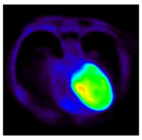
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

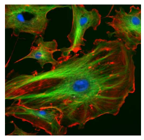
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Martin Burger
Dr. Christoph Brune



Übungen zur Vorlesung

Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2010/11 — Blatt 10, Abgabe: Fr. 14.01.2011, 12 Uhr, BK 86



Aufgabe 1 (Gradientenverfahren, Funktionenräume) (5 Punkte)

Gegeben sei ein allgemeines Variationsproblem der Form

$$J(u) := \int_\Omega G(u, \nabla u) dx \;\rightarrow\; \min_{u \in \mathcal{U}(\Omega)}$$

auf einem Hilbertraum $\mathcal{U}(\Omega)$. Ziel dieser Aufgabe ist die Auswirkung der Wahl von Funktionenräumen bei der Strategie „*First optimize then discretize*“ am Beispiel des Gradientenverfahrens zu studieren.

(a) Wenn man der Lösungsstrategie „*First optimize then discretize*“ folgt, erhält man für $\mathcal{U}(\Omega) = L^2(\Omega)$ typischerweise ein Gradientenverfahren bzgl. euklidischer Distanz. Zum Vergleich *folgen Sie* dieser Strategie sowohl für $\mathcal{U}(\Omega) = L^2(\Omega)$ als auch für $\mathcal{U}(\Omega) = H^1(\Omega)$. Wie äußert sich der *Unterschied* der Funktionenräume im resultierenden (diskreten) Gradientenverfahren? (Hinweis: Gradientenfluss in $\mathcal{U}$ und schwache Formulierung)

(b) *Konkretisieren Sie* die allgemeine Betrachtung aus (a) an dem Beispiel

$$G(u, \nabla u) := u^2 + |\nabla u|^2 \; .$$

Aufgabe 2 (First optimize then discretize vs. First discretize then optimize) (5 Punkte)

Für $\Omega = [0, 1]$ betrachten wir das inverse Problem $Ku = f$ mit

$$(Ku)(x) := \int_\Omega k(x, y) u(y) \, dy \; ,$$

Kern $k(x, y) := e^{x-y}$ und gegebenen Daten f. Gegeben sei nun ein einfaches Variationsproblem zur Rekonstruktion bzgl. $u \in L^2(\Omega)$,

$$\frac{1}{2} \left\| (Ku)(x) - f(x) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \;+\; \frac{\alpha}{2} \left\| u \right\|^2_{L^2(\Omega)} \;\rightarrow\; \min_{u \in L^2(\Omega)} \; .$$

Behandeln Sie das Problem einmal gemäß der Strategie „*First optimize then discretize*“ und einmal gemäß der Strategie „*First discretize then optimize*“. *Leiten Sie* in beiden Fällen ein *diskretisiertes Gradientenverfahren* her (der Einfachheit halber mit konstanter Zeit-Schrittweite σ). Für eine Diskretisierung im Ort nehmen Sie an, dass Ω in n Intervalle mit Orts-Schrittweite h äquidistant unterteilt wird. Diskretisieren Sie Integrale mit Hilfe der Trapezregel.

Wie *unterscheiden* sich die beiden resultierenden diskreten Algorithmen?

Aufgabe 3 (Gradientenverfahren, Exakte Schrittweite) (5 Punkte)

Gegeben sei das quadratische Optimierungsproblem

$$\min_{u\in\mathbb{R}^n} J(u) \quad \text{mit } J:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ , \quad J(u) = \frac{1}{2}u^T A\, u + b^T u$$

mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Betrachten Sie das Gradientenverfahren mit Suchrichtung $d_k := -g_k$ mit $g_k := \nabla J(u_k)$ für dieses Problem. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $d_k \neq 0$.
Zeigen Sie, dass

$$\sigma_k := \frac{g_k^T\, g_k}{g_k^T A\, g_k}$$

eine *exakte Schrittweite* darstellt. (Hinweis: Optimierungsproblem für exakte Schrittweiten)

Aufgabe 4 (Programmierung: Gradientenverfahren mit Schrittweite) (5 Punkte)

Programmieren Sie das Gradientenverfahren zur Lösung der unbeschränkten Optimierungsaufgabe

$$\min_{u\in\mathbb{R}^n} J(u) \qquad \text{mit } J:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ .$$

Das Verfahren soll als Funktion in Matlab realisiert werden, die mit

```
[u,Ju] = gradient_method(fun,u0,tolU,tolJ,gradfun)
```

aufgerufen werden kann. Dabei sei `fun` ein `function handle` (@) für die zu optimierende Funktion J, `gradfun` ein `function handle` für die Ableitung von J, `u0` ein Startvektor, `tolU` eine Toleranz für die Genauigkeit in u und `tolJ` eine Toleranz für die Genauigkeit in J.

Als sehr einfache Schrittweitenstrategie soll nach Berechnung der Suchrichtung d_k die Methode der Halbierung der Schrittweite benutzt werden: Beginnend mit $\sigma = 1$ wir die Schrittweite so lange halbiert, bis die Bedingung $J(u_k + \sigma d_k) < J(u_k)$ erfüllt ist.

Testen Sie das Verfahren an der Rosenbrock-Funktion, $J:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $J(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1-x_1)^2$, einem Polynom 4. Grades und *visualisieren Sie* die Lösung.