Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christopher Deninger (Mathematisches Institut)
Dipl. Math. Kathrin Smetana 04.06.2010

Übung zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

SS 2010 — Übungsblatt 7

Abgabe: 11.06.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Fundamentallösung des Laplace-Operators) (5 Punkte)

(a) Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{für } d = 2, \\ \frac{1}{d(d-2)\omega_d} \frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{für } d \geq 3. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\Delta\Phi = 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $u : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ der Form

$$u(x) = v(\|x\|),$$

die harmonisch sind, d.h. $\triangle u = 0$ in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ erfüllen.
Hinweis: Setzen Sie in der Differentialgleichung an geeigneter Stelle $\varphi = v'$ und lösen Sie die Gleichung in φ. Machen Sie eine Fallunterscheidung in d und verwenden Sie für den Fall $d \geq 2$ die Methode der "Trennung der Variablen".

Aufgabe 2 (Fundamentallösung des Bilaplace-Operators) (4 Punkte)
Sei $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$s(x) \;\; := \;\; \frac{1}{8\pi}|x|^2 \ln|x|.$$

Zeigen Sie, dass s eine Fundamentallösung von $\Delta^2 u = 0$ ist, d.h. $s \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ und für alle $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Delta^2\psi s \;\; = \;\; \psi(0).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^d$ und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine harmonische, nichtnegative Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe der Poissonschen Integralformel die folgende Version der Harnackschen Ungleichung:

$$\frac{R^{d-2}\,(R-|x|)}{(R+|x|)^{d-1}} u(0) \;\leq\; u(x) \;\leq\; \frac{R^{d-2}\,(R+|x|)}{(R-|x|)^{d-1}} u(0), \quad x \in \Omega$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Seien $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $u \in C^2(I)$, $f \in C^0(I)$ und $u_a, u_b \in \mathbb{R}$. u erfülle die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u'' &= f \quad \text{in } I, \\ u'(a) &= u_a, \\ u(b) &= u_b. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösung u in Abhängigkeit von den Daten.