

# 3

## Grundaufgaben der Bildverarbeitung

In diesem Kapitel werden wir uns mit den mathematischen Grundaufgaben und Modellen der Bildverarbeitung beschäftigen, die insbesondere in der Biomedizinischen Bildgebung von großer Bedeutung sind.

### 3.1 Filtermethoden und Entrauschung

In diesem Abschnitt starten wir mit Filtermethoden und dem Entrauschen von Bildern. Entrauschung ist eines der wichtigsten Aufgaben der digitalen Bildverarbeitung, da es vielfach Anwendung findet und eine gut verstandene Basis für viele andere Bildverarbeitungsaufgaben darstellt.

Als Rauschen bezeichnet man typischerweise unerwünschte Störungen von Intensitäten in einem Bild. Bei nahezu jedem Verfahren der Bildgebung, angefangen bei der Tomographie, über die Lichtmikroskopie bis hin zu einfachen Digitalkameras erhält man Rauscheffekte in aufgenommenen Daten. Mit Entrauschung bezeichnet man den Prozess störendes Rauschen in einem Bild zu entfernen. Aus Sicht der Anwendung werden Entrauschungsmethoden häufig als Vor- oder Nachverarbeitungsschritt verwendet um Bilder besser analysieren zu können oder um bestimmte "Features", wie z.B. Kanten, besser zu extrahieren.

$$\boxed{\text{Filter}} \longleftrightarrow \boxed{\text{PDEs}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Variationsmethoden}}$$

Wir werden diesen Abschnitt in einzelne Unterabschnitte entsprechend verschiedener Methoden unterteilen und die Zusammenhänge der verschiedenen Methoden herauszuarbeiten. Starten werden wir mit linearen Diffusionsfiltern und enden werden

wir mit bekannten Variationsmethoden zur Entrauschung. Neben einem Grundverständnis für die Charakterisierung von Rauschen in Bildern wollen wir insbesondere auch den Zusammenhang zwischen Filtern, partiellen Differentialgleichungen und Variationsmethoden beleuchten.

### 3.1.1 Rauschen und Fehlermaße

In der Bildverarbeitung können bei unterschiedlichen Anwendungen unterschiedliche Typen von Rauschen auftreten. Falls man das Rauschen als statistischen Zufallsprozess betrachtet können Rauschtypen durch unterschiedliche Verteilungen charakterisiert werden. Typischerweise verwendet man Gauss-, Laplace- oder Poisson-Verteilungen oder auch Kombinationen um den Typ von Rauschen a-priori zu modellieren.

Offensichtliche Fehler in der Bildgebung sind Intensitätsfehler. Man kann diese Fehler ansehen als Realisierungen von unabhängigen Zufallsvariablen, die auf jedem Pixel getrennt arbeiten.

Das einfachste Modell für Intensitätsfehler ist additives Rauschen. Für ein diskretes Bild  $U$  und Rauschen  $\delta$  sind die gemessenen Daten  $F$  einfach punktweise gegeben durch

$$F = U + \delta .$$

Falls jede Zufallsvariable einer Gauss-Verteilung genügt, spricht man von additivem Gauss'schen Rauschen. Andere gebräuchliche additive Rauschmodelle erhält man, wenn man eine Laplace-, Gleich- oder auch eine Poisson-Verteilung (Letztere mit konstantem Parameter) annimmt.

Ein Modell für multiplikatives Rauschen ist analog gegeben durch

$$F = U \cdot \delta .$$

Ein typischer Fall für multiplikatives Rauschen ist gegeben durch Gamma verteilte Zufallsvariablen.

Gerade auch im Hinblick auf viele biomedizinische Bildgebungsverfahren gibt es bekannte Rauschmodelle, wie Poisson Rauschen oder Salt-and-Pepper Rauschen, die über eine Abhängigkeit von  $U$  definiert sind

$$F = \delta(U) ,$$

d.h. sie sind also weder additiv noch multiplikativ. Fehler beim Zählen von Photonen, wie z.B. in vielen Bereichen der Tomographie, Mikroskopie aber auch bei

