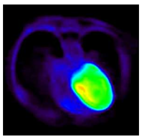
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

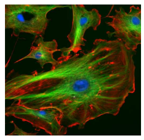
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Martin Burger
Dr. Christoph Brune



Übungen zur Vorlesung

Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2010/11 — Blatt 3, Abgabe: Fr. 05.11., 12 Uhr, BK 86



Aufgabe 1 (Diskrete Faltung) (4 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $U, H \in \mathbb{C}^N$ als diskrete Versionen der periodischen, kontinuierlichen Funktionen $u, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Sei

$$(u * h)(x) \;=\; \int_0^1 u(y)\, h(x-y)\, dy$$

die kontinuierliche Faltung. Wir diskretisieren das Intervall und definieren die diskrete periodische Faltung von U und H als

$$(U * H)_n \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} U_k\, H_{(n-k) mod N} \;.$$

(a) Zeigen Sie, dass man beim Übergang von einer kontinuierlichen Darstellung u zur diskreten Darstellung U eines Bildes eine diskrete Faltung erhält.

(b) Die *diskrete Fouriertransformation* eines Vektors $U \in \mathbb{C}^N$ definieren wir als

$$\hat{U}_k = (\mathcal{F}(U))_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} U_n\, e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \;, \quad \text{für } 0 \le k \le N-1 \;,$$

wobei die diskrete Fouriertransformation *invertiert* wird durch

$$U_n = (\mathcal{F}^{-1}(\hat{U}))_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{U}_k\, e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \;, \quad \text{für } 0 \le n \le N-1 \;.$$

Beweisen Sie für $U, H \in \mathbb{C}^N$ den diskreten Faltungssatz, d.h.

$$(\mathcal{F}(U * H))_k = (\mathcal{F}(U))_k \cdot (\mathcal{F}(H))_k \;.$$

Aufgabe 2 (Rekursiver Algorithmus, Diskrete Faltung) (4 Punkte)

(a) Sei N eine gerade Zahl. Zeigen Sie, dass die Elemente des Vektors $\mathcal{F}(U)$ an geraden und ungeraden Stellen die Darstellungen

$$(\mathcal{F}(U))_{2k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} (U_n + U_{n+\frac{N}{2}})\, e^{-\frac{2\pi i k n}{\frac{N}{2}}}$$

beziehungsweise

$$(\mathcal{F}(U))_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{2\pi i n}{N}} (U_n - U_{n+\frac{N}{2}})\, e^{-\frac{2\pi i k n}{\frac{N}{2}}}$$

haben. (Das bedeutet, dass sich die Werte $(\mathcal{F}(U))_{2k}$ aus der Fourier-Transformation des $\frac{N}{2}$-periodischen Signals $U_n + U_{n+\frac{N}{2}}$ und die Werte $(\mathcal{F}(U))_{2k+1}$ aus der Fourier-Transformation des $\frac{N}{2}$-periodischen Signals $e^{-\frac{2\pi ikn}{\frac{N}{2}}}$ ergeben.)

(b) Zeigen Sie, dass es einen Algorithmus gibt, der die diskrete Fourier-Transformation eines Signals der Länge $N = 2^n$ mit $O(n2^n)$ Operationen berechnet (im Vergleich zu $O(2^n 2^n)$ für eine direkte Implementierung der Summen).

Aufgabe 3 (Schnelle Faltung) (4 Punkte)

Die diskrete Faltung von $U, H \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ ist definiert durch

$$(U * H)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_k H_{n-k} \ .$$

Der Träger von $U \in \mathbb{C}^Z$ ist $\operatorname{supp} U \ = \ \{k \in Z \mid u_k \neq 0\}$.

(a) Es seien $U, H \in \mathbb{C}^Z$ mit $\operatorname{supp} u \ = \ \{0, .., N-1\}$ und $\operatorname{supp} H \ = \ \{-r, .., r\}$. Dann gilt $\operatorname{supp} U * H \subset \{-r, ..., N + r - 1\}$ (wieso?). *Entwickeln, implementieren und dokumentieren* Sie einen Algorithmus, der die Faltung von U und H auf dem gesamten Träger mit Hilfe der Fouriertransformation berechnet. Eingabe: Zwei Vektoren $U \in \mathbb{C}^N, H \in \mathbb{C}^{2r+1}$. Ausgabe: Das Ergebnis $W \in \mathbb{C}^{N+2r}$ der Faltung von U und H in Matlab, d.h. *w = fftconv(u,h)*.

(b) *Entwickeln und implementieren* Sie analog eine zweidimensionale schnelle Faltung. Eingabe: Ein Grauwertbild $U \in \mathbb{R}^{N \times M}$ und ein Faltungskern $H \in \mathbb{R}^{2r+1, 2s+1}$. Ausgabe: Die Faltung $U * H \in \mathbb{R}^{N+2r, M+2s}$ in Matlab, d.h. *w = fft2conv(u,h)*.

(c) *Testen Sie* den Algorithmus fft2conv z.B. an Hendriks Knie aus Aufgabe 5 mit Faltungskernen Ihrer Wahl. Vergleichen Sie Ergebnisse und Laufzeiten mit dem MATLAB-Aufruf *conv2(u,h,'full')*.

Aufgabe 4 (L^1-Deblurring, kontinuierlich) (4 Punkte)

Für einen Faltungskern k und gegebene Daten f sei das folgende Variationsproblem gegeben,

$$\|k * u - f\|^2_{L^2(\Omega)} \ + \ \alpha \int_\Omega |(\mathcal{F}u)(w)| \, dw \ \rightarrow \ \min_u \ .$$

Finden Sie ähnlich zur Vorlesung mit Hilfe des Faltungssatzes und dem Satz von Plancherel eine explizite Darstellung der Lösung des Problems.

Aufgabe 5 (DICOM Import/Export) (4 Punkte)

Schreiben Sie in Matlab ein m-File, das die DICOM Datei „hendriksKnie.dcm“ importiert, die Breite und Höhe des Bildes sowie die „StudyDescription“ aus dem DICOM-Header (Beschreibungsdaten der DICOM-Datei) ausgibt, das Bild anzeigt und es als tif-Datei wieder abspeichert.