Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 18.06.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christopher Deninger (Mathematisches Institut)
Dipl. Math. Kathrin Smetana

Übung zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

SS 2010 — Übungsblatt 9

Abgabe: 25.06.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Poincaré-Ungleichung für Funktionen mit Mittelwert 0) (6 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, konvex, beschränkt und zusammenhängend und $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass dann für $u \in H^{1,p}(\Omega)$ mit $\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} u(x)dx = 0$ die folgende Ungleichung gilt.

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \mathrm{C}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

wobei $|\Omega| = \text{Maß}(\Omega)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, zusammenhängend und beschränkt. Wir betrachten das Neumann-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot n &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Funktion $u \in H^{1,2}(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Neumann-Problems (1), falls für alle $\varphi \in H^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int\limits_{\Omega} f \varphi \, dx. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die schwache Lösung von (1) eindeutig bis auf eine Konstante ist, das heißt, dass falls u_1 schwache Lösung von (1) ist auch $u_1 + c$ (c: Konstante) eine schwache Lösung von (1) ist.

Aufgabe 3 (Neumann-Problem) (7 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, konvex, beschränkt und zusammenhängend mit Lipschitz-Rand und sei $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass das Problem (1) genau dann eine schwache Lösung besitzt, wenn

$$\int_{\Omega} f \, dx = 0. \tag{3}$$

Hinweis: Um zu zeigen, dass die Bedingung (3) notwendig ist, betrachten Sie den Raum $X := \{u \in H^{1,2}(\Omega) \mid \int\limits_{\Omega} u = 0\}$ und gehen Sie folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass X ein Hilbertraum ist.

- Definieren Sie sich dazu zunächst ein geeignetes Skalarprodukt und zeigen Sie, dass das von Ihnen definierte Skalarprodukt auch tatsächlich ein Skalarprodukt auf X ist.
- Um die Vollständigkeit von X zu zeigen, zeigen Sie zunächst, dass $(\cdot, 1)$ eine lineare und stetige Abbildung bzgl. der H^1-Norm ist. Verwenden Sie ferner, dass der Kern einer linearen und stetigen Abbildung $L(Y, Z)$ vom Banachraum Y in den Banachraum Z ein abgeschlossener Unterraum von Y ist. (Um sich mit stetigen und linearen Abbildungen vertraut zu machen, können Sie zum Beispiel das Buch von Alt über "Lineare Funktionalanalysis" verwenden.)

(b) Betrachten Sie die schwache Formulierung des Neumann-Problems auf X.

(c) Beweisen Sie dann, dass die Aussage (2) tatsächlich für alle $\varphi \in H^{1,2}(\Omega)$ gilt (und nicht nur für $\varphi \in X$.