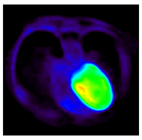
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

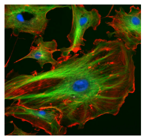
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Martin Burger
Dr. Christoph Brune



Übungen zur Vorlesung

Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2010/11 — Blatt 9, Abgabe: Fr. 17.12., 12 Uhr, BK 86



Aufgabe 1 (Subdifferentiale und Optimalität) (5 Punkte)

Gegeben seien die Funktionale (für $\alpha > 0$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ regulär):

$$\begin{aligned} J_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & u \mapsto \frac{1}{2}(u-f)^2 + \alpha|u| \\ J_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & u \mapsto |u-f| + \alpha u^2 \\ J_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad & u \mapsto \frac{1}{2}\|Au-f\|_2^2 + \alpha\|u\|_2 \end{aligned}$$

Führen sie für die Optimierungsprobleme

$$J_i(u) \to \min_u$$

folgende Analyse durch:

(i) Zeigen sie, dass jeweils ein Minimum existiert und eindeutig ist.

(ii) Berechnen sie die Optimalitätsbedingungen und daraus (mit Fallunterscheidungen) eine Lösungformel abhängig von f.

(iii) Berechnen sie die Fenchel-dualen Probleme.

Aufgabe 2 (Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen) (5 Punkte)

Seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit vollem Rang ($m < n$). Wir betrachten das beschränkte Optimierungsproblem

$$F(u) \to \min_u \tag{1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} u_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, n & (2) \\ Au &= b. & (3) \end{aligned}$$

Berechnen sie für die äquivalente Formulierung

$$J(u) = F(u) + \chi_+(u) + \chi_b(Au) \tag{4}$$

mit

$$\chi_+(u) = \begin{cases} 0 & \text{falls } u_i \geq 0, i = 1, \dots, n \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases} \qquad \chi_b(Au) = \begin{cases} 0 & \text{falls } Au = b \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

die Optimalitätsbedingung her und folgern sie daraus die Karush-Kuhn-Tucker Bedingung: Es existieren $\lambda_i \leq 0$ und $\mu \in \mathbb{R}^m$ sodass (λ der Vektor der λ_i)

$$\begin{aligned} F'(u) + \lambda + A^T\mu &= 0 & (5) \\ \lambda_i u_i &= 0. & (6) \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Lineare Optimierung) (5 Punkte)

Wir betrachten ein lineares Optimierungsproblem

$$c \cdot u \to \min_u \tag{7}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} u_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, k && (8) \\ Au &= b. && (9) \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Rang ($m < n$). Formulieren sie dieses Problem analog zu Aufgabe 2 und leiten sie das Fenchel-duale Problem her. Schreiben sie dieses wieder als lineares Optimierungsproblem mti linearen Nebenbedingungen.

Aufgabe 4 (Laplace-Rauschen mit quadratischer Regularisierung) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und $f \in L^1(\Omega)$ mit $\int_\Omega f = 0$. Wir betrachten das Variationsmodell

$$J_\alpha(u) = \int_\Omega |u - f| \, dx + \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \to \min_{u \in W_\diamond^{1,2}(\Omega)}, \tag{10}$$

wobei

$$W_\diamond^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega), \int_\Omega u = 0\} \tag{11}$$

der Banachraum mit der Norm

$$\|u\| := \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2} \tag{12}$$

ist. Zeigen Sie

(i) Die Lösung existiert und ist eindeutig.

(ii) Die Optimalitätsbedingung ist gegeben durch

$$p(x) - \alpha \nabla \cdot (\nabla u(x)) = 0 \qquad x \in \Omega,$$

mit (n der Einheitsnormalenvektor)

$$\nabla u(x) \cdot n(x) = 0 \qquad x \in \partial\Omega$$

und $p(x) \in [0, 1]$ sodass

$$p(x)(u(x) - f(x)) = |u(x) - f(x)|$$

und $p(x) \in [-1, 1]$.

(iii) Sei u_α das Minimum abhängig von α. Zeigen sie für $f \in W_\diamond^{1,2}$ und $\alpha \to 0$: $u_\alpha \rightharpoonup f$ und

$$J_\alpha(u) \to \int_\Omega |u - f|$$

für alle $u \in W_\diamond^{1,2}$.

(iv) Sei u_α das Minimum abhängig von α. Zeigen sie für $\alpha \to \infty$: $u_\alpha \to 0$ und

$$\frac{2}{\alpha} J_\alpha(u) \to \int_\Omega |\nabla u|^2$$

für alle $u \in W_\diamond^{1,2}$.