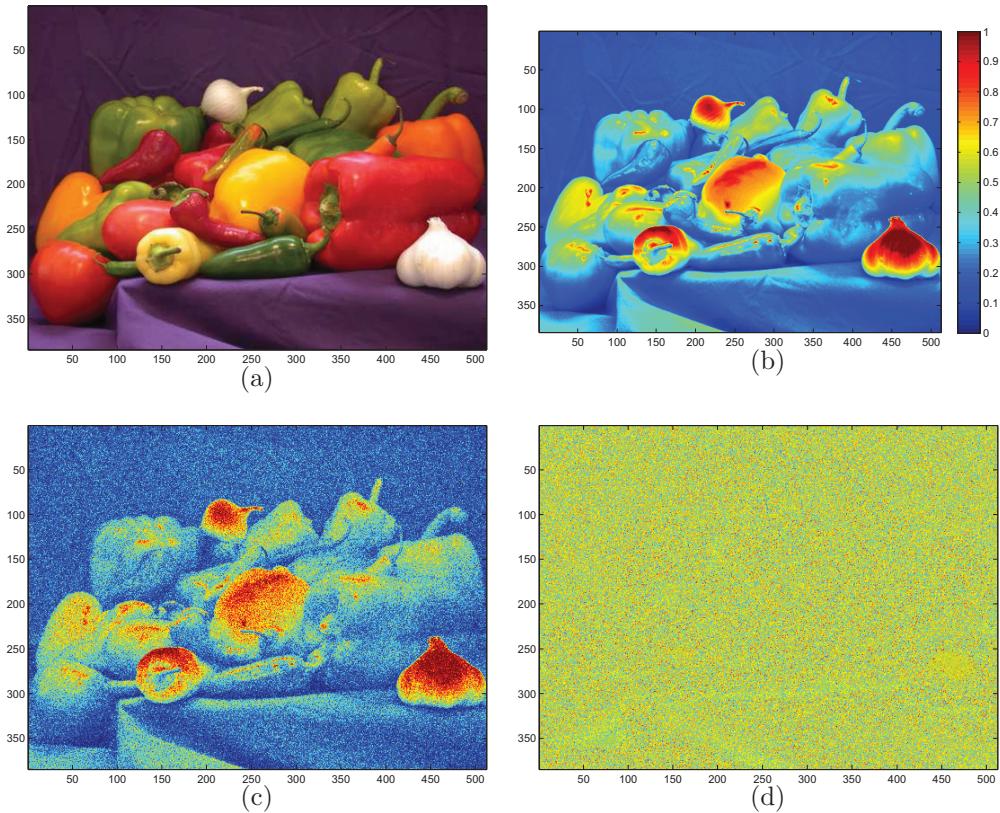


Figure 3.1: (a) Originalbild; (b) Graustufenbild  $u$  mit jet colorbar visualisiert; (c) Bild  $f$  mit additivem Gauss'schen Rauschen; (d)  $u - f$ , Gauss'sches Rauschen

CCD Sensoren in Digitalkameras oder in der Astronomie, werden typischerweise über Poisson Rauschen modelliert.

Im Folgenden konzentrieren wir uns bei den Filtermethoden zunächst auf einfaches additives Gauss'sches Rauschen in gemessenen Daten.

Bevor wir uns den verschiedenen Methoden zuwenden, sollten wir noch die mögliche Bewertung der Qualität einer Methode diskutieren. Eine einfache Bewertung wäre natürlich eine Kennzahl, die bei einer perfekten Entrauschung null wird bzw. mit schlechterer Qualität wächst (oder umgekehrt). Zum Test einer Methode mit künstlichen Daten kann dabei einfach den Abstand zwischen der Entrauschung und dem sauberen Bild messen, und zwar in einer geeigneten Norm. Benutzen wir die Notation  $\hat{f}$  für das saubere Bild,  $f$  für die verrauschten Daten, und  $u$  für die Entrauschung einer gewissen Methode, dann ist ein entsprechendes Fehlermaß gegeben durch

$$e_{absolut} = \|u - \hat{f}\|. \quad (3.1)$$

Man kann natürlich auch den relativen Fehler in Bezug auf das Rauschen betrachten,

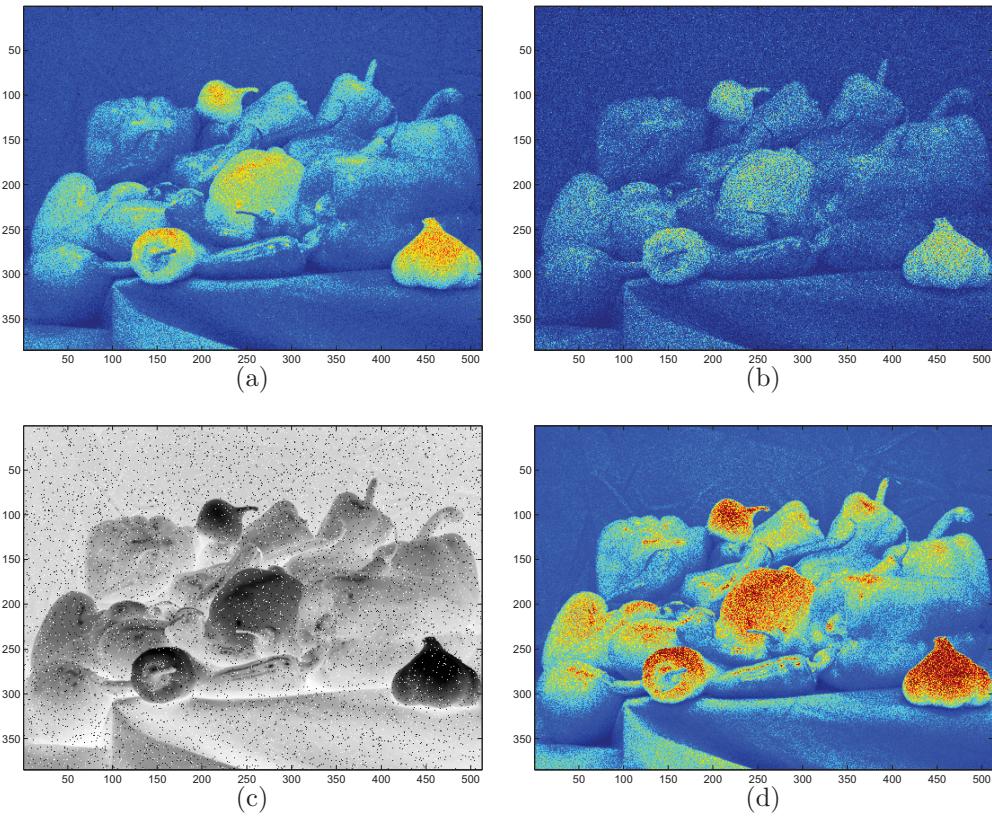


Figure 3.2: (a) Bild aus Abbildung 3.1 mit Poisson Rauschen mit großem Erwartungswert; (b) Bild mit Poisson Rauschen mit kleinem Erwartungswert; (c) Salt-and-Pepper Rauschen; (d) Multiplikatives Rauschen (speckle noise)

d.h.

