

3.2 Rekonstruktion

Bei der Aufnahme eines Bildes in der Praxis erhält man so gut wie nie direkt jenes Bild, das man gerne verwenden w"urde. Wie schon in der Einleitung beschrieben, passiert dies entweder durch Verzerrung (falsche Fokussierung der Kamera, Bewegung von Bild oder Kamera, sonstige optische Effekte) oder durch eine indirekte Messung wie bei der medizinischen Bildverarbeitung. In diesem Fall hat man zur Bestimmung des Bildes eine Integralgleichung erster Art der Form

$$(Ku)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} k(x, y)u(y) dy = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.19)$$

zu lösen. Typischerweise ist das Integral ebenfalls nur "uber eine passende Bildregion (der Einfachheit halbe wieder Ω) auszuwerten, was man einfach realisieren kann, indem k oder u ausserhalb gleich Null gesetzt wird. Das einfachste Verzerrungsmodell ist eine Fourier'sche Faltung (convolution), d.h. der Kern hat die Form

$$k(x, y) = h(x - y).$$

Ist der Kern bekannt (dies ist häufig der Fall, zumindest bis auf kleine vernachlässigbare Störungen), so erhält man ein lineares *inverses Problem*, nämlich die Lösung einer Integralgleichung erster Art. Für eine genauere Behandlung solcher Probleme verweisen wir auf die gleichnamige Vorlesung, wir werden hier nur einige wichtige Aspekte diskutieren. Manchmal von Interesse ist auch der Fall, wenn ein Faltungskern h und das Bild u unbekannt sind, man spricht dann von *blind deconvolution*.

Wir betrachten im Folgenden die Integralgleichung

$$(Ku)(x) := \int_{\Omega} k(x, y)u(y) dy = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.20)$$

bzw. den zugehörigen Integraloperator K etwas genauer. Zunächst verifizieren wir einige eigentlich schöne Eigenschaften des Operators K , wir nehmen dabei immer an, dass Ω ein glattes und beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^d sei.

Lemma 3.2.1. *Sei $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ der Integraloperator definiert durch (3.20) und sei $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Dann ist K wohldefiniert und ein beschränkter linearer Operator.*

Proof. Um die Wohldefiniertheit und Beschränktheit nachzuweisen, müssen wir zeigen, dass $\|Ku\|_{L^2(\Omega)}$ endlich ist (d.h. das Integral existiert) bzw. durch ein Vielfaches

von $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ beschränkt ist. Dazu betrachten wir also

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (Ku)(x)^2 dx &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} k(x,y)u(y) dy \right)^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} k(x,y)^2 dy \int_{\Omega} u(y)^2 dy dx \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} k(x,y)^2 dx dy \int_{\Omega} u(y)^2 dy \\ &= \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

wobei wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und den Satz von Fubini verwendet haben. Also gilt

$$\|Ku\|_{L^2(\Omega)} \leq \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

und

$$\|K\| \leq \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}.$$

Der Operator ist damit stetig und wohldefiniert. \square

Neben der Stetigkeit des Operators ist eine andere Eigenschaft von Bedeutung, nämlich die Kompaktheit. Ein Operator $K : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ zwischen Banach-Räumen heisst kompakt, falls beschränkte auf präkompakte Mengen abgebildet werden. Äquivalent kann Kompaktheit über Folgen charakterisiert werden, bei einem kompakten Operator enthält (Ku_n) eine konvergente Teilfolge, falls (u_n) beschränkt ist. Ein kompakter Operator bildet auch schwach-* konvergente Folgen auf norm-konvergente ab. Der Beweis der Kompaktheit eines Integraloperators ist etwas komplizierter und wird daher hier nicht genau dargelegt. Die Grundidee ist die Approximation des Operators durch einen Integraloperator mit endlichdimensionalem Bildraum. Dies kann durch Approximation von k mit einem ausgearteten Kern der Form

$$k_n(x,y) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x)\psi_j(y)$$

erreicht werden. Ein Integraloperator mit endlichdimensionalem Bildraum ist immer kompakt (hier gilt ja eine Analogie zu \mathbb{R}^n , wo Beschränktheit immer Präkompaktheit impliziert). Dann ist noch zu zeigen, dass der Grenzwert kompakter Operatoren wieder kompakt ist, um die Kompaktheit von K zu erreichen.

