Universität Münster

Übungsaufgaben Partielle Differentialgleichungen I, SS 2015

Dozent: Prof. Dr. Angela Stevens, Übungen: Dr. Annibale Magni

Übungsblatt 11, 26.06.2015

Abgabe. Freitag 03.07.2015, bis 10 Uhr.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $L : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$L(v,x) := \frac{v_1^2}{2(a+bx_2^2)} + \frac{1}{2}v_2^2 - cx_2^2\,,$$

wobei $a, b, c \in \mathbf{R}$ positive Konstanten sind, $v = (v_1, v_2)$ und $x = (x_1, x_2)$. Lösen sie die zu L assoziierten Euler-Lagrange Gleichungen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $I := [0,1]$ und $f \in C^0(I)$. Für alle $u \in C^0(I)$, mit $u(0) = u(1) = 0$, gelte

$$\int_I f(x)u(x)\,dx = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in I$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $f \in C^\infty(\underbrace{\mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{(n+1)-\mathrm{mal}})$ und definiere $\mathcal{I} : X \to \mathbf{R}$ durch

$$\mathcal{I}(u) := \int_{[a,b]} f(u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x))dx\,,$$

wobei $X = \{u \in C^\infty([a,b]),\ \text{mit } u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0,\ \text{für } k = 0, \ldots, n-1\}$. Besitze $\mathcal{I}$ einen stationären Punkt in X. Leiten Sie die entsprechenden Euler-Lagrange Gleichungen her (i.e. die Gleichungen, die ein solcher stationärer Punkt erfüllt).

Hier bezeichnet $u^{(l)}(x)$ die $l-$te Ableitung der Funktion u an der Stelle x.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $A \subset \mathbf{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Sei die Hopf-Lax Formula auf das folgende Problem anwendbar:

$$\begin{cases} u_t + |Du|^2 = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbf{R}^n \\ u(0,x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ +\infty & x \in \mathbf{R}^n \setminus A \end{cases} & \text{auf } \{0\} \times \mathbf{R}^n \end{cases}\,. \tag{1}$$

Schliessen Sie, dass die Lösung von (1)

$$u(t,x) = \frac{(\mathrm{dist}(x,A))^2}{4t}$$

ist, wobei für $x \in \mathbf{R}^n$, $\mathrm{dist}(x,A) := \inf_{y \in A} |x-y|$.

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Weisen Sie im Beweis von Theorem (4.34) in der Vorlesung detalliert nach, dass

$$D^2u^\epsilon\,, D^2\tilde{u}^\epsilon \leq C\Big(1+\frac{1}{s}\Big)I \tag{2}$$

und

$$\operatorname{div} b_\epsilon = \int_0^1 \sum_{k,l=1}^n H_{p_kp_l}(rDu^\epsilon{+}(1{-}r)D\tilde{u}^\epsilon)(ru^\epsilon_{x_lx_k}{+}(1{-}r)\tilde{u}^\epsilon_{x_lx_k})dr \leq C\Big(1{+}\frac{1}{s}\Big)\,, \tag{3}$$

wobei C eine Konstante ist.