$$e_{relativ} = \frac{\|u - \hat{f}\|}{\|f - \hat{f}\|} \quad (3.2)$$

oder den skalierten Fehler

$$e_{skaliert} = \frac{\|u - \hat{f}\|}{\|\hat{f}\|}. \quad (3.3)$$

Eine Variante des skalierten Fehlers ist das sehr gebräuchliche Signal-to-Noise ratio (SNR, Signal-Rausch-Verhältnis). Die Namensgebung basiert auf der Idee, dass  $\|u - \hat{f}\|_2$  so etwas wie das Rauschen der Methode misst (beachte  $\|f - \hat{f}\|_2$  ist das tatsächliche Rauschen) und  $\|\hat{f}\|_2$  den Gehalt des Signals. Hier ist  $\|\cdot\|_2$  im kontinuierlichen Fall die  $L^2$ -Norm

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} u(x)^2 dx}$$

und im diskreten Fall die skalierte  $\ell^2$ -Norm

$$\|U\|_2 = \sqrt{\frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i,j} U_{i,j}^2}.$$

Als Signal-to-Noise ratio erhält man dann

$$SNR = -\log \left( \frac{\|u - \hat{f}\|_2}{\|\hat{f}\|_2} \right). \quad (3.4)$$

Man beachte dabei die Umkehrung der Monotonie, das SNR ist hoch bei guter Qualität und niedrig bei schlechter Qualität der Rekonstruktion. Eine ebenfalls weit verbreitete Variante des SNR ist das Peak-Signal-to-Noise ratio

$$PSNR = -\log \left( \frac{\|u - \hat{f}\|_2}{\|\hat{f}\|_\infty} \right). \quad (3.5)$$

Hierbei vergleicht man das Rauschen mit dem Peak im Bild, d.h.  $\|\hat{f}\|_\infty = \sup |\hat{f}|$ .

Die beschriebenen Fehlermaße sind insbesondere bei additiven Rauschmodellen (z.B. Gauss, Laplace) sinnvoll, da man in statistischen Sinne eine Korrespondenz zu  $L^1$  und  $L^2$  Normen zeigen kann. Für andere Rauschtypen, sollte man zusätzlich auch andere Fehlermaße in Betracht ziehen, z.B. werden wir in späteren Kapiteln sehen, dass die sogenannte Kullback-Leibler Distanz ein geeignetes Fehlermaß für Poisson Rauschen darstellt.

In manchen Fällen wird es nötig sein, auch andere Fehlermaße als jene in einer Norm zu betrachten, z.B. wenn man primär an der Rekonstruktion von Kanten interessiert ist. In diesem Fall wird man eher geometrische Fehlermaße (z.B. in allgemeineren Metriken) für die Abstände der Kantenmengen verwenden.

### 3.1.2 Lokale Glättungsfilter

Im Folgenden werden wir einige Filtermethoden zum Entrauschen diskutieren. Die Bezeichnung Filter hat ihren Ursprung in der Signalanalyse, als ein Verfahren das nur einen Teil des Signals (bzw. des Bildes) liefert. Die Hoffnung beim Entrauschen ist natürlich, dass das saubere Bild aus dem Rauschen gefiltert wird. Lokale Glättungsfilter basieren auf der Idee, dass lokal meist ähnliche Grau- oder Farbwerte auftreten. Deshalb versucht man das Bild durch eine lokale Mittelung zu ersetzen. Dabei werden dann auch die zufälligen Störungen (das Rauschen) gemittelt. Geht man wie oben eingeführt beim Rauschen von unabhängigen gleichverteilten Zufallsvariablen aus, dann sollte dadurch auch die Varianz des Signals reduziert werden.

Ein linearer lokaler Glättungsfilter hat die allgemeine Form

$$u = G_\epsilon * f, \quad (3.6)$$

wobei  $G_\epsilon * f$  die Faltung des verrauschten Bildes mit einem Kern  $G_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^d} G(\frac{\cdot}{\epsilon})$  von spezieller Form ist. Um eine sinnvolle Konvexkombination zu erhalten sollte  $G$  nichtnegativ sein und Mittelwert eins haben. Um die Lokalität zu erhalten sollte  $G$  sein Maximum bei Null annehmen und für große Argumente gegen Null abfallen. Ein einfaches und oft verwendetes Beispiel einer solchen Funktion ist wieder die Gauss-Verteilung, aber auch Faltungskerne mit lokalem Träger sind von Interesse. Der Parameter  $\epsilon$  misst die Skala auf der gemittelt wird. Die Faltung kann man dabei sowohl im kontinuierlichen als

