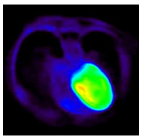
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

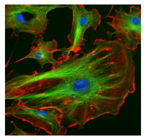
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Martin Burger
Dr. Christoph Brune



Übungen zur Vorlesung

# Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2010/11 — Blatt 4, Abgabe: Fr. 12.11., 12 Uhr, BK 86



**Aufgabe 1 (Entfalten)** (4 Punkte)

Als Fortsetzung von Aufgabe 3 von Blatt 3:

(a) *Entwickeln*, *implementieren* und *dokumentieren* Sie eine Entfaltung (eine Umkehrung von `fft2conv`) mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation. *Eingabe*: Ein Bild $f \in \mathbb{R}^{N+2r,M+2s}$ und ein Faltungskern $h \in \mathbb{R}^{2r+1\times 2s+1}$. *Ausgabe*: Das entfaltete Bild $u_{rec} \in \mathbb{R}^{N\times M}$ (d.h. es soll bis auf Rechengenauigkeit `f = fft2conv(u,h)` gelten). Programmierung in Matlab:

```
u_rec = fft2deconv(f,h)
```

(Beachten Sie hierbei die Größen der Bilder.)

(b) *Testen* Sie den Algorithmus mit dem Bild `auge.png` als `u` und den Faltungkernen `h = ones(11)/121;` und `hut.dat`[1] (d.h. *berechnen Sie* `f=fft2conv(u,h)` und `u_rec = fft2deconv(f,h)`). *Wiederholen* Sie das Experiment wobei `f` mit einer kleinen zufälligen Störung versehen wird: `f = fft2conv(u,h) + 1e-5*randn(N+2*r,M+2*s)`. Was *beobachten* Sie?

**Aufgabe 2 (Regularisierte Entfaltung)** (4 Punkte)

In Aufgabe 1 haben Sie die Instabilität der Entfaltung erlebt. Diese wird durch die Division durch zu kleine Werte hervorgerufen, denn es gilt (im Kontinuierlichen)

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(f)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\mathcal{F}(h)}\right).$$

Die Division durch zu kleine Werte kann wie folgt verhindert werden: Es sei $P : \mathbb{C} \times ]0,\infty[ \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion, so dass für $z \neq 0$ gilt

$$P(z,\alpha) \to \frac{1}{z} \quad \text{für} \quad \alpha \to 0 .$$

Dann setzen wir

$$u_\alpha = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(f)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}P_\alpha(\mathcal{F}(h))}\right) .$$

(a) *Implementieren* Sie die beschriebene Methode analog zu Aufgabe 1 in Matlab. *Eingabe*: Ein Bild $f \in \mathbb{R}^{N+2r\times M+2s}$, ein Faltungskern $h \in \mathbb{R}^{2r+1\times 2s+1}$, der Parameter $\alpha$ und ein Funktionsname $P$ einer Funktion $P(z,\alpha)$. *Ausgabe*: Das entfaltete Bild $u_{rec} \in \mathbb{R}^{N\times M}$.

```
u_rec = fft2deconv_reg(f,h,alpha,@P) .
```

(b) Benutzen Sie ein gestörtes `f` wie in Aufgabe 1(b) und die Funktionen

$$P_1(z,\alpha) = \begin{cases} 0, & |z| \leq \alpha \\ \frac{1}{z}, & |z| > \alpha \end{cases}, \qquad P_2(z,\alpha) = \frac{\bar{z}}{|z|^2+\alpha} .$$

Versuchen Sie verschiedene Werte von $\alpha > 0$. Wie erhalten Sie das beste Ergebnis?

[1] Diesen Kern laden Sie z.B. mit `h = dlmread('hut.dat');` ein.

