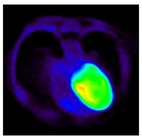
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

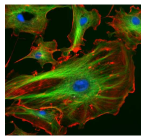
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Martin Burger
Dr. Christoph Brune



Übungen zur Vorlesung

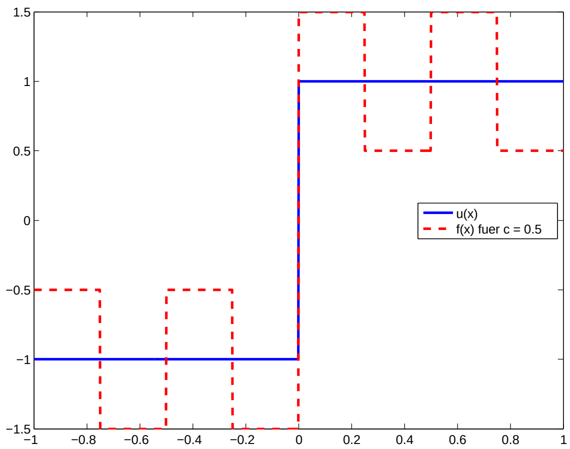
Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2010/11 — Blatt 5, Abgabe: Fr. 19.11., 12 Uhr, BK 86



Aufgabe 1 (1D Thresholding Segmentierung bei Rauschen) (5 Punkte)

Wir betrachten eine 1D Treppenfunktion $u : [-1, 1] \to [-1, 1]$ mit Sprung in Null als (exaktes) Signal mit Mittelwert Null. Um den Effekt von Rauschen zu simulieren, addieren wir in Abhängigkeit von einer Rauschstärke $c \in \mathbb{R}$ in acht äquidistanten Intervallen abwechselnd $+c$ bzw. $-c$, so dass die gegebenen Daten f auch anschließend noch Mittelwert Null besitzen. Schauen Sie sich zum Verständnis die folgende Abbildung für den Fall $c = 0.5$ an.



(a) *Geben Sie* in Abhängigkeit von c, d.h. für $c > 1$ bzw. für $c < 1$, das Histogramm von f an.

(b) *Was ist* das Ergebnis einer Segmentierung mittels Thresholding basierend auf verschiedenen Minima des Histogramms. Berücksichtigen Sie auch hier die Abhängigkeit von c.

Aufgabe 2 (Clusteralgorithmus K-Means) (5 Punkte)

Zeigen Sie für eine Segmentierung mit 2-Means: Wenn I_1 und I_2 Intervalle sind mit $f(x) = f_0 =$ const in $I_1 \cup I_2$, dann sind in der optimalen Lösung I_1 und I_2 in derselben Klasse, d.h.

$$\begin{aligned} & \chi(x) = 1 \qquad \forall x \in I_1 \cup I_2 \\ \text{oder} \quad & \chi(x) = 0 \qquad \forall x \in I_1 \cup I_2 \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (K-Means und Chan-Vese) (5 Punkte)

Wir betrachten bei dieser Aufgabe weiterhin die gegebenen Daten f aus Aufgabe 1.

(a) Benutzen Sie Aufgabe 2 um die *Lösung von 2-Means* für die gegebenen Daten f aus Aufgabe 1 zu berechnen. (Hinweis: Fallunterscheidung)

(b) Das 1D Chan-Vese Segmentierungsverfahren (für zwei Intensitätslevel μ_1 und μ_2) ist 2-Means kombiniert mit einer Regularisierung, die eine hohe Anzahl an Sprüngen (gewichtet mit α) bestraft, d.h. für $\Omega = [-1, 1]$, minimiert man

$$J(\chi, \mu_1, \mu_2) = \int_\Omega \chi(x)(f(x) - \mu_1)^2 \, dx \; + \; \int_\Omega (1 - \chi(x))(f(x) - \mu_2)^2 \, dx + \alpha \, s(\chi) \; ,$$

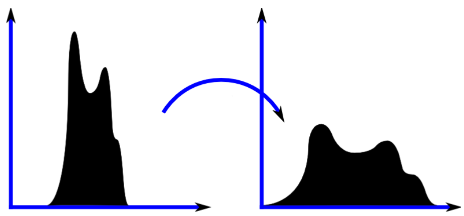
wobei $s(\chi)$ die Anzahl an Sprüngen in χ zählt. Für *welche Werte von* α *und* c ist die Lösung von 2-Means keine Lösung des Chan-Vese Modells?

(c) *Geben Sie* die intuitive Lösung für 4-Means an.

Aufgabe 4 (Segmentierung mit Schwellwertbildung) (5 Punkte)

(a) *Implementieren* Sie eine Funktion in Matlab, die das Histogramm eines Bildes aufstellt,
`h = histogramm(u);`

(b) *Implementieren* Sie einen Algorithmus zum Histogrammausgleich in Matlab. *Eingabe*: Ein Grauwertbild, *Ausgabe*: Das transformierte Bild und die Grauwerttransformation,
`[v,Phi] = hist_ausgleich(u);`



(c) *Implementieren* Sie einen Algorithmus zur Schwellwertwahl in Matlab. *Eingabe*: Ein Grauwertbild. *Ausgabe*: Ein Schwarz-Weiß-Bild und der Schwellwert,
`[BW,thr] = segment(u);`

Testen Sie Ihren Algorithmus am Bild `graph.png`.