$$G_\epsilon * f = \frac{1}{\epsilon^d} \int_{\Omega} G\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) f(y) dy \quad (3.7)$$

als auch im diskreten Modell als

$$(G_\epsilon * F)_{ij} = \frac{1}{\epsilon^d} \sum_{k,\ell} G\left(\frac{x_{ij} - x_{k\ell}}{\epsilon}\right) F_{k\ell} \quad (3.8)$$

definieren. Im diskreten Fall ist natürlich darauf zu achten, dass  $\epsilon$  in geeigneter Weise in Abhängigkeit von der Gitterweite gewählt wird, bei zu kleinem  $\epsilon$  tritt effektiv keine Glättung auf.

Lokale Glättungsverfahren reduzieren in der Praxis tatsächlich das Rauschen, allerdings gibt es auch ein potentielles Problem solcher Filter-Verfahren, nämlich Überglättung. Diese betrifft vor allem Kanten, da bei einer Kante am stärksten die Annahme lokal ähnlicher Grauwerte verletzt ist. Denken wir z.B. an eine schwarz-weiß Kante, so werden die lokalen Grauwerte an der Kante zu Grau gemittelt. Damit wird die Kante zu einem kontinuierlichen Übergang der Grauwerte gemittelt, und damit erscheint die Kante optisch verschmiert.

### Spezieller lokaler Filter und additives Rauschen

Zum näheren Verständnis betrachten wir den diskreten Fall und einen speziellen lokalen Filter der Form

$$U_{ij} = (1 - 4\alpha)F_{ij} + \alpha(F_{i-1j} + F_{i+1j} + F_{ij-1} + F_{ij+1}), \quad (3.9)$$

d.h. der Filter wirkt nur auf die benachbarten Pixel. Dabei ist  $\alpha \in (0, \frac{1}{5})$  der Parameter, der die Gewichtung misst. Der Skalenparameter  $\epsilon$  kann mit der Größe des Gitters identifiziert werden. Wir nehmen an, dass die Beobachtung durch punktweise Gauss'sches Rauschen entstanden ist, d.h.

$$F_{ij} = \hat{F}_{ij} + \delta_{ij}^\sigma.$$

Durch den Filter erhalten wir einen systematischen Fehler, d.h.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U_{ij}) &= (1 - 4\alpha)\mathbb{E}(F_{ij}) + \alpha(\mathbb{E}(F_{i-1j}) + \mathbb{E}(F_{i+1j}) + \mathbb{E}(F_{ij-1}) + \mathbb{E}(F_{ij+1})) \\ &= (1 - 4\alpha)\hat{F}_{ij} + \alpha(\hat{F}_{i-1j} + \hat{F}_{i+1j} + \hat{F}_{ij-1} + \hat{F}_{ij+1}),\end{aligned}$$

und damit im allgemeinen  $\mathbb{E}(U_{ij}) \neq \hat{F}_{ij}$ . Der Filter hat also einen gewissen Nachteil, den man nur dann in Kauf nehmen sollte, wenn zumindest der mittlere Fehler kleiner wird. Dazu betrachten wir als

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((U_{ij} - \hat{F}_{ij})^2) &= \mathbb{E}((U_{ij} - \mathbb{E}(U_{ij}) + \mathbb{E}(U_{ij}) - \hat{F}_{ij})^2) \\ &= \mathbb{E}((U_{ij} - \mathbb{E}(U_{ij}))^2) + (\mathbb{E}(U_{ij}) - \hat{F}_{ij})^2\end{aligned}$$

Wir beginnen mit dem ersten Term und erhalten wegen der Unabhängigkeit der  $F_{ij}$  und  $\mathbb{E}(F_{ij}) = \hat{F}_{ij}$ :

$$\begin{aligned}U_{ij} - \mathbb{E}(U_{ij}) &= (1 - 4\alpha)(F_{ij} - \hat{F}_{ij}) + \alpha(F_{i-1j} - \hat{F}_{i-1j} + F_{i+1j} - \hat{F}_{i+1j} + \\ &\quad F_{ij-1} - \hat{F}_{ij-1} + F_{ij+1} - \hat{F}_{ij+1}) \\ &= (1 - 4\alpha)\delta_{ij}^\sigma + \alpha(\delta_{i-1j}^\sigma + \delta_{i+1j}^\sigma + \delta_{ij-1}^\sigma + \delta_{ij+1}^\sigma),\end{aligned}$$

wobei  $\delta_{ij}^\sigma$  unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Mittelwert 0 und Standardabweichung  $\sigma$  sind. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((U_{ij} - \mathbb{E}(U_{ij}))^2) &= (1 - 4\alpha)^2\mathbb{E}((\delta_{ij}^\sigma)^2) + \alpha^2(\mathbb{E}((\delta_{i+1j}^\sigma)^2) + \mathbb{E}((\delta_{i-1j}^\sigma)^2) + \\ &\quad \mathbb{E}((\delta_{ij+1}^\sigma)^2) + \mathbb{E}((\delta_{ij-1}^\sigma)^2)) \\ &= (1 - 4\alpha)^2\sigma^2 + 4\alpha\sigma^2 = (1 - 8\alpha + 20\alpha^2)\sigma^2.\end{aligned}$$

