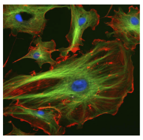
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Dr. Christoph Brune
Dipl.-Math. Jan Hegemann

Übungen zur Vorlesung

Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2012/13 — Blatt 10, Abgabe: Di. 15.01.2013, 12 Uhr, BK 39



Aufgabe 1 (Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen) (5 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Rang $(m < n)$. Wir betrachten das beschränkte Optimierungsproblem

$$F(u) \to \min_u$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} u_i &\geq 0 \quad i = 1, \ldots, n \\ Au &= b\ . \end{aligned}$$

Berechnen Sie für die äquivalente Formulierung

$$J(u) = F(u) + \chi_+(u) + \chi_b(Au)$$

mit

$$\chi_+(u) = \begin{cases} 0 & \text{falls } u_i \geq 0, i = 1, \ldots, n \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases} \qquad \chi_b(Au) = \begin{cases} 0 & \text{falls } Au = b \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

die Optimalitätsbedingung und folgern Sie daraus die sogenannten Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen: Es existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_i \leq 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}^n$ sei Vektor der λ_i) und $\mu \in \mathbb{R}^m$ frei, sodass

$$\begin{aligned} F'(u) + \lambda + A^T\mu &= 0 \\ \lambda_i u_i &= 0\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Lineare Optimierung) (5 Punkte)

Wir betrachten ein lineares Optimierungsproblem

$$c^T u \to \min_u$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} u_i &\geq 0 \quad i = 1, \ldots, n \\ Au &= b\ . \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Rang $(m < n)$. Formulieren Sie dieses Problem analog zu Aufgabe 1 und leiten Sie das Fenchel-duale Problem her. Schreiben Sie dieses wieder als lineares Optimierungsproblem mit linearen Nebenbedingungen.

Aufgabe 3 (First optimize then discretize vs. First discretize then optimize) (5 Punkte)

Für $\Omega = [0, 1]$ betrachten wir das inverse Problem $Ku = f$ mit

$$(Ku)(x) := \int_\Omega k(x, y)u(y)\, dy \ ,$$

Kern $k(x, y) := e^{x-y}$ und gegebenen Daten f. Gegeben sei nun ein einfaches Variationsproblem zur Rekonstruktion bzgl. $u \in L^2(\Omega)$,

$$\frac{1}{2} \|(Ku)(x) - f(x)\|^2_{L^2(\Omega)} \ + \ \frac{\alpha}{2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \ \rightarrow \ \min_{u \in L^2(\Omega)} \ .$$

Behandeln Sie das Problem einmal gemäß der Strategie „*First optimize then discretize*“ und einmal gemäß der Strategie „*First discretize then optimize*“. *Leiten Sie* in beiden Fällen ein *diskretisiertes Gradientenverfahren* her (der Einfachheit halber mit konstanter Zeit-Schrittweite σ). Für eine Diskretisierung im Ort nehmen Sie an, dass Ω in n Intervalle mit Orts-Schrittweite h äquidistant unterteilt wird. Diskretisieren Sie Integrale mit Hilfe der Trapezregel.

Wie *unterscheiden* sich die beiden resultierenden diskreten Algorithmen?

Aufgabe 4 (Gradientenverfahren, Funktionenräume) (5 Punkte)

Gegeben sei ein allgemeines Variationsproblem der Form

$$J(u) := \int_\Omega G(u, \nabla u) dx \ \rightarrow \ \min_{u \in \mathcal{U}(\Omega)}$$

auf einem Hilbertraum $\mathcal{U}(\Omega)$. Ziel dieser Aufgabe ist die Auswirkung der Wahl von Funktionenräumen bei der Strategie „*First optimize then discretize*“ am Beispiel des Gradientenverfahrens zu studieren.

(a) Wenn man der Lösungsstrategie „*First optimize then discretize*“ folgt, erhält man für $\mathcal{U}(\Omega) = L^2(\Omega)$ typischerweise ein Gradientenverfahren bzgl. euklidischer Distanz. Zum Vergleich *folgen Sie* dieser Strategie sowohl für $\mathcal{U}(\Omega) = L^2(\Omega)$ als auch für $\mathcal{U}(\Omega) = H^1(\Omega)$. Wie äußert sich der *Unterschied* der Funktionenräume im resultierenden (diskreten) Gradientenverfahren? (Hinweis: Gradientenfluss in $\mathcal{U}$ und schwache Formulierung)

(b) *Konkretisieren Sie* die allgemeine Betrachtung aus (a) an dem Beispiel

$$G(u, \nabla u) := u^2 + |\nabla u|^2 \ .$$