
Übung zur Vorlesung
Wissenschaftliches Rechnen
SS 2012 — Blatt 3

Abgabe: 15.05.2012, 10:00 Uhr, Briefkasten 89

Code zusätzlich per e-mail an `sebastian.westerheide@uni-muenster.de`

Laden Sie sich die neueste Version des Programmskeletts zum n -Körper-Problem von der Vorlesungshomepage, welche wir kurz `nbody` betiteln wollen. Schauen Sie sich noch einmal genauer an, wie die Daten repräsentiert werden (insbesondere Position, Beschleunigung und Masse der Körper) und wo die Prozedur `acceleration` (...) aufgerufen wird.

Aufgabe 1 (Implementierung der Beschleunigungsberechnung) (6 Punkte)

- (a) Implementieren Sie in der Datei `acceleration.cc` die Prozedur `acceleration` zur Berechnung der Beschleunigungen $a_i := \sum_{j \neq i} \frac{1}{m_i} F_{ij}$ mit

$$F_{ij} := G \frac{m_i m_j}{\|r_j - r_i\|^2} \frac{r_j - r_i}{\|r_j - r_i\|}.$$

Nutzen Sie zur Steigerung der Performance die Symmetrie $F_{ij} = -F_{ji}$ aus und weichen Sie die Norm im Nenner auf, um einer Division durch null vorzubeugen.

- (b) Einen weiteren Performancegewinn gegenüber der Implementierung aus (a) kann man durch sogenannte Blockbildung (Tiling) erreichen. Dabei werden die N Körper zunächst über Ihre Indizes $I := \{0, \dots, N-1\}$ in $M := \lceil N/B \rceil$ Blöcke einer bestimmten Größe B zusammengefasst¹:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \{0, \dots, B-1\}, \\ I_2 &:= \{B, \dots, 2B-1\}, \\ &\vdots \\ I_k &:= \{(k-1)B, \dots, kB-1\}, \\ &\vdots \\ I_{M-1} &:= \{(M-2)B, \dots, (M-1)B-1\}, \\ I_M &:= \{(M-1)B, \dots, \min(MB-1, N-1) = N-1\}. \end{aligned}$$

¹Beachten Sie, dass der letzte Block in den meisten Fällen echt weniger als B Körper enthalten wird. Es gilt $\#\{I_M\} \leq B$.

Mit Hilfe dieser Blockstruktur lässt sich die auf einen Körper i wirkende Beschleunigung wie folgt ausdrücken:

$$a_i = \sum_{k=1}^M a_i^{I_k} \quad \text{mit} \quad a_i^{I_k} := \sum_{j \in I_k, j \neq i} \frac{1}{m_i} F_{ij}.$$

Zur Steigerung der Performance wird die Beschleunigung nun zunächst für alle Körper $i \in I_1$ bestimmt, indem sukzessive die Anteile $\{a_i^{I_1}\}_{i \in I_1}, \{a_i^{I_2}\}_{i \in I_1}, \dots, \{a_i^{I_M}\}_{i \in I_1}$ berechnet und aufsummiert werden. Dann wird analog die Beschleunigung für alle Körper $i \in I_2$ bestimmt, anschließend für alle Körper $i \in I_3$, usw.

Kopieren Sie Ihren Code aus (a) in eine Datei `acceleration_old.cc` und implementieren Sie in der Datei `acceleration.cc` die geblockte Variante der Beschleunigungsberechnung. Nutzen Sie dabei analog zu (a) die Symmetrie $F_{ij} = -F_{ji}$ aus und weichen Sie die Norm im Nenner auf.

Aufgabe 2 (Caches und Blockbildung) (6 Punkte)

Betrachten Sie `nbody` mit der in Aufgabe 1 (b) implementierten geblockten Variante der Beschleunigungsberechnung auf einem System mit einem zweistufigen Cache, der einem einzelnen Prozessorkern zugeordnet ist. Der L1-Datencache besitze die Größe 32 Kilobyte (1 Kilobyte = 1024 Byte), aufgeteilt in 128 Cachezeilen. Der 256 Kilobyte große L2-Datencache sei in ebenso viele Cachezeilen aufgeteilt. Die Größe eines einzelnen Werts vom Typ `double` betrage 8 Byte. Wir betrachten Probleme der Größe $N > 10000$ Körper.

- (a) Wieso kann die Beschleunigungsberechnung durch Blockbildung mit einer geeignet gewählten Blockgröße B schneller gemacht werden, woher kommt der Performancegewinn? Welche der folgenden 4 Blockgrößen sollte bei einem vollassoziativen L1-Datencache gewählt werden?

- $B = 10$
- $B = 30$
- $B = 350$
- $B = 2750$

Begründen Sie Ihre Wahl genau. Erläutern Sie insbesondere warum die drei anderen Blockgrößen von Nachteil sind.

- (b) Was ändert sich bei einem 4-fach assoziativen L1-Datencache?
- (c) Kann der Algorithmus unter den Voraussetzungen aus (a) (d.h. bei Verwendung eines vollassoziativen Caches mit optimaler Blockgröße) mit ähnlichen Mitteln noch weiter verbessert werden?
- (d) Was passiert, wenn der L1-Datencache in nur 2 Cachezeilen der 64-fachen Länge aufgeteilt wird?
- (e) Lösen Sie sich gedanklich vom betrachteten Modellsystem und informieren Sie sich über die Cachehierarchie in dem von Ihnen verwendeten Computer. Wählen Sie die Blockgröße in Ihrem Code aus Aufgabe 1 (b) geeignet. Begründen Sie Ihre Wahl auf eine nachvollziehbare Art und Weise.