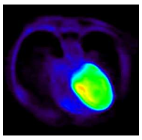
Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

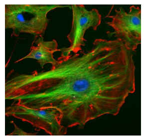
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Martin Burger
Dr. Christoph Brune



Übungen zur Vorlesung

Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2010/11 — Blatt 11, Abgabe: Fr. 21.01.2011, 12 Uhr, BK 86



Aufgabe 1 (Poisson, Kullback-Leibler, EM) (4 Punkte)

In Aufgabe 2 von Blatt 7 haben Sie ein Variationsmodell mit dem *Kullback-Leibler Funktional* als Datenterm aus einer statistischen Modellierung unter Poisson-Rauschen hergeleitet. Im Fall einer Bildrekonstruktion bzgl. des inversen Problems $Ku = f$ mit Operator K erhält man folgendes Variationsproblem

$$\min_{u \geq 0} J(u) := \int_\Sigma (Ku - f\, log(Ku))\, d\mu \ .$$

In der Vorlesung haben wir mit dem EM-Algorithmus eine Gradienten-basierte Fixpunktiteration kennen gelernt, die die Positivität einer Lösung berücksichtigt und dieses Funktional minimiert. *Zeigen Sie*, dass das Funktional auf der Teilmenge $\{u \geq 0\}$ und für einen injektiven Operator K, mit $K > 0$ wenn $u \geq 0$, *strikt konvex* bzgl. u ist.

Aufgabe 2 (Konvergenzraten) (5 Punkte)

Mit $u_k \in \mathbb{R}$ und mit Grenzwert $u^* = 0$ seien Beispiele für Folgen gegeben:

(a) $u_k = \frac{1}{2^k}$

(b) $u_k = 0.99^k$

(c) $u_k = \frac{1}{k!}$

(d) $u_k = \frac{1}{2^{2^k}}$.

Zeigen Sie, ob die Konvergenz *Q-linear, Q-superlinear* oder *Q-quadratisch* ist und geben Sie bei Q-quadratischer Konvergenz an, ab welcher Iteration Maschinengenauigkeit (doppelte Genauigkeit, $\approx 10^{-16}$) erreicht wird.

Aufgabe 3 (Vorkonditionierung, Eigenwerte, Reskalierung) (6 Punkte)

Eine mögliche Interpretation der Vorkonditionierung der Hessematrix (z.B. innerhalb von Newton-PCG) ist eine *Reskalierung der unbekannten Variablen.* Wir betrachten dazu das quadratische Teilproblem

$$J(u) := \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \langle b, u \rangle + c \ \rightarrow \ \min_u \ , \qquad (1)$$

mit einer symmetrisch, positiv definiten Matrix A. Bei der Vorkonditionierung suchen wir eine symmetrisch, positiv definite Matrix M (Vorkonditionierer), so dass $M^{-1}A$ eine bessere Eigenwertverteilung besitzt als nur A.

(a) Sei M eine symmetrische, positiv definite Matrix mit einer Eigenzerlegung $M = V diag(\lambda_i)V^T$, wobei die i-te Spalte von V durch einen Eigenvektor v_i von M bestimmt ist und λ_i den zugehörigen Eigenwert von M bezeichnet. Bei den v_i's handele es sich um eine Ortho**normal**basis, d.h. $V^TV = I$. Man kann eine selbstadjungierte, positive Quadratwurzel $M^{\frac{1}{2}}$ von M berechnen. *Zeigen Sie* also, dass $M^{\frac{1}{2}} = V diag(\sqrt{\lambda_i})V^T$ die Gleichung $(M^{\frac{1}{2}})^2 = M$ erfüllt.

(b) Wie sieht das *transformierte quadratische Teilproblem* bzgl. einer neuen Variablen y aus, wenn man von der Gleichung $Au + b = 0$ zur vorkonditionierten Gleichung

$$M^{-\frac{1}{2}}(AM^{-\frac{1}{2}}y + b) = 0$$

bzgl. y übergeht? Welche Skalierung erfährt u beim Übergang zu y, d.h. bei der Vorkonditionierung?

Bemerkung: In der Praxis, z.B. bei PCG, verwendet man nur M^{-1} für A anstelle von $M^{-\frac{1}{2}}$ links und rechts von A.

Aufgabe 4 (Programmierung: Newton, CG, Armijo-Goldstein) (5 Punkte)

Eine Möglichkeiten zur Bestimmung der Suchrichtung in jeder Iteration eines Newton-Verfahrens (linearisiertes Teilproblem), ist ein iteratives Verfahren wie das konjugierte Gradientenverfahren (CG) auf ein quadratisches Funktional der Form (1) aus Aufgabe 3 anzuwenden.

Programmieren Sie das *konjugierte Gradientenverfahren* zur Lösung einer quadratischen Optimierungsaufgabe

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} J(u) \ ,$$

mit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wie in (1) aus Aufgabe 3. Das Verfahren soll als Funktion in Matlab realisiert werden, die mit

```
[u,Ju] = cg(A,b,u0,tolU,tol)
```

aufgerufen werden kann. Dabei sei A eine gegebene Matrix und b ein Wert für die rechte Seite des LGS $Au = -b$, `u0` sei ein Startvektor, `tolU` sei eine Toleranz für die Genauigkeit in u und `tol` sei eine Toleranz für die Genauigkeit im LGS $Au = -b$, d.h. eine Toleranz für die Optimalität erster Ordnung von J.

Als *Schrittweitenstrategie* verwenden Sie die exakte Schrittweite und zum Vergleich die Schrittweiten-Bedingungen von Armijo-Goldstein.

Testen Sie das Verfahren an einem (sinnvollen) LGS Ihrer Wahl mit A symmetrisch positiv definit.