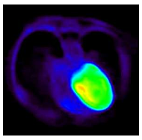
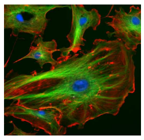
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Martin Burger
Dr. Christoph Brune



Übungen zur Vorlesung

Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2010/11 — Blatt 12, Abgabe: Di. 01.02.2011, 12 Uhr, BK 86



Aufgabe 1 (Sattelpunktprobleme, Primal-Duale Verfahren) (5 Punkte)

Die in der Vorlesung vorgestellten primal-dualen Algorithmen basieren auf Sattelpunktproblemen. Eine Klasse dieser Sattelpunktprobleme sind gegeben durch die Lösung von Gleichungssystemen der Form

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit einer Blockmatrix bzgl. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, wobei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 1$, mit gesuchten primalen und dualen Variablen $u \in \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}^m$, sowie mit einer gegebenen rechten Seite abhängig von $f \in \mathbb{R}^n$ und $g \in \mathbb{R}^m$.
Zeigen Sie: Ist A positiv definit auf $Kern(B)$, d.h. aus $Bu = 0$ und $u \neq 0$ folgt $u^T Au > 0$, so ist die Blockmatrix auf der linken Seite von (1) invertierbar.

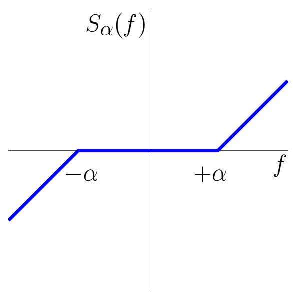
Aufgabe 2 (Soft-Shrinkage) (5 Punkte)

In effizienten Splitting-Verfahren, z.B. bei Split-Bregman (siehe Aufg. 4), lassen sich Teilprobleme manchmal auf sogenanntes *Soft-Shrinkage* reduzieren. *Zeigen Sie* deshalb in 1D ($\Omega \subset \mathbb{R}$), dass eine Lösung $z^* : \Omega \to \mathbb{R}$ des Funktionals

$$\min_z \; \frac{1}{2} \|z - f\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \, \|z\|_{L^1(\Omega)}$$

durch Anwendung des *Soft-Shrinkage*-Operators $S_\alpha(f)$ explizit gegeben ist, d.h.

$$z^* = S_\alpha(f) := \begin{cases} f - \alpha\,, & \text{falls } \; f > \alpha \\ 0\,, & \text{falls } \; -\alpha \leq f \leq \alpha \\ f + \alpha\,, & \text{falls } \; f < -\alpha \end{cases} .$$



Aufgabe 3 (TV-Denoising, Duales Verfahren 1D) (5 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die folgende *duale Formulierung* des Rudin-Osher-Fatemi (ROF) Modells zur Entrauschung mit L^2-Datenterm und TV-Regularisierung hergeleitet,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\alpha\nabla \cdot g - f)^2 \to \min_g$$

unter der Nebenbedingung $\|g\|_\infty \leq 1$. Es handelt sich dabei um ein beschränktes, quadratisches Optimierungsproblem. Die Nebenbedingung ist dabei zu verstehen als $|g(x)|_{l^2}^2 \leq 1,\ \forall x \in \Omega$.
Schreiben Sie eine Matlab Funktion, welche die explizite Diskretisierung

$$\begin{aligned} g_{k+\frac{1}{2}} &= g_k + \sigma\, \nabla\, (\alpha\nabla \cdot g_k - f) \\ g_{k+1} &= \Pi(g_{k+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

realisiert, wobei $\Pi(g) := \frac{g}{\|g\|_\infty}$ eine Projektion auf den Einheitskreis darstellt. *Testen Sie* Ihre Implementierung an einer 1D-Treppenfunktion mit zufälligem additivem Gauss'schen Rauschen. *Vergleichen Sie* die Lösungen für verschiedene Werte von α und wählen Sie die Schrittweite σ geeignet.
(Hinweis: Nutzen Sie die primale Optimalitätsbedingung für das ROF-Modell (mit exakter Definition von TV), um aus der dualen Lösung die zugehörige primale Lösung visualisieren zu können.)

Aufgabe 4 (TV-Denoising, Primal-Dual, Split-Bregman 1D) (5 Punkte)

In der Vorlesung haben wir mit Split-Bregman (oder *äquivalent* Alternating direction method of multipliers (ADMM) bzw. Douglas-Rachford Splitting (DRS) für das zugehörige *duale Problem*) ein Splitting-Verfahren kennen gelernt, mit dem man das ROF-Modell

$$\frac{1}{2}\,\|u - f\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\,\|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \to \min_u \tag{2}$$

effizient alternierend primal-dual lösen kann.

(a) *Leiten Sie* dieses Splitting Verfahren in 1D ($\Omega \subset \mathbb{R}$) nochmal analog zur Vorlesung für das ROF-Modell in (2) her, *implementieren Sie* es in Matlab und *testen Sie* es im Vergleich zur vorherigen Aufgabe für verschiedene Schrittweiten und Regularisierungsparameter an einer Treppenfunktion mit zufälligem additivem Gauss'schen Rauschen.

(b) *Wie ändern* sich die Teilprobleme bei dem Splitting-Algorithmus, wenn man von Entrauschung auf Rekonstruktion mit einem Operator $K : \Omega \to \Omega$ übergeht ohne zusätzlichen Nebenbedingungen einzuführen? *Welche Eigenschaft* müsste der Operator K haben, damit das Verfahren dennoch mit FFT oder DCT effizient realisiert werden kann?