Das Rauschen wird also durch den Filter verringert, da dieser Teil des Fehlers für  $\alpha > 0$  kleiner als  $\sigma$  ist. Nun betrachten wir noch den zweiten Term in der obigen Abschätzung, die den systematischen Fehler beschreibt. Es gilt ja

$$\mathbb{E}(U_{ij}) - \hat{F}_{ij} = \alpha(F_{i-1j} + F_{i+1j} + F_{ij-1} + F_{ij+1} - 4F_{ij}).$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass  $F_{ij}$  der Pixelwert zum Index  $(ih, jh)$  ist, wobei  $h$  die (kleine) Pixelgröße ist. Wir denken also  $F_{ij} = f(x_{ij})$  für eine geeignete Grauwertfunktion  $f$ . Ist  $f$  zweimal stetig differenzierbar, so folgt aus dem Mittelwertsatz die Existenz von  $\xi_1 \in ((i-1)h, (i+1)h) \times \{jh\}$  und  $\xi_2 \in \{ih\} \times ((j-1)h, (j+1)h)$ , sodass

$$F_{i-1j} + F_{i+1j} - 2F_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\xi_1)h^2$$

und

$$F_{ij-1} + F_{ij+1} - 2F_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\xi_2)h^2.$$

Also können wir den zweiten Teil des Fehlers durch

$$\mathbb{E}(U_{ij} - \hat{F}_{ij})^2 \leq 4 \max\{\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right\|_\infty, \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right\|_\infty\} \alpha^2 h^4$$

abschätzen.

Damit erhalten wir abschließend die Abschätzung

$$\mathbb{E}((U_{ij} - \hat{F}_{ij})^2) \leq (1 - 8\alpha + 20\alpha^2)\sigma^2 + 4 \max\{\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right\|_\infty, \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right\|_\infty\} \alpha^2 h^4. \quad (3.10)$$

Insbesondere ist für  $h$  hinreichend klein, der Fehler im quadratischen Mittel kleiner als  $\sigma^2$  und somit erscheint es sinnvoll, den Filter zu benutzen. Man sieht aber auch, dass die zweite Ableitung von  $f$  wesentlich ist, also sollte man gerade bei weniger glatten Stellen wie Kanten Probleme erwarten. Diese treten in der Praxis auch auf und bewirken ein signifikantes Verschmieren, weshalb eine Vielfalt anderer Filter entwickelt wurden, die besser mit Kanten umgehen können.

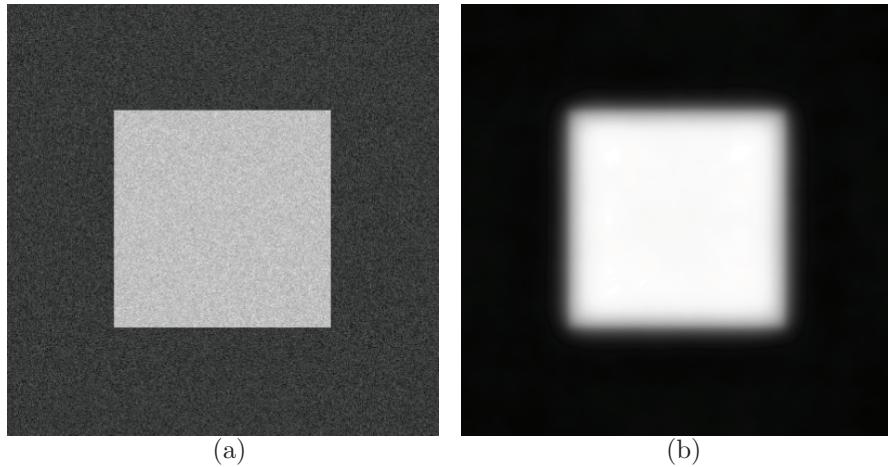


Figure 3.3: (a) Synthetisches Bild mit additivem Gauss'schen Rauschen; (b) Entrauschung mit linearem Filter

### 3.1.3 Frequenzraumfilter

Sehr analog zu Glättungsfiltern oder eigentlich nur eine andere Betrachtungsweise sind Frequenzraumfilter, die in der Form

$$u = \mathcal{F}^{-1}(\psi_\epsilon \mathcal{F}(f)) \quad (3.11)$$

gegeben sind, wobei  $\psi_\epsilon$  eine Funktion ist, die gewisse Frequenzen dämpft oder ganz eliminiert (wiederum abhängig von einem Skalenparameter  $\epsilon$ ). Den Zusammenhang mit der Filterdefinition (3.6) liefert der Faltungssatz, denn mit  $G_\epsilon := (2\pi)^{-d/2} \mathcal{F}^{-1}(\psi_\epsilon)$  folgt

$$G_\epsilon * f = (2\pi)^{-d/2} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(G_\epsilon) \mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}^{-1}(\psi_\epsilon \mathcal{F}(f)).$$