Die Kompaktheit von K ist vorteilhaft bei der Approximation des Operators, allerdings führt sie zu einem grossen Problem bei der Lösung der Integralgleichung erster Art $Ku = f$. Ist $\mathcal{X} = L^2(\Omega)$, so können wir eine Orthonormalbasis (u_n) finden, und es gilt $\|u_n\| = 1$ sowie $\|u_n - u_m\| = 1$ für $n \neq m$. Andererseits gibt es eine konvergente Teilfolge von Ku_n . D.h. wir finden in dieser Teilfolge Funktionen u und v ,

sodass $\|Ku - Kv\|$ beliebig klein ist, während $\|u - v\| = 1$ gilt. Damit kann die Inverse von K (falls sie existiert) nicht stetig sein, man spricht dann von einem schlecht gestellten oder instabilen Problem. Dies bedeutet, dass beliebig kleine Fehler in den Daten f zu beliebig grossen Fehlern in der Lösung von $Ku = f$ führen können. Da man immer mit Messfehlern bei der Aufzeichnung von f rechnen muss, ist dies ein sehr ernstes Problem in der Praxis. Nur durch spezielle Wahl der Methoden zur approximativen Lösung von $Ku = f$ kann man trotz der Instabilität sinnvolle Resultate erzielen.

3.2.1 Entfaltung mit Fourier-Transformation

Bei der Entfaltung ($k(x, y) = h(x - y)$) ist es naheliegend, den Fourier'schen Faltungssatz zu verwenden, der ja das Lösen der Integralgleichung auf eine Division im Frequenzraum (und Berechnung von Fouriertransformation und inverser Fouriertransformation, numerisch mit FFT) zurückführt. Es gilt ja

$$\mathcal{F}(h * u) = (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(h) \mathcal{F}(u),$$

und damit könnte die Lösung der Gleichung direkt aus der Formel

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(f)}{(2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(h)}$$

berechnet werden muss. Dies ist aber nur für exakte Daten möglich, da bei Messfehlern die Instabilität der Integralgleichung wieder Probleme macht. Dies äussert sich in diesem Fall indirekt aus den Eigenschaften der Fouriertransformation von h . Ist h ein glatter Kern (in vielen Fällen hat man es sogar mit analytischen Kernen wie der Gauss-Verteilung zu tun), dann fällt die Fouriertransformierte gegen Null ab für $|\omega| \rightarrow \infty$. Für ein verrauschtes Bild f und ein exaktes Bild \hat{f} ist der Fehler bei dieser Rekonstruktionsformel

$$\mathcal{F}(u - \hat{u})(\omega) = \frac{\mathcal{F}(f - \hat{f})(\omega)}{(2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(h)(\omega)}.$$

Nun wird das Rauschen aber meist hochfrequent sein, d.h. man macht einen grossen Fehler zwischen $\mathcal{F}(f)$ und $\mathcal{F}(\hat{f})$ vor allem für grosses ω . Dort ist aber $|\mathcal{F}(h)(\omega)|$ klein, d.h. der Fehler wird enorm verstärkt. Deshalb ist die obige Rekonstruktionsformel für verrauschte Daten im allgemeinen unbrauchbar und man benötigt eine Regularisierung, um auch im verrauschten Fall noch sinnvolle Approximationen berechnen zu können.

