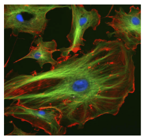
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Dr. Christoph Brune
Dipl.-Math. Pia Heins

Übungen zur Vorlesung

Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2012/13 — Blatt 7, Abgabe: Di. 27.11., 12 Uhr, BK 39



Aufgabe 1 (Dynamik: Registrierung und Optischer Fluss) (5 Punkte)

Das Ziel dieser Aufgabe ist der Zusammenhang zwischen Variationsmethoden zur Registrierung und Variationsmethoden zur Berechnung des optischen Flusses. Gegeben sei das folgende Variationsproblem bestehend aus einem L^2-Datenterm zwischen Referenz- und Templatebild

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (f_T(\mathbf{y}(x)) - f_R(x))^2 \, dx \quad \to \min_{\mathbf{y}} \; . \tag{1}$$

Wir suchen bei diesem Problem eine optimale Gittertransformation $\mathbf{y}(x)$. Zum Vergleich betrachten wir das folgende Variationsproblem

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u(x,1) - f_R(x))^2 \, dx \;\to\; \min_{\mathbf{v}} \; , \tag{2}$$

wobei $u \in \Omega \times [0,1]$ die Lösung der Anfangswertaufgabe mit dem *optical flow constraint* (Bewegungsgleichung)

$$\begin{aligned} \partial_t u + \mathbf{v}(x)\cdot\nabla u &= 0 \\ u(x,0) &= f_T(x) \qquad \text{(Anfangswert)} \end{aligned} \tag{3}$$

darstellt. Bei diesem Problem, bestehend aus (2) und (3), suchen wir ein optimales Bewegungsfeld (optischer Fluss) $\mathbf{v}$.

Zeigen Sie: Zu jedem Vektorfeld $\mathbf{v}$, das (2) unter (3) löst, existiert eine Gittertransformation $\mathbf{y}$ als Lösung des Registrierungsproblems in (1).

Hinweis: Charakteristikenmethode. Partielle Differentialgleichungen 1.Ordnung können mit der Charakteristiken-Methode gelöst werden. Eine Charakteristik ist eine Lösung u einer partiellen Differentialgleichung entlang einer Kurve $t \mapsto y(t)$ und kann durch die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung für die Funktion $t \mapsto z(t) := u(y(t),t)$ bestimmt werden. Betrachtet man eine Anfangswertaufgabe, so wird für jeden Punkt der Anfangskurve eine Charakteristik durch diesen Punkt bestimmt. Fügen sich diese Charakteristiken zu einer Fläche zusammen, so wird dies eine Lösungsfläche der partiellen Differentialgleichung.
Strategie hier: Betrachten Sie $\frac{d}{dt}y(x,t) = \mathbf{v}(y(x,t),t))$ mit Anfangswert $y(x,0) = x$, sowie $\frac{d}{dt}z(x,t)$ für $z(x,t) := u(y(x,t),t)$.

Aufgabe 2 (Statistische Modellierung von Datentermen) (5 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie bei Daten mit *additivem Gauss'schen Rauschen* und einem Gibbs-Modell bzgl. R für die a priori Wahrscheinlichkeit ein kontinuierliches Variationsproblem modelliert werden kann, das aus einem L^2-*Datenterm* und einem Regularisierungsterm $R(u)$ besteht. Führen Sie analog eine Modellierung für *Poisson*- und *multiplikatives Gamma*-Rauschen durch:

(a) *Zeigen Sie*, dass wenn die diskreten gegebenen Daten F_{ij} Realisierungen von paarweise unabhängig und identisch *Poisson-verteilten* Zufallsvariablen mit Erwartungswert U_{ij} sind, d.h.

$$\rho_{\mathbb{P}}(F \mid U) = \prod_{ij} \frac{{U_{ij}}^{F_{ij}}}{F_{ij}!} e^{-U_{ij}} \ ,$$

und wenn wir analog eine Gibbs-Verteilung als a priori Wahrscheinlichkeit annehmen, *dann führt dies* zu folgendem Variationsproblem

$$\int_{\Omega} (f \log \frac{f}{u} - f + u) \ dx \ + \ \alpha \, R(u) \ \to \ \min_{u} \ .$$

(b) Im Fall von multiplikativem *Gamma*-Rauschen, d.h. $F_{ij} = U_{ij} \cdot \delta_{ij}$, wobei δ_{ij} Realisierungen von *Gamma-verteilten* Zufallsvariablen mit Erwartungswert 1 für das Rauschen darstellen, so erhält man die folgende bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho_{\mathbb{P}}(F \mid U) = \prod_{ij} \frac{n^n}{U_{ij}^n \, \Gamma(n)} F_{ij}^{n-1} e^{-n \frac{F_{ij}}{U_{ij}}} \ ,$$

wobei $n := nx * ny$ die Anzahl an Pixeln der gegebenen diskreten Daten und Γ die Gammafunktion bezeichnet. Wenn wir auch hier analog eine Gibbs-Verteilung als a priori Wahrscheinlichkeit annehmen, dann *zeigen Sie*, dass dies zu folgendem Variationsproblem führt

$$\int_{\Omega} (\log u + \frac{f}{u}) \ dx \ + \ \beta \, R(u) \ \to \ \min_{u} \ .$$

Aufgabe 3 (Exakte Rekonstruktion bei Sparsity) (5 Punkte)

Betrachten Sie das diskrete Variationsproblem

$$a_\lambda = \arg\min_{a} \ \frac{1}{2} \, \|Ba - f\|_{\ell^2}^2 + \lambda \, \|a\|_{\ell^1} \tag{4}$$

mit gegebenen Daten $f \in \mathbb{R}^M$ und zu rekonstruierenden Koeffizienten $a \in \mathbb{R}^N$. Hierbei enthalte die Matrix (*Dictionary*) $B \in \mathbb{R}^{M \times N}$ als Spalten die Basisvektoren b_n.
Die Idee ist, das Signal f mit nur sehr wenigen Koeffizienten a_n zu repräsentieren (*Sparsity*).

Sei nun die exakte Lösung $\hat{a} := e_j$ ein Peak und f die zugehörigen Daten, d. h. $f := Be_j = b_j$.
Zeigen Sie: Falls gilt

$$\|b_n\|_{\ell^2} = 1 \quad \text{ und } \quad |\langle b_n, b_m \rangle| \leq 1 \text{ für } n \neq m$$

lässt sich die Lösung von (4) exakt (bis auf Kontrastverlust) rekonstruieren lässt, d. h. $a_\lambda = c e_j$, wobei $c = 1 - \lambda$ für $\lambda \in (0, 1)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Optimalitätsbedingung.

Aufgabe 4 (Entrauschung: ROF Modell, Filtermethoden) (5 Punkte)

Verwenden Sie den Matlab Code für das ROF-Modell von der Webseite und eine Filtermethode (z.B. iterativer linearer Filter oder Faltung mit fft) von einem der früheren Übungszettel, um die Bilder aus dem Hörsaal zu entrauschen. Verwenden Sie bei Bedarf zusätzliches additives Gauss'sches Rauschen. Was stellen Sie bei den Texturen bei starker Regularisierung fest?