Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 11.06.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christopher Deninger (Mathematisches Institut)
Dipl. Math. Kathrin Smetana

Übung zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

SS 2010 — Übungsblatt 8

Abgabe: 18.06.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $B^+ := \{x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^d \mid x_d > 0\}$ und $u \in C^0\left(\overline{B^+}\right) \cap C^2\left(B^+\right)$ eine harmonische Funktion mit $u = 0$ auf $\{x \in B_1(0) \mid x_d = 0\}$. Zeigen Sie, dass dann

$$v(x) \ := \ \begin{cases} u(x), & x_d \geq 0 \\ -u(x_1, \ldots, x_{d-1}, -x_d), & x_d < 0 \end{cases}$$

in $B_1(0)$ harmonisch ist.
Hinweis: Lösen Sie $\Delta w = 0$ in $B_1(0)$, $w = v$ auf $\partial B_1(0)$.

Aufgabe 2 (Schwaches Maximumprinzip) (3 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $u \in \mathring{H}^1(\Omega)(= H_0^1(\Omega))$ eine schwache Lösung von

$$-\Delta u \ \leq \ 0 \quad \text{in } \Omega,$$

d.h. für alle $\varphi \in \mathring{H}^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ f.ü. gilt:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx \ \leq \ 0$$

Zeigen Sie, dass dann bereits $u \leq 0$ f.ü. in Ω ist.

Aufgabe 3 (Dirichletsches Prinzip für das Neumannproblem) (6 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Ferner sei $u \in C^2(\Omega)$ und $f \in C^0(\Omega)$. Wir betrachten das folgende Randwertproblem:

$$-\triangle u = f \qquad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

$$\nabla u \cdot n = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega, \tag{2}$$

wobei n die äußere Normale an das Gebiet Ω darstellt.

(a) Leiten Sie die schwache Formulierung zum Randwertproblem (1)-(2) her.

(b) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
(i) u löst das Randwertproblem (1)-(2).
(ii) u minimiert das Funktional

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega fu$$

in $C^2(\Omega)$, d.h. $J(u) = \inf_{v \in C^2(\Omega)} J(v)$.

Aufgabe 4 (Schwache Formulierung der Stokes-Gleichungen) (3 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Wir betrachten die Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und $\Delta u := (\Delta u_1, \ldots, \Delta u_d)^T$. Die Stokes-Gleichungen ergeben sich durch Vereinfachung aus den Navier-Stokes Gleichungen und beschreiben die Strömung in zähfließenden Flüssigkeiten, wie z.B. Honig. Wir wollen uns nun mit der schwachen Formulierung der Stokes-Gleichungen befassen. Dazu sei

$$X \;:=\; \left\{ w \in \mathring{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \mid \operatorname{div} w = 0 \text{ f.ü. in } \Omega \right\}.$$

Die Funktion $u \in X$ heißt schwache Lösung von (3), falls für alle $\varphi \in X$ gilt:

$$\sum_{i=1}^d \int_\Omega \nabla u_i \nabla \varphi_i \;=\; \sum_{i=1}^d \int_\Omega f_i \varphi_i.$$

Zeigen Sie: Ist $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ und $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d) \cap \mathring{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $p \in C^1(\overline{\Omega})$ klassische Lösung von (3), so ist u auch schwache Lösung von (3).