 1. Ordnung mit dem Heun-Verfahren und implementieren Sie das resultierende Computermodell in C++. Orientieren Sie sich dabei an der Umsetzung des explizten Euler-Verfahren von Blatt 1.

(b) Wählen Sie $y^0 = 1$, $v^0 = 0$ und als Schrittweite $\Delta t = 0.1$. Rechnen Sie bis $T = 1000$ und plotten Sie den Verlauf der numerischen Lösung in der (y, y')-Ebene, d.h. im sogenannten *Phasenraum.* Stellen Sie zusätzlich die diskrete Energie $E[y(t^n), y'(t^n)]$ anschaulich dar. Beschreiben Sie welche Ergebnisse Sie von einem energieerhaltenenden Verfahren erwarten und vergleichen Sie dies mit den Plots des Heun-Verfahrens.