Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christopher Deninger (Mathematisches Institut)
Dipl. Math. Kathrin Smetana

21.05.2010

Übung zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

SS 2010 — Übungsblatt 6

Abgabe: 04.06.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Beispiele für Sobolevfunktionen) (4 Punkte)
Sei Ω das offene Einheitsquadrat im $\mathbb{R}^2$ $\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x_1| < 1,\, |x_2| < 1\}$. Wir definieren

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x_1 & \text{falls } x_1 > 0,\ |x_2| < x_1, \\ 1 + x_1 & \text{falls } x_1 < 0,\ |x_2| < -x_1, \\ 1 - x_2 & \text{falls } x_2 > 0,\ |x_1| < x_2, \\ 1 + x_2 & \text{falls } x_2 < 0,\ |x_1| < -x_2. \end{cases}$$

Für welche $p \in [1, \infty]$ liegt u in $H^{1,p}(\Omega)$?

Aufgabe 2 (Distributionsableitung) (4 Punkte)
Sei $I = (-4, 4)$ und $u : I \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x) = \begin{cases} -17 & \text{für } -4 \le x \le -2, \\ -x^4 & \text{für } -2 < x \le -1, \\ x^3 & \text{für } -1 < x \le 2, \\ -x + 4 & \text{für } \quad 2 < x \le 4. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Distributionsableitung von $\langle u \rangle$.

Aufgabe 3 (Transportproblem) (4 Punkte)
Wir betrachten die skalare Erhaltungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{in } \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass für $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ die Funktion $u(x,t) = u_0(x - t)$ in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ die Transportgleichung (1) im Distributionssinne löst.

Aufgabe 4 (Konvergenz im Distributionssinne) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ konvergiert, das heißt, dass ein u existiert, so dass

$$u_k = \sum_{n=1}^{k} \sin(nx) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u.$$

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe: Beispiel Diracfolge) (+ 4 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(r) := \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-r^2}\right) & \text{für } r \in (-1;1), \\ 0 & \text{für } r \neq (-1,1). \end{cases}$$

Wir definieren $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{\varepsilon^{-d}}{c} \cdot g(\|\frac{x}{\varepsilon}\|_2) \quad \text{mit} \quad c := \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(\|x\|_2)\, dx,$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm ist. Zeigen Sie:

(a) φ_ε ist eine Dirac-Folge.

(b) Alle φ_ε sind C^∞-Funktionen.

(c) Der Träger von φ_ε ist die Kugel $\overline{B}_\varepsilon(0)$.