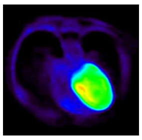
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

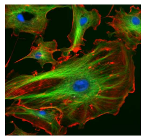
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Martin Burger
Dr. Christoph Brune



Übungen zur Vorlesung

Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2010/11 — Blatt 2, Abgabe: Fr. 29.10., 12 Uhr, BK 86



Aufgabe 1 (Filter, Fehleranalyse, Variationsproblem) (5 Punkte)

(a) Wir betrachten den lokalen Glättungsfilter in 1D

$$U_i^{k+1} \;=\; (1-2\alpha)\,U_i^k + \alpha\,U_{i+1}^k + \alpha\,U_{i-1}^k$$

mit $U_i^0 = F_i$. *Geben* Sie analog zum Skript eine Abschätzung für den erwarteten quadratischen Fehler $\mathbb{E}((U_i^k - F_i)^2)$ im k-ten Schritt $k = 0, 1, 2$ an.

(b) Betrachten Sie den Übergang von Filtern zu Variationsmethoden in Kapitel 3.1.5 der Vorlesung. Zum besseren Verständnis *zeigen Sie*, dass das Minimum des Funktionals

$$\begin{aligned} J(U) \;&=\; \frac{1}{2}\sum_{i,j}(U_{ij}-F_{ij})^2 + \frac{\alpha}{2}\sum_{i,j}[(F_{i+1j}-F_{ij})^2 + (F_{ij+1}-F_{ij})^2] + \\ &\quad\ \alpha\sum_{i,j}[(F_{i+1j}-F_{ij})(U_{i+1j}-U_{ij}) + (F_{ij+1}-F_{ij})(U_{ij+1}-U_{ij})] \end{aligned}$$

mit dem Ergebnis der Anwendung des 2D linearen Filters auf F

$$U_{ij} = (1-4\alpha)F_{ij} + \alpha(F_{i-1j} + F_{i+1j} + F_{ij-1} + F_{ij+1}) \tag{1}$$

identifiziert werden kann.

Aufgabe 2 (Faltung) (5 Punkte)

Wir betrachten die Faltung

$$u(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} G\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\,dy\ ,$$

wobei G die folgenden Voraussetzungen erfülle

- $G \geq 0$
- $\int G(x)dx = 1$ und $\int x^2 G(x)dx < \infty$
- G symmetrisch .

Zeigen Sie dass für $f \in C^2$ gilt

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{u(x)-f(x)}{\varepsilon^2} \;=\; \frac{1}{2}f''(x)\int z^2 G(z)\,dz\ .$$

Aufgabe 3 (Perona-Malik Modell in 1D, Dissipation) (5 Punkte)

Wir betrachten das Perona-Malik Modell in 1D auf dem Intervall $[-1, 1]$ mit Neumann Randbedingungen

$$u_t = \left(g(u_x^2)\, u_x\right)_x$$
$$u_x(\pm 1, t) = 0$$

mit $g(s) = \frac{1}{1+\lambda s}$, $\lambda > 0$.
Durch die Variablentransformation $v = u_x$ erhalten wir

$$v_t = \left(g(v^2)\, v\right)_{xx}$$
$$v(\pm 1, t) = 0$$

und betrachten die modifizierte Gleichung

$$v_t = \left(g(v^2)\, v\right)_{xx} - \varepsilon\, v_{xxxx}$$

$$v(\pm 1, t) = 0 \quad v_{xx}(\pm 1, t) = 0$$

für kleines ε.
Das Reduzieren von Oszillationen in der Umgebung von Unstetigkeiten bei einer Diffusionsgleichung bezeichnet man als Dissipation. *Zeigen Sie*, dass das Energiefunktional

$$E(v) = \int \left(G(v^2) + \frac{\varepsilon^2}{2} v_x^2 \right) dx$$

mit $G'(v) := \frac{g(v)}{2}$ die Dissipationsgleichung $\frac{dE}{dt}\left[v(\cdot, t)\right] = -D\left[v\left(\cdot, t\right)\right] < 0$ mit einem Dissipationsfunktional D mit passendem v erfüllt. *Berechnen* Sie für die linearisierte Gleichung

$$v_t = g v_{xx} - \varepsilon v_{xxxx}$$

$$v(\pm 1, t) = 0 \quad v_{xx}(\pm 1, t) = 0$$

mit $g \equiv const < 0$ die Fourier-Cosinus Koeffizienten der Lösung. *Beschreiben* Sie deren Verhalten für verschiedene Frequenzen.

Aufgabe 4 (Programmierung: 2D Lineare Filter) (5 Punkte)

Betrachten Sie den lokalen Filter in Gleichung (1) aus Aufgabe 1 mit $\alpha \in (0, \frac{1}{5})$.

- *Implementieren* Sie diesen Filter in Matlab. Testen Sie ihr Programm für verschiedene Werte von α.
- *Implementieren* Sie dann das iterative Verfahren

  $$U_{ij}^{k+1} = (1 - 4\alpha)\, U_{ij}^{k} + \alpha\, (U_{i-1j}^{k} + U_{i+1j}^{k} + U_{ij-1}^{k} + U_{ij+1}^{k})$$

  und versuchen Sie ein optimales Ergebnis zu erhalten (Wahl des Abbruchkriteriums).
- *Vergleichen* Sie das Signal-to-Noise (SNR) Ratio des verrauschten Bildes und ihrer Resultate für verschiedene Werte von α und Abbruchindizes k. Verwenden Sie dazu die Funktion snr.m von der Homepage.
- *Finden* Sie eine geeignete Modifikation der Filterformel für die Pixel am Rand.