Die ursprüngliche Motivation der Konstruktion von Frequenzraumfiltern ist eine etwas andere als jene der lokalen Glättung. Im Frequenzraum ist die zentrale Idee, dass Rauschen meist hohen Frequenzen entspricht und man deshalb diese Frequenzen zumindest dämpfen sollte. Man spricht dann von einem *Lowpass-Filter*, da nur die niedrigen Frequenzen unverändert bleiben (analog einem Hardware-Filter für ein Signal, bei dem nur die niedrigfrequenten Anteile durchkommen). Die einfachste Wahl für die Funktion  $\psi_\epsilon(\omega) = \psi(\epsilon\omega)$  erhält man mit

$$\psi(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Damit schneidet  $\psi_\epsilon$  alle Frequenzanteile über  $1/\epsilon$  ab (beachte die inverse Relation da  $\epsilon$  ja der Wellenlänge entspricht), jene unter  $1/\epsilon$  bleiben unverändert. Durch Berechnung der inversen Fouriertransformation sieht man, dass man in der Form (3.6) eine sinc-Funktion ( $G(x) \sim \sin|x|/|x|$ ) als Faltungskern erhält. Wegen der lokalen Oszillation des Sinus ergibt dies eine etwas ungewöhnliche lokale Mittelung, da die Gewichtung nicht monoton mit dem Abstand fällt. Einen Filter dieser Form hätte man also wohl kaum ohne die Frequenzrauminterpretation konstruiert. Dennoch hängen die beiden Sichtweisen auch stark zusammen, da ja das Fehlen hoher Frequenzanteile automatisch bedingt, dass die lokale Variation des Grauwerts nicht extrem stark sein kann und umgekehrt, also basieren die ursprüngliche Sichtweise und die Frequenzrauminterpretation auf sehr ähnlichen Annahmen. Noch deutlicher wird der Zusammenhang wieder bei der Gauss-Verteilung als Faltungskern. Da die Fourier-Transformation dieser Funktion wieder (bis auf eine Konstante) die Gauss-Verteilung ergibt, wird also im Frequenzraum wieder mit dieser schnell fallenden Funktion gedämpft.

### 3.1.4 Diffusionsfilter und PDE-Methoden

Interessanterweise kann man lineare Glättungsfilter auch im Kontext von PDE Methoden, als sogenannte lineare Diffusionsfilter interpretieren. Dazu kann man  $\alpha$  als eine fixe gegebene Größe ansehen und den Filter einfach mehrmals wiederholen um schrittweise die Varianz zu reduzieren. Daraus erhält man ein iteratives Verfahren,

### 3. Grundaufgaben der Bildverarbeitung

---

bei dem der Filter immer auf die Lösung aus dem letzten Filterschritt angewendet wird. Mit  $u^0 := f$  erhalten wir dann

$$U_{ij}^{k+1} = (1 - 4\alpha)U_{ij}^k + \alpha(U_{i-1j}^k + U_{i+1j}^k + U_{ij-1}^k + U_{ij+1}^k).$$

Unter der Annahme, dass  $h$  klein und  $\alpha \leq \frac{1}{5}$  ist, kann man auch den kontinuierlichen Grenzwert betrachten. es gilt ja

$$\frac{U_{ij}^{k+1} - U_{ij}^k}{h^2\alpha} = \frac{1}{h^2}(U_{i-1j}^k + U_{i+1j}^k + U_{ij-1}^k + U_{ij+1}^k - 4U_{ij}^k) = \Delta u(x_{ij}) + \mathcal{O}(h^2),$$

wobei  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  den Laplace-Operator bezeichnet. Mit  $\tau = \alpha h^2 <<< 1$  können wir diese Gleichung auch als Vorwärts-Euler Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung (Diffusionsgleichung)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

mit Anfangswert  $u(0) = f$  interpretieren. Damit erhalten wir ein Verfahren basierend auf einer partiellen Differentialgleichung (PDE). Bei Verfahren dieser Art gibt es ebenfalls die Frage nach einem optimal gewählten Parameter, nämlich den optimalen Abbruchindex bei der diskreten Iteration bzw. die optimale Endzeit bei der Diffusionsgleichung.

Die iterative Anwendung des lokalen Glättungsfilter aus dem letzten Abschnitt könnten wir als Wärmeleitungsgleichung interpretieren. Es handelt sich bei der parabolischen Differentialgleichung um einen einfachen Repräsentanten der linearen Diffusionsfilter. Wie wir in Abbildung 3.3 sehen konnten, werden durch den linearen Filter Kanten verschmiert. Gerade in der biomedizinischen Bildgebung könnten Kanten wichtige Informationen für die Bildanalyse liefern. Deshalb macht es Sinn stattdessen nichtlineare Filter zur Entrauschung einzusetzen, die versuchen das Verschmieren von Kanten entlang der Normalenrichtung zu vermeiden.

Ein prominentes Beispiel für einen nichtlinearen Diffusionsfilter ist das Perona-Malik Modell

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (g(|\nabla u|^2)\nabla u), \quad u(t=0) = f, \quad g(s) = \frac{1}{1 + \lambda s} \quad (3.13)$$

wobei  $\lambda > 0$  ein Gewichtungsparameter ist. Die Hauptmotivation des Perona-Malik Modells ist es, eine Glättung in den Regionen mit kleiner Grauwertvariation durch Diffusion zu erreichen, aber die Kanten nicht zu verschmieren ( $g(|\nabla u|^2) \rightarrow 0$  für  $|\nabla u| \rightarrow \infty$ ). Das Modell reduziert also die Diffusivität an Stellen, an denen mit großer Wahrscheinlichkeit Kanten vorliegen.