**Aufgabe 3 (Level-Sets und Krümmung)** (4 Punkte)

Gegeben sei das Gebiet $\Omega = \mathbb{R}^2$ und eine zweimal differenzierbare (parametrisierte) Kurve

$$x \, : \, \mathbb{R} \supset [0,1] \; \to \; \Gamma \subset \Omega \; .$$

Das Bild $\Gamma$ der Kurve $x$ lasse sich als Kante in einem 2D-Bild interpretieren und kann alternativ mit Hilfe einer Level-Set Funktion $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ als Null-Level-Set identifiziert werden, d.h.

$$\Gamma = \{ x \in \Omega \mid \phi(x) = 0 \} \; .$$

(a) *Zeigen* Sie, dass für $\nabla \phi \neq 0$, der Gradient der Level-Set Funktion $\nabla \phi$ eine *Normale* an $\Gamma$ ist, und *zeigen* Sie, dass $\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ eine *Einheitsnormale* an $\Gamma$ darstellt.

(b) Die Krümmung $\kappa$ der Kurve $x$ lässt sich in der Koordinatenfunktion $x(s) = (x_1(s), x_2(s))^T$ wie folgt angeben:

$$\kappa = \frac{x_1' x_2'' - x_1'' x_2'}{((x_1')^2 + (x_2')^2)^{\frac{3}{2}}} \; .$$

Wie oben beschrieben lasse sich das Null-Level-Set durch eine zweimal differenzierbare Kurve $x$ parametrisieren. *Zeigen* Sie, dass im Null-Level-Set für $\nabla \phi \neq 0$ gilt

$$\kappa = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \; .$$

**Aufgabe 4 (Kurvenbewegung, Level-Set Gleichung)** (4 Punkte)

Gegeben sei eine zeitäbhängige Kurve analog zu Aufgabe 3, d.h.

$$\Gamma(t) = \{ x(s,t) \mid s \in [0,1], \; t \in [0,T] \} \; .$$

(a) Wir bewegen die Punkte auf der Kurve gemäß folgender Gleichung

$$\partial_t x(s,t) = \mathbf{v}(x(s,t)) \; ,$$

mit einem Bewegungsfeld $\mathbf{v}$. *Zeigen Sie*, dass dann für die zugehörige (zeitabhängige) Level-Set Funktion $\phi$ eine Erhaltungsgleichung erfüllt ist, d.h.

$$\partial_t \phi(x,t) + \mathbf{v}(x,t) \cdot \nabla \phi(x,t) = 0 \; .$$

(b) Nun bestimme umgekehrt ein Skalarfeld in Normalenrichtung die Bewegung der zeitabhängigen Kurve, d.h.

$$\partial_t x(s,t) = v(x) \cdot \mathbf{n}(s,t)$$

mit einem Skalarfeld $v$ und der Normalen $\mathbf{n}$. *Zeigen Sie*, dass gilt

$$\partial_t \phi(x,t) + v(x) \, |\nabla \phi(x,t)| = 0 \; .$$

**Aufgabe 5 (Kurvenbewegung, Flächen und Längen)** (4 Punkte)

Wir können die Punkte auf einer Kurve wieder gemäß der folgenden Gleichung

$$\partial_t x(s,t) = \mathbf{v}(x(s,t)) \ ,$$

mit einem Vektorfeld $\mathbf{v}$ bewegen. Die Veränderung der Länge der Kurve $\Gamma$ ist durch folgende Gleichung gegeben

$$\frac{d}{dt}\,(\text{Länge von } \Gamma) = \int_\Gamma \kappa \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \ ,$$

wobei $\kappa$ die Krümmung, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ das Bewegungsfeld in Normalenrichtung und $d\sigma = |x'(s)|ds$ das zugehörige Kurvenmaß bezeichne. Für die Veränderung der Fläche in $\Gamma$ gilt folgende Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\,(\text{Fläche in } \Gamma) = \int_\Gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \ .$$

*Zeigen Sie*, dass wenn die Krümmung $\kappa$ nicht konstant ist, ein Vektorfeld $\mathbf{v}$ existiert mit

$$\frac{d}{dt}\,(\text{Länge von } \Gamma) \leq 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}\,(\text{Fläche in } \Gamma) = 0 \ ,$$

und *folgern Sie*, dass der Kreis minimale Länge bei gegebener Fläche hat.