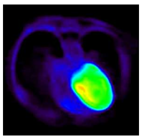
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

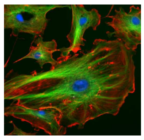
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Martin Burger
Dr. Christoph Brune



Übungen zur Vorlesung

Variationsmethoden in der Biomedizinischen Bildgebung

WS 2010/11 — Blatt 1, Abgabe: Fr. 22.10., 12 Uhr, BK 86



Aufgabe 1 (Bildinterpolation, Kanten) (5 Punkte)

(a) Gegeben sei ein (idealisiertes) kontinuierliches Bild

$$u : \Omega \to [0,1] \subset \mathbb{R}$$

auf dem Gebiet $\Omega := [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Wir nehmen an, dass die partiellen Ableitungen von u beschränkt sind, d.h.

$$\begin{aligned} |\partial_x u| &\leq c_1 \\ |\partial_y u| &\leq c_2 \ . \end{aligned}$$

Das Gebiet wird in $N_1 \times N_2$ äquidistante Pixel eingeteilt. Nun gehen wir (im Sinne einer stückweise konstanten Interpolation) über zur digitalen Version $U \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$ des Bildes. *Leiten Sie Schranken für den maximalen Unterschied zwischen benachbarten Pixeln in U her.*

(b) Nun betrachten wir als kontinuierliches 1D-Signal eine Treppenfunktion

$$u : \Omega \to [0,1] \subset \mathbb{R}$$

auf dem Gebiet $\Omega := [0,1] \subset \mathbb{R}$ mit einer Stufe von Wert 0 auf Wert 1. Wir gehen über zur digitalen Version des Signals mit N Pixeln. Die Sprungstelle liege nun innerhalb eines Pixels.

- *Berechnen Sie den Wert im digitalen Bild in den Pixeln ohne Sprung.*
- *Berechnen Sie den Wert des Pixels mit Sprung, in Abhängigkeit von der Lage des Sprungs in diesem Pixel?*

Aufgabe 2 (Histogramme) (5 Punkte)

Ein Histogramm ist eine Funktion, die die Anzahl an Beobachtungen misst, die jeweils in disjunkte Kategorien, sogenannte Bins, fallen. In der Bildverarbeitung sind die Bins durch unterschiedliche Intensitäten charakterisiert.
Sei $u : \Omega \to [0,1]$ ein messbares Bild. Für $s \in [0,1]$ definieren wir eine morphologische Abbildung

$$\mathcal{M}_s : \ u \ \mapsto \ \Omega_s := \{x \in \Omega \mid u(x) > s\} \ .$$

Dazu definieren wir eine Verteilungsfunktion, die die Größe des Gebietes Ω_s misst, als

$$G_u(s) = |\Omega| - |\Omega_s| \ .$$

Das Histogramm H_u ist eine Verteilung mit dieser Verteilungsfunktion.

Zeigen Sie:

(a) Das Bild von $\mathcal{M}_s$ ist invariant unter Kontraständerung mit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend, d.h.

$$\mathcal{M}_{T(s)}(T(u)) = \mathcal{M}_s(u) \; .$$

(b) Für $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend gilt:

$$G_{T(u)}(s) = G_u\left(T^{-1}(s)\right) \; .$$

(c) (Layer-Cake Darstellung)
Für g stetig gilt:

$$\int_\Omega g(x)\, u(x)\, dx \;=\; \int_0^1 \left(\int_{\Omega_s} g(x)\, dx \right) ds \; .$$

Dann gilt im Spezialfall für $g = 1$:

$$\int_\Omega u(x)\, dx \;=\; \int_0^1 s \,\mathrm{d}H_u \; .$$

Aufgabe 3 (Bewegungsunschärfe, Motion Blur) (5 Punkte)

Bei einer Fotokamera erhält man ein Bild durch zeitliche Mittelung der Photonenanzahl innerhalb einer eingestellten Belichtungszeit. Falls sich die sichtbare Szene relativ zur Kamera bewegt, führt diese zeitliche Mittelung zu Verzerrungseffekten, auch wenn die Szene fokussiert wurde.

Für eine Photonendichte $\rho : \Omega \times [0, t_0] \to [0, 1]$ und die Belichtungzeit t_0 ist ein aufgenommenes Bild gegeben durch:

$$f(x) = \int_0^{t_0} \rho(x, t)\, dt \; .$$

(a) Wir betrachten eine 1D-Sprungfunktion, die sich mit der Zeit mit konstanter Geschwindigkeit v_0 von links nach rechts bewegt,

$$\rho(x, t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq v_0\, t \\ 1 & \text{falls } x > v_0\, t \end{cases} \; .$$

Zeigen Sie, dass die Mittelung in der Zeit auf eine Mittelung im Ort zurückgeführt werden kann, d.h.

$$f(x) = \int_0^{t_0} u_0(x + s\, v_0)\, ds \; ,$$

wobei $u_0(x) = \rho(x, 0)$.

(b) Für die Aufgabe in (a) können wir das folgende quadratische Variationsproblem abhängig vom Bewegungsfeld v aufstellen

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \left(\int_0^{t_0} u_0(x + s\, v)\, ds - f(x) \right)^2 \longrightarrow \min_v \; .$$

Berechnen Sie für u_0 und f aus (a) eine Formel für das Bewegungsfeld v.

Aufgabe 4 (Umgang mit Bildern in Matlab) (5 Punkte)

Machen Sie sich unter Verwendung der Dokumentation u.a. mit den folgenden Matlab-Befehlen vertraut: imread, imagesc, imshow, colormap, colorbar, hist, fspecial, imfilter und imwrite.
Erstellen Sie dann ein Matlab m-file, das das Bild car.jpg von der Vorlesungsseite einliest, es in einer Farb- und in einer Grauskala anzeigt, das Histogramm anzeigt, eine einfache horizontale Bewegungsverzerrung anwendet und das Ergebnis wieder als ein tif-Bild speichert.