Wir sehen sofort, dass das Problem bei der Rekonstruktionsformel die Division durch $\mathcal{F}(h)$ bei kleinen Werten ist. Deshalb ist es naheliegend den Term $\frac{1}{\mathcal{F}(h)(\omega)}$ zu approximieren. Dies kann passieren, in dem man eine Parameter-abhängige Funktion R_α

definiert, sodass R_α beschränkt ist für $\alpha > 0$, aber für $\alpha \rightarrow 0$ punktweise gegen die Funktion $R_0(t) = \frac{1}{t}$ konvergiert. Die resultierende approximative Rekonstruktionsformel ist dann

$$\mathcal{F}(u_\alpha)(\omega) = R_\alpha(\mathcal{F}(h)(\omega)) \frac{\mathcal{F}(f)(\omega)}{(2\pi)^{d/2}}. \quad (3.21)$$

Beispiele für die Funktion R_α sind einfaches Abschneiden

$$R_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{für } |t| > \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

oder Verschieben des Nenners von Null weg, etwa durch

$$R_\alpha(t) = \frac{1}{\arg(t)(|t| + \alpha)}$$

oder

$$R_\alpha(t) = \frac{\bar{t}}{|t|^2 + \alpha^2}.$$

In den beiden ersten Beispielen gilt $|R_\alpha(t)| \leq \frac{1}{\alpha} < \infty$, im letzten $|R_\alpha(t)| \leq \frac{1}{2\alpha} < \infty$.

Ist C_α eine obere Schranke für R_α und gilt

$$\|f - \hat{f}\|_{L^2} \leq \sigma \quad (3.22)$$

für die verrauschten Daten, dann können wir den Rekonstruktionsfehler durch C_α und σ abschätzen. Nach dem Satz von Plancherel gilt (mit \hat{u} als Lösung von $h * \hat{u} = \hat{f}$ wie oben)

$$\begin{aligned} \|u_\alpha - \hat{u}\|_{L^2} &= \|\mathcal{F}(u_\alpha) - \mathcal{F}(\hat{u})\|_{L^2} \\ &\leq \|\mathcal{F}(u_\alpha) - \mathcal{F}(\hat{u}_\alpha)\|_{L^2} + \|\mathcal{F}(\hat{u}_\alpha) - \mathcal{F}(\hat{u})\|_{L^2}, \end{aligned}$$

wobei

$$\hat{u}_\alpha = R_\alpha(\mathcal{F}(h)(\omega)) \frac{\mathcal{F}(\hat{f})(\omega)}{(2\pi)^{d/2}}.$$

Man kann zeigen, dass der zweite Term gegen Null konvergiert für $\alpha \rightarrow 0$, hier spielt nur der Approximationsfehler für die exakten Daten \hat{f} eine Rolle. Der erste Term des Fehlers ist leicht abzuschätzen, es gilt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(u_\alpha) - \mathcal{F}(\hat{u}_\alpha)\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| R_\alpha(\mathcal{F}(h)(\omega)) \mathcal{F}(f - \hat{f})(\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |R_\alpha(\mathcal{F}(h)(\omega))|^2 \left| \mathcal{F}(f - \hat{f})(\omega) \right|^2 d\omega \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^d} C_\alpha^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \mathcal{F}(f - \hat{f})(\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} C_\alpha^2 \|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(\hat{f})\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Eine weitere Anwendung des Satzes von Plancherel impliziert dann

$$\|\mathcal{F}(u_\alpha) - \mathcal{F}(\hat{u}_\alpha)\|_{L^2} \leq \frac{C_\alpha}{(2\pi)^{d/2}} \|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(\hat{f})\|_{L^2} = \|f - \hat{f}\|_{L^2} \leq \frac{C_\alpha}{(2\pi)^{d/2}} \sigma.$$

Dies impliziert auch sofort eine Bedingung an die richtige Wahl des Parameters α in Abhängigkeit von der Varianz des Rauschens, es muss ja für die Konvergenz zum richtigen Bild für $\sigma \rightarrow 0$ auch $C_\alpha \sigma \rightarrow 0$ gelten. In den obigen Beispielen bedeutet dies immer $\frac{\sigma}{\alpha} \rightarrow 0$, d.h. α muss langsamer gegen Null gehen als σ .