Wie wir gesehen haben, führen lineare und nichtlineare Filter in sinnvollen Asymptotiken auf die Lösung parabolischer Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(\nabla u, D^2 u), \quad u(0) = f, \quad (3.14)$$

das entrauschte Bild entspricht dann der Lösung dieser Gleichung zu einem gewissen Zeitpunkt  $T > 0$ . Da man in einem solchen Fall Glättung durch Diffusion erreicht, spricht man von einem Diffusionsfilter. Auch der Ausdruck Scale Space Methode ist dafür sehr gebräuchlich, denn die Methode eliminiert für wachsendes  $T$  die kleineren Skalen und die verbleibenden Skalen werden immer größer.

### 3.1.5 Entrauschung mit Variationsmethoden

Im letzten Abschnitt haben wir den lokalen Glättungsfilter mit einer PDE Methode in Beziehung gesetzt. Nun wollen wir übergehen zu einer Interpretation im Sinne von Variationsmethoden. Im Vergleich zum letzten Abschnitt nehmen wir nun an, der Parameter  $\alpha$  sei variabel. Natürlich sollte man ihn dann optimal wählen. Die optimale Wahl des Parameters muss dabei die zwei konkurrierenden Effekte des Filters ausbalancieren. Einerseits hat der Filter ja den positiven Effekt die Varianz des Rauschens durch die Mittelung auszuglättten, und die Varianz sinkt mit  $\alpha$  (und erreicht sein Minimum bei  $\alpha = \frac{1}{5}$ , wie man aus dem ersten Teil des mittleren quadratischen Fehlers leicht nachrechnet). Andererseits wächst der systematische Fehler (siehe zweiter Teil) mit  $\alpha$ , man erwartet also ein optimales  $\alpha$  abhängig von den Daten irgendwo im Intervall  $(0, \frac{1}{5})$ . Dies sieht man auch durch eine andere Charakterisierung der Entrauschung als Minimum des Funktionals (bei geeigneter Behandlung der Gitterpunkte am Rand)

$$\begin{aligned} J(U) = & \frac{1}{2} \sum_{i,j} (U_{ij} - F_{ij})^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{i,j} [(F_{i+1j} - F_{ij})^2 + (F_{ij+1} - F_{ij})^2] + \\ & \alpha \sum_{i,j} [(F_{i+1j} - F_{ij})(U_{i+1j} - U_{ij}) + (F_{ij+1} - F_{ij})(U_{ij+1} - U_{ij})]. \end{aligned}$$

Das Regularisierungsfunktional, d.h.

$$R(U) = J(U) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} (U_{ij} - F_{ij})^2$$

kann als Taylor-Entwicklung erster Ordnung des Funktionals

$$\tilde{R}(U) = \frac{\alpha}{2} \sum_{i,j} [(U_{i+1j} - U_{ij})^2 + (U_{ij+1} - U_{ij})^2]$$

um  $f$  interpretieren. Da für kleines  $\alpha$  das Minimum  $U$  nahe bei  $f$  liegen wird, sollte der Unterschied zwischen  $R(U)$  und  $\tilde{R}(U)$  klein sein. Es liegt die Vermutung nahe, dass  $U$  nahe beim Minimum von  $J - R + \tilde{R}$  liegt, einem Funktional, das wir in späteren Kapiteln zur Modellierung als MAP-Schätzer kennen lernen werden. Den

kontinuierlichen Grenzwert ( $h \rightarrow 0$ ) dieses Funktionalen, nämlich

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \rightarrow \min_u . \quad (3.15)$$

Bislang haben wir uns bei allen bisherigen Verfahren immer auf additives Gauss'sches Rauschen konzentriert. Obwohl die vorher beschriebenen Filtermethoden häufig einfach und effizient realisiert werden können, haben Variationsmethoden im Vergleich entscheidende Vorteile. Mit Variationsmethoden hat man die Flexibilität Datensterme und Regularisierungsterme gemäß a priori Wissen über das Rauschen sowie über den Typ zu erwartender Bilder zu modellieren, leicht anzupassen und zu kombinieren.

Wir betrachten nun für  $\alpha > 0$  ein allgemeines Variationsproblem zur Entrauschtung

$$D(u, f) + \alpha R(u) \rightarrow \min_u . \quad (3.16)$$

Der Datenterm sollte dabei so gewählt werden, dass  $D$  minimal wird, wenn die Daten exakt entrauscht werden. Häufig sind für unterschiedliche Anwendungen auch unterschiedliche Rauschmodelle sinnvoll, die sich in Variationsproblemen in unterschiedlichen Datentermen widerspiegeln. In Kapitel 4 werden wir später sehen, dass sich durch eine statistische Modellierung u.a. folgende Datenterme ableiten lassen:

$$\begin{aligned} \text{Additives Gauss'sches Rauschen} &\rightsquigarrow D(u, f) = \frac{1}{2} \|u - f\|_2^2 \\ \text{Additives Laplace Rauschen} &\rightsquigarrow D(u, f) = \|u - f\|_1 \\ \text{Poisson Rauschen} &\rightsquigarrow D(u, f) = \int_{\Omega} \left( f \log \frac{f}{u} - f + u \right) dx . \end{aligned}$$

