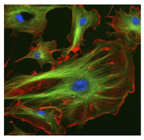
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Dr. Christoph Brune
Dipl.-Math. Pia Heins

Übungen zur Vorlesung

Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2012/13 — Blatt 9, Abgabe: Di. 18.12., 10 Uhr, BK 39



Aufgabe 1 (Subdifferentiale und Optimalität) (5 Punkte)

Gegeben seien die Funktionale (für $\alpha > 0$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ regulär):

$$\begin{aligned} J_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad u \mapsto \frac{1}{2}(u-f)^2 + \alpha|u| \\ J_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad u \mapsto |u-f| + \alpha u^2 \\ J_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\qquad u \mapsto \frac{1}{2}\|Au-f\|_{\ell^2}^2 + \alpha\|u\|_{\ell^2} \end{aligned}$$

Führen Sie für die Optimierungsprobleme

$$J_i(u) \to \min_u$$

folgende Analyse durch:

(i) *Zeigen Sie*, dass jeweils ein Minimum existiert (nutzen Sie hierfür den Fundamentalsatz der Optimierung) und eindeutig ist.
Hinweis: *Begründen Sie* kurz, warum bei der Betrachtung der Sublevelsets die Datenterme vernachlässigt werden können.

(ii) *Berechnen Sie* die Optimalitätsbedingungen und daraus (mit Fallunterscheidungen) eine Lösungformel abhängig von f.
Hierbei gilt für $p \in \partial \|u\|_{\ell^2}$

$$p \begin{cases} = \frac{u}{\|u\|_{\ell^2}} & \text{für } u \neq 0 \\ \in \mathrm{B}_1(0) & \text{für } u = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass bei J_3 keine explizite Lösungsformel angebbar ist. Verwenden Sie deshalb die Substitution $c := \frac{\alpha}{\|u\|_{\ell^2}}$ und geben Sie eine Lösungsformel in Abhängigkeit von c und f an.

Aufgabe 2 (Fenchel-duale Probleme) (5 Punkte)

Betrachten Sie erneut die Funktionale J_i mit $i = 1, 2, 3$ aus Aufgabe 1 und die zugehörigen Optimierungsprobleme

$$J_i(u) \to \min_u \; .$$

Berechnen Sie hierzu die jeweiligen Fenchel-dualen Probleme.

Aufgabe 3 (Anisotrope Totalvariation) (5 Punkte)

Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$. In der Vorlesung wurde beim Übergang vom Sobolevraum $W^{1,1}(\Omega)$ auf den größeren Raum $BV(\Omega)$ auch der Übergang von der ℓ^2-basierten *isotropen* L^1-Regularisierung des Gradienten

$$\int_\Omega |\nabla u|_{\ell^2} \, dx = \int_\Omega \sqrt{|\partial_{x_1} u|^2 + |\partial_{x_2} u|^2} \, dx$$

auf die exakte Definition der Totalvariation in $BV(\Omega)$

$$|u|_{BV} := \sup_{\substack{\varphi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^2) \\ ||\varphi||_{L^\infty} \leq 1}} \int_\Omega u \, \nabla \cdot \varphi \, dx.$$

erläutert (vgl. Kap. 4.2, insb. Lemma 4.2.2 + Beweis, ff.). Im isotropen Fall ist die L^∞-Norm in der Nebenbedingung definiert als $||\varphi||_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |\varphi(x)|_{(\ell^2)^*} \leq 1$. In Analogie zur schwachen Formulierung im Skript, kann diese Nebenbedingung im isotropen Fall geschrieben werden als

$$\varphi \in W_{iso} := \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \varphi, n \rangle \leq |n|_{\ell^2} = \sqrt{|n_1|^2 + |n_2|^2}, \ \forall n \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^2 \mid |\varphi|_{(\ell^2)^*} \leq 1 \right\},$$

wobei $\int_\Omega |n|_{\ell^2} = \sup\limits_{\varphi \in W_{iso}} \langle \varphi, n \rangle$ mit $n := \nabla u$ gilt.

Leiten Sie analog zur anisotropen Regularisierung in $W^{1,1}(\Omega)$, d.h.

$$\int_\Omega |\nabla u|_{\ell^1} \, dx = \int_\Omega |\partial_{x_1} u| + |\partial_{x_2} u| \, dx$$

die passende *exakte* Definition der *anisotropen* Totalvariation im Raum $BV(\Omega)$ her. Geben Sie intuitiv eine *geometrische Interpretation* dieser unterschiedlichen Regularisierungsterme an.

Aufgabe 4 (Laplace-Rauschen mit quadratischer Regularisierung) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und $f \in L^1(\Omega)$ mit $\int_\Omega f = 0$. Wir betrachten das Variationsmodell

$$J_\alpha(u) = \int_\Omega |u - f| \, dx + \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \to \min_{u \in W_\diamond^{1,2}(\Omega)}, \tag{2}$$

wobei

$$W_\diamond^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega), \int_\Omega u = 0\} \tag{3}$$

der Banachraum mit der Norm

$$\|u\| := \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2} \tag{4}$$

ist. *Zeigen Sie*

(i) Die Lösung existiert und ist eindeutig.

(ii) Die Optimalitätsbedingung ist gegeben durch

$$p(x) - \alpha \nabla \cdot (\nabla u(x)) = 0 \qquad x \in \Omega,$$

mit (n der Einheitsnormalenvektor)

$$\nabla u(x) \cdot n(x) = 0 \qquad x \in \partial\Omega$$

und $p(x) \in [-1, 1]$ sodass

$$p(x)|u(x) - f(x)| = (u(x) - f(x)) \, .$$

(iii) Sei u_α das Minimum abhängig von α. Zeigen sie für $f \in W^{1,2}_\diamond$ und $\alpha \to 0$ gilt $u_\alpha \rightharpoonup f$ und

$$J_\alpha(u) \to \int_\Omega |u - f|$$

für alle $u \in W^{1,2}_\diamond$.

(iv) Sei u_α das Minimum abhängig von α. Zeigen sie für $\alpha \to \infty$ gilt $u_\alpha \to 0$ und

$$\frac{2}{\alpha} J_\alpha(u) \to \int_\Omega |\nabla u|^2$$

für alle $u \in W^{1,2}_\diamond$.