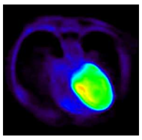
Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

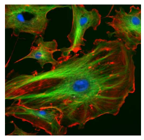
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Martin Burger
Dr. Christoph Brune



Übungen zur Vorlesung

Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2010/11 — Blatt 8, Abgabe: Fr. 10.12., 12 Uhr, BK 86



Aufgabe 1 (Duale Funktionale) (5 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden primalen Funktionale $J : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die konvex Konjugierten, d.h. die dualen Funktionale $J^* : X^* \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

(a) $J(u) = \|u\|_{L^2(\Omega)}$

(b) $J(u) = \frac{\alpha}{2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$

(c) $J(u) = \|u\|_{L^1(\Omega)}$.

Aufgabe 2 (Biduale Funktionale) (5 Punkte)

Wir betrachten zwei Funktionale $H : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $J : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $H \leq J$. *Zeigen Sie*, dass dann auch für die bidualen Funktionale $H^{**} : X^{**} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $J^{**} : X^{**} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt $H^{**} \leq J^{**}$.

Aufgabe 3 (Subdifferentiale) (5 Punkte)

Berechnen Sie das Subdifferential $\partial f(x)$ der folgenden Funktionen.

(a) Der euklidischen Norm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|_2$.

(b) Der Indikatorfunktion des positiven Quadranten,

$$f = i_K, \quad \text{mit} \quad K := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_j \geq 0, \ \text{für alle } 1 \leq j \leq n\} \ .$$

Aufgabe 4 (Frechet-Ableitungen) (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die *Frechet-Ableitungen* der folgenden Funktionale:

(a) $J(u) = \dfrac{1}{2} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$ (L^2-Regularisierung) ,

wobei $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

(b) $J(u) = \dfrac{1}{2} \|Ku - f\|^2_{L^2(\Sigma)}$ (L^2-Datenterm mit Operator) ,

wobei $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Sigma)$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ und $f : \Sigma \to \mathbb{R}$.

(c) $J(\mathbf{v}) = \dfrac{1}{2} \|\partial_t f + \nabla \cdot (f\mathbf{v})\|^2_{L^2(\Omega \times [0,T])}$ (L^2-Datenterm Masseerhaltung) ,

wobei f hier im Vergleich zu (a) und (b) eine Bildsequenz darstellt, d.h. $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{v}$ eine gesuchtes Vektorfeld bezeichne, d.h. $\mathbf{v} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^2$.