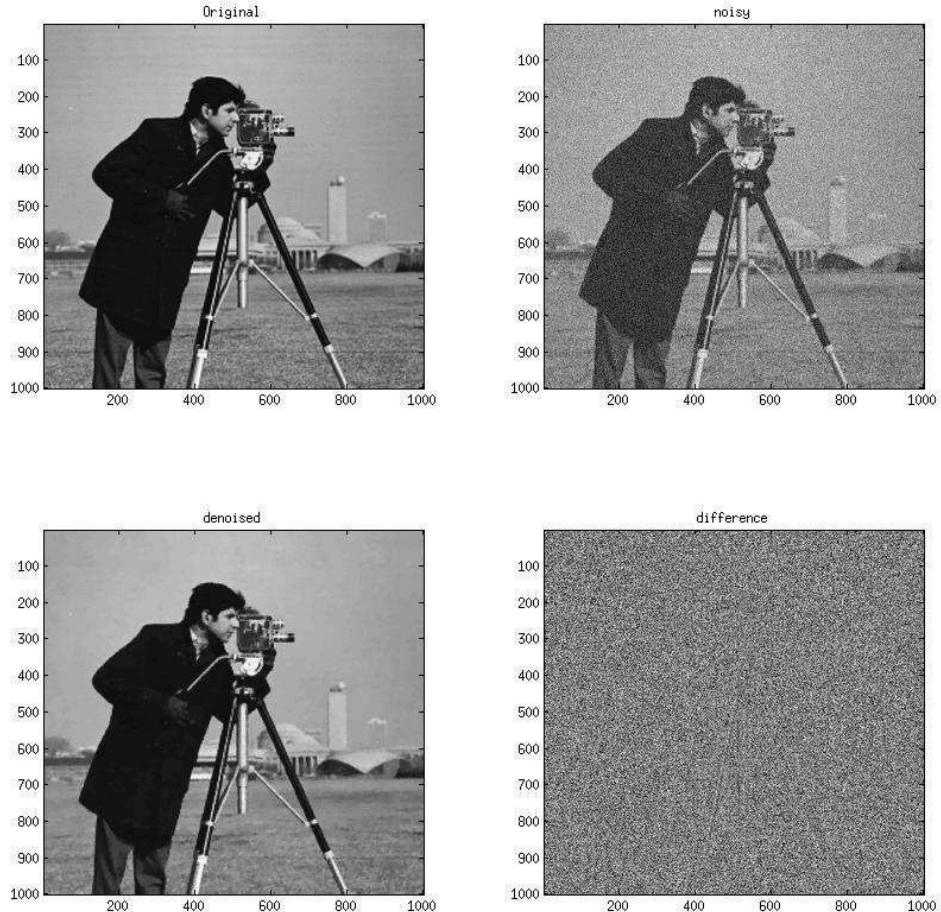
Das Regularisierungsfunktional in (3.16) sollte so konstruiert werden, dass  $R$  einen kleinen Wert annimmt, wenn das Bild sehr gut mit der a-priori Information über die "Art des Bildes" übereinstimmt. Bei der quadratischen Regularisierung in (3.15) handelt es sich wie bei dem linearen Glättungsfilter um eine homogene Glättung, die starke Oszillationen, d.h. Rauschen aber auch Kanten im Bild, bestraft. Häufig spricht man bei der Regularisierung mit der  $L^2$ -Norm des Gradienten auch von  $H^1$  Regularisierung, da sie implizit annimmt, dass  $u$  im Sobolevraum  $H^1 = W^{1,2}$  liegen soll.

Eines der bekanntesten Variationsmethoden zur Entrauschtung ist das Rudin-Osher-Fatemi (ROF) Modell

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 + \alpha |u|_{BV(\Omega)} \rightarrow \min_u ,$$

mit der totalen Variation als Regularisierungsterm

$$|u|_{BV(\Omega)} := \sup_{\substack{g \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d) \\ \|g\|_\infty \leq 1}} \int_{\Omega} u \cdot \nabla \cdot g .$$



Falls man sich auf den Funktionenraum  $W^{1,1}$  beschränkt, kann man  $|u|_{BV(\Omega)}$  identifizieren mit  $|\nabla u|$ . Mit diesem Variationsproblem lassen sich u.a. Bilder mit homogenen Regionen und scharfen Kanten (Cartoons) besonders gut entrauschen. Wir werden später in Kapitel 5 sehen, dass diesem Variationsproblem mit dem Raum von Funktionen beschränkter Totalvariation ein interessanter Funktionenraum zugrunde liegt. In der Abbildung sehen wir eine Entrauschung des Kameramanns mit dem ROF-Modell wobei wir 20% additives Gauss'sches Rauschen und  $\alpha = 0.05$  verwendet haben.

Variationsmethoden zur Entrauschung kann man als Basismodelle für viele andere Aufgaben der mathematischen Bildverarbeitung ansehen. Häufig lassen sich Datensterme und Regularisierungsterme mit anderen Funktionalen oder Nebenbedingungen sinnvoll koppeln, um umfangreichere Modelle zu realisieren.