Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christopher Deninger (Mathematisches Institut)
Dipl. Math. Kathrin Smetana

30.04.2010

Übung zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

SS 2010 — Übungsblatt 3

Abgabe: 07.05.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Modellierung von Verkehrsfluss) (4 Punkte)
Wir betrachten den Verkehrsfluss auf einer Autobahn. Sei $x \in \mathbb{R}$ die Raum- und $t \in [0, \infty[$ die Zeitkoordinate. $u : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ bezeichne die Dichte der Autos (Autos pro Kilometer) und $q : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ sei der Verkehrsfluss (Autos pro Stunde). Wir fixieren nun ein Intervall $[a, b]$ auf der Autobahn und zwei Zeitpunkte t_1 und t_2, mit $\Delta t := t_2 - t_1 \ll 1$. Messungen des Verkehrsflusses $q = f(u)$ und der Dichte der Autos u ergeben, dass der Fluss zunächst bei steigender Dichte bis zu einem gewissen Wert $f(u_m)$ zunimmt und anschließend fällt (vgl. Abbildung 1). Wir können daher annehmen, dass sich f ungefähr so schreiben läßt:

$$f(u) \approx -(u - u_m)^2 + f_0.$$

Leiten Sie davon ausgehend ein Modell für den Verkehrsfluss her.

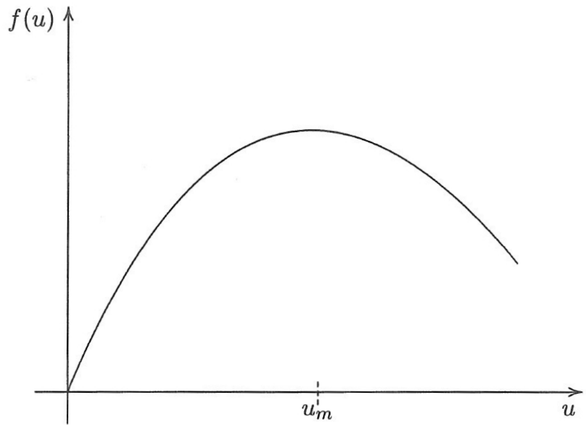

Abbildung 1: Zusammenhang zwischen Verkehrsdichte und Verkehrsfluss

Aufgabe 2 (Randwerte) (4 + 2 Punkte)

Sei $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ und seien $u_a, u_b \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u'' + u &= 0 \qquad \text{in } I, \\ u(a) &= u_a, \\ u(b) &= u_b. \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(a) Zusatzaufgabe: Alle Lösungen von (1) mit $I = [0; 1]$ sind von der Form $u(x) = a\cos x + b\sin x$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. (+ 2 Punkte)

(b) Für $u(0) = 1$, $u(1) = 1$ ist das Problem eindeutig lösbar. Hierfür dürfen Sie das Resultat von (a) verwenden.

(c) Für $u(0) = 1$, $u(\pi) = -2$ besitzt das Problem keine Lösung.

(d) Für $u(0) = 1$, $u(\pi) = -1$ existieren unendlich viele Lösungen.

(e) Falls sie existiert, ist die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -u'' + u &= 0 \qquad \text{in } I, \\ u(a) &= u_a, \\ u(b) &= u_b, \end{aligned}$$

auf dem Intervall $I = [a; b]$ eindeutig bestimmt.

1. Definition/Lemma (Faltung)

(a) Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $1 \leq p \leq \infty$. Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, so definiert

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y)f(y)dy =: (\varphi * f)(x)$$

eine Funktion $\varphi * f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, die Faltung von φ mit f.

(b) Es gilt die Faltungsabschätzung

$$\|\varphi * f\|_{L^p} \leq \|\varphi\|_{L^1} \cdot \|f\|_{L^p}.$$

(c) Ist außerdem $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, so folgt, dass $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und die partiellen Ableitungen berechnen sich durch

$$\partial^s(\varphi * f) = (\partial^s \varphi) * f.$$

2. Definiton (Dirac-Folge)
Eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ heißt Dirac-Folge, falls

$$\varphi_k \geq 0, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_k = 1, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B_\rho(0)} \varphi_k \to 0 \quad \text{für } k \to \infty \quad \text{für jedes } \rho > 0.$$

3. Beispiel für eine Dirac-Folge
Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\varphi \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1.$$

Definieren wir dann für $\varepsilon > 0$

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}),$$

so gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon = 1 \qquad \text{und} \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B_\rho(0)} \varphi_\varepsilon \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0 \quad \text{für jedes } \rho > 0.$$

Aufgabe 3 (Approximation von L^p-Funktionen) (5 Punkte)
Es sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie:
Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und φ_ε eine Dirac-Folge, so konvergiert

$$\varphi_\varepsilon * f \longrightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d) \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

4. Definition (Hölder-stetige Funktionen, Hölderräume, $C^{m,\alpha}$-Räume)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$. Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt

$$\text{höl}_\alpha(f, \overline{\Omega}) := \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha};\ x, y \in \overline{\Omega},\ x \neq y\right\} \in [0, \infty]$$

Hölder-Konstante von f auf $\overline{\Omega}$ zum Exponenten α und $\text{lip}(f,\overline{\Omega})$:=$\text{höl}_1(f,\overline{\Omega})$ Lipschitz-Konstante. Weiter definieren wir die sogenannten Hölderräume

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sum_{|s|\leq m} \|\partial^s f\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{|s|=m} \text{höl}_\alpha(\partial^s f, \overline{\Omega}),$$

$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ f \in C^m(\overline{\Omega}) \mid \|f\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty \right\}.$$

Funktionen aus $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ heißen Hölder-stetig auf $\overline{\Omega}$ und Lipschitz-stetig für $\alpha = 1$.

5. Bemerkung
$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})}$.

Aufgabe 4 (Hölderstetigkeit) (3 Punkte)
Sei $\alpha \in (0, 1]$. Beweisen Sie, dass die folgende Funktion Hölder-stetig mit Exponent α ist.

$$u(x) := \|x\|^\alpha, \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}^d.$$