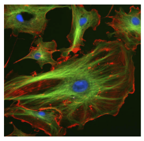
Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Dr. Christoph Brune
Dipl.-Math. Pia Heins

Übungen zur Vorlesung

Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2012/13 — Blatt 8, Abgabe: Di. 11.12., 12 Uhr, BK 39



Aufgabe 1 (Sparse Signale und Entrauschung) (5 Punkte)

(a) Betrachten Sie das Tikhonov Funktional zu Entrauschung:

$$\min_x \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2 \tag{1}$$

- *Geben Sie* die Lösung von (1) explizit an.
- *Generieren Sie* in Matlab einen zufälligen 1x128 Vektor mit 5 Nicht-Null-Koeffizienten. *Fügen sie* Gauß'sches Rauschen mit Standardabweichung $\sigma = 0.05$ hinzu. *Nutzen Sie* dies als Daten y. *Entrauschen Sie* y mit der Lösungsformel von (1).
- *Beobachten Sie* was für die verschiedenen Regularisierungsparameter $\lambda = \{0.01, 0.05, 0.1, 0.2\}$ passiert. *Betrachten Sie* insbesondere $\lambda = 0.1$. *Ist die Lösung sparse?*

(b) Betrachten Sie nun folgendes Funktional zur Entrauschung:

$$\min_x \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \tag{2}$$

- *Zeigen Sie,* dass die Lösung von (2) wie folgt aussieht:

$$\hat{x} = \mathrm{sign}(y) \max(|y| - \alpha, 0) \tag{3}$$

  Der eintretende Effekt wird auch als *Soft-Thresholding* oder *Shrinkage* bezeichnet.
- *Schreiben Sie* eine Funktion `SoftThresh.m` mit Eingaben y und λ und Ausgabe $\hat{x}$. *Plotten Sie* es für $y \in [-10, 10]$ und $\lambda = 2$. *Beschreiben Sie* was passiert, wenn $y \ll \lambda$ und wenn y groß ist.
- *Wenden Sie* `SoftThresh.m` auf das verrauschte Signal y aus Aufgabenteil (a) für die verschiedenen Regularisierungsparameter $\lambda = \{0.01, 0.05, 0.1, 0.2\}$ an. *Betrachten Sie* insbesondere $\lambda = 0.1$. *Ist die Lösung sparse?*

Aufgabe 2 (Duale Funktionale) (5 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden primalen Funktionale $J : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die konvex Konjugierten, d. h. die dualen Funktionale $J^* : X^* \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

(a) $J(u) = \|u\|_{L^2(\Omega)}$

(b) $J(u) = \frac{\alpha}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$

(c) $J(u) = \|u\|_{L^1(\Omega)}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass in der dualen Formulierung durch das Supremum in der Hölder-Ungleichung Gleichheit gilt.

Aufgabe 3 (Biduale Funktionale) (5 Punkte)

Wir betrachten zwei Funktionale $H : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $J : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $H \leq J$.
Zeigen Sie, dass dann auch für die bidualen Funktionale $H^{**} : X^{**} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $J^{**} : X^{**} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt $H^{**} \leq J^{**}$.

Aufgabe 4 (Subdifferentiale) (5 Punkte)

Berechnen Sie das Subdifferential $\partial f(x)$ der folgenden Funktionen.

(a) Der euklidischen Norm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|_2$.

(b) Der Indikatorfunktion des positiven Quadranten,

$$f = \chi_K, \quad \text{mit} \quad K := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_j \geq 0, \ \text{für alle } 1 \leq j \leq n\} \ .$$

Aufgabe 5 (Fréchet-Ableitungen) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die *Fréchet-Ableitungen* der folgenden Funktionale:

(a) $$J(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (L^2\text{-Regularisierung}) \ ,$$

wobei $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

(b) $$J(u) = \frac{1}{2} \|Ku - f\|^2_{L^2(\Sigma)} \qquad (L^2\text{-Datenterm mit Operator}) \ ,$$

wobei $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Sigma)$ linearer kompakter Operator, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und $f : \Sigma \to \mathbb{R}$.

(c) $$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \|\partial_t f + \nabla \cdot (f\mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega \times [0,T])} \qquad (L^2\text{-Datenterm Masseerhaltung}) \ ,$$

wobei f hier im Vergleich zu (a) und (b) eine Bildsequenz darstellt, d.h. $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{v}$ eine gesuchtes Vektorfeld bezeichne, d.h. $\mathbf{v} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^2$.

Hinweis:
Bei diesem Zettel werden maximal 20 Punkte gewertet.