Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christopher Deninger (Mathematisches Institut)
Dipl. Math. Kathrin Smetana 07.05.2010

Übung zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

SS 2010 — Übungsblatt 4

Abgabe: 14.05.2010 vor der Vorlesung

1. Definition (Skalare Erhaltungsgleichungen)
Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ gegeben. Dann heißt $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T[)$ Lösung des Anfangswertproblems für die Erhaltungsgleichung in einer Raumdimension, falls gilt

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{in } \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Definition (Charakteristik)
Sei $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T[)$ eine Lösung von (1). Eine Kurve $\Gamma_a := \{(\gamma(t),t) \mid t \in I, \gamma(0) = a\}$ mit $I \subset [0,T[$ Intervall und $\gamma \in C^1(I)$ heißt Charakteristik zu (1) genau dann wenn

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= f'(u(\gamma(t),t)) \quad \forall\, t \in I, \\ \gamma(0) &= a. \end{aligned} \tag{2}$$

3. Bemerkung
(2) ist ein skalares Anfangswertproblem für $\gamma(t)$.

Aufgabe 1 (Crash bei Erhaltungsgleichungen) (4 Punkte)
Sei $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x f(u) &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{in } \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3}$$

mit $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ und $f \in C^2(\mathbb{R})$ und sei γ eine Charakteristik von (3). Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $t \mapsto u(\gamma(t),t)$ ist konstant auf $[0,\infty)$.

(b) Die Funktion γ hat die Form $\gamma(t) = at + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Sei nun $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ und $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < -1 \\ 0 & \text{für } x > 1 \end{cases}$ und $u_0'(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Sei γ_1 eine Lösung von (2) mit $\gamma_1(0) = -2$ und γ_2 eine Lösung von (2) mit $\gamma_2(0) = 2$. Zeigen Sie, dass sich die Charakteristiken, die durch γ_1 und γ_2 gegeben sind, schneiden. Wie ist dieses Schneiden der Charakteristiken zu interpretieren?

Aufgabe 2 (Beispiele für $H^{m,p}$-Funktionen) (8 Punkte)

(a) Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x) := \|x\|^s$ für $s > 1 - \frac{d}{p}$ in $H^{1,p}(B_1(0))$ liegt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x \leq 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$ auf dem Intervall $I = (-1, 1)$ keine schwache Ableitung besitzt.

(c) Sei $\Omega = B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Betrachten Sie die Funktion

$$u(x) := \ln\big|\ln|x|\big|.$$

Zeigen Sie, dass $u \in H^{1,d}(\Omega)$ ist und dass kein $\tilde{u} \in C^0(\overline{\Omega})$ existiert mit $\tilde{u} = u$ fast überall.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für $0 < r \leq 0,5$ die Abschätzung $\ln\ln\frac{1}{r} \leq r^{-\frac{1}{4}}$ gilt.

Aufgabe 3 (Kettenregel für Sobolevfunktionen) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $1 \leq p < \infty$, $u \in H^{1,p}(\Omega)$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass dann $f \circ u \in H^{1,p}(\Omega)$ ist und:

$$D(f \circ u) \;=\; f'(u)Du \qquad \text{gilt.}$$

Hinweis: Approximieren Sie u durch glatte Funktionen.