Eine Approximation der obigen Form ergibt immer eine lineare Methode zur Regularisierung, und in allen Fällen werden durch die Wahl der Funktion R_α hohe Frequenzen gedämpft. Dies bedeutet natürlich wieder für das rekonstruierte (entzerrte) Bild, dass Kanten immer noch verschwommen sind. Falls Kanten wichtig sind, ist es nützlich wieder zu einer Variationsmethode überzugehen, die scharfe Kanten berücksichtigt. Dies werden wir später diskutieren.

3.2.2 Variationsmethoden zur Bildrekonstruktion

Variationsmethoden sind sehr einfach vom Entrauschen zum Entzerren und zur Rekonstruktion zu verallgemeinern. Genauso wie in (??) muss nur im ersten Term im Zielfunktional u durch Ku ersetzt werden, um die Verzerrung oder die Bildmodalität, die zu den Daten führt, korrekt wiederzugeben. Bei einem Gradienten-Term in der Energie erhalten wir also

$$J(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |Ku - f|^2 dx + \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx \quad (3.23)$$

In einfachen Fällen können wir bei der Entfaltung die Variationsmethoden auch wieder mit Fourier-Methoden in Beziehung setzen. Bei der einfachsten Regularisierung mit der quadratischen L^2 -Norm

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |h * u - f|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx$$

erhalten wir durch Anwendung des Faltungssatzes und des Satzes von Plancherel ein umgeschriebenes Funktional in der Fourier-Transformierten $v = \mathcal{F}(u)$

$$\begin{aligned} \hat{J}(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |(2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(h)v - \mathcal{F}(f)|^2 d\omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} [|(2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(h)v - \mathcal{F}(f)|^2 + \alpha |v|^2] d\omega \end{aligned}$$

3. Grundaufgaben der Bildverarbeitung

Das Minimum dieses Funktional können wir durch punktweise Minimierung des Integranden für alle ω berechnen. Sie $z = v(\omega)$, dann minimieren wir

$$|(2\pi)^{d/2}\mathcal{F}(h)(\omega)z - \mathcal{F}(f)(\omega)|^2 + \alpha|z|^2.$$

Die Optimalitätsbedingung liefert

$$(2\pi)^d |\mathcal{F}(h)(\omega)|^2 z - (2\pi)^{d/2} \overline{\mathcal{F}(h)(\omega)} \mathcal{F}(f)(\omega) + \alpha z = 0$$

und damit

$$v(\omega) = \frac{(2\pi)^{d/2} \overline{\mathcal{F}(h)(\omega)} \mathcal{F}(f)(\omega)}{(2\pi)^d |\mathcal{F}(h)(\omega)|^2 + \alpha}.$$

Zum Vergleich betrachten wir auch noch ein gradientenbasiertes Funktional, nämlich die Regularisierung mit der H^1 -Seminorm

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |h * u - f|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx.$$

Mit einem analogen Vorgehen wie oben und der Differentiationsregel

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} u) = i\omega_j \mathcal{F}(u)$$

erhalten wir das äquivalent Funktional

$$\begin{aligned} \hat{J}(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |(2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(h)v - \mathcal{F}(f)|^2 d\omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^2 |v|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} [|(2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(h)v - \mathcal{F}(f)|^2 + \alpha |\omega|^2 |v|^2] d\omega \end{aligned}$$

und somit am Ende

$$v(\omega) = \frac{(2\pi)^{d/2} \overline{\mathcal{F}(h)(\omega)} \mathcal{F}(f)(\omega)}{(2\pi)^d |\mathcal{F}(h)(\omega)|^2 + \alpha |\omega|^2}.$$

Vergleichend sehen wir nun die Auswirkung der Regularisierung. Während die L^2 -Regularisierung alle Frequenzen gleich dämpft, werden bei der gradientenbasierten Regularisierung höhere Frequenzen durch den Anteil $|\omega|^2$ im Nenner stärker gedämpft, eine glattere Rekonstruktion somit bevorzugt.