Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 19.06.2012
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Dipl. Math. Dipl. Inf. Sebastian Westerheide

---

Übung zur Vorlesung

Wissenschaftliches Rechnen

SS 2012 — Blatt 8

Abgabe: 02.07.2012, 10:00 Uhr, Briefkasten 89
Code zusätzlich per e-mail an `sebastian.westerheide@uni-muenster.de`

Aufgabe 1 (Burgersgleichung) (8 Punkte)

Betrachten Sie die eindimensionale nicht-viskose Burgersgleichung

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x \left(u^2\right) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ &u(x,0) = u_0(x) \end{aligned} \tag{1}$$

mit den Anfangswerten

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(a) Diskretisieren Sie Gleichung (1) mit Finiten Differenzen (schriftlich):

- Benutzen Sie ein äquidistantes Gitter auf $\mathbb{R}$ mit Gitterweite h
- Verwenden Sie die feste Zeitschrittweite Δt
- Verwenden Sie für die Ortsdiskretisierung den zentralen Differenzenquotienten

$$\partial_x f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

- Verwenden Sie für die Zeitdiskretisierung das explizite Eulerverfahren
- Bezeichnen Sie die Approximation von u mit $u_j^n \approx u(jh, n\Delta t)$

Zeigen Sie, dass sich die Unstetigkeit in den gegeben Anfangswerten u_0 mit dieser Diskretisierung im zeitlichen Verlauf nicht bewegt.

(b) Implementieren Sie zum Vergleich das zellzentrierte Finite–Volumen–Verfahren

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{h}\Big(\mathcal{F}(u_i^n, u_{i+1}^n) - \mathcal{F}(u_{i-1}^n, u_i^n)\Big)$$

mit der auf Gleichung (1) abgestimmten Flussfunktion

$$\mathcal{F}(u_i^n, u_{i+1}^n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(u_i^n)^2, & s = \frac{1}{2}u_i^n + u_{i+1}^n \geq 0, \\ \frac{1}{2}(u_{i+1}^n)^2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Benutzen Sie im Ort ein äquidistantes Gitter auf $[-5, 5]$ mit frei wählbarer Gitterweite h
- Verwenden Sie die frei wählbare, feste Zeitschrittweite Δt und den frei wählbaren Endzeitpunkt T
- Plotten Sie jeweils nach einer festen Anzahl von Zeitschritten das Ergebnis in den Mittelpunkten der Gitterzellen

Hinweis: Beim zellzentrierten FV–Verfahren ist die Lösung stückweise konstant im Ort, d.h. $u_i^n \approx u(\cdot, n\Delta t)|_{[-5+ih, -5+(i+1)h]}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

(c) Vergleichen Sie die Lösungen beider Diskretisierungsverfahren. Was beobachten Sie?