Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 23.04.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christopher Deninger (Mathematisches Institut)
Dipl. Math. Kathrin Smetana

Übung zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

SS 2010 — Übungsblatt 2

Abgabe: 30.04.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Satz von Gauß) (6 Punkte)
Gegeben seien die Funktion $f(x) := (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$ und das Kugelsegment $G := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 2, x_1 > 1\}$. Sei ν die äußere Normale an G. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial G} \langle f(x), \nu(x) \rangle \, ds$$

(a) gemäß der Definition des Oberflächenintegrals,

(b) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 2 (Green'sche Formeln) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet mit Lipschitz-Rand und seien $u, v \in C^2\big(\overline{\Omega}\big)$. Beweisen Sie die Green'schen Formeln

(a) $$\int_\Omega \Delta u \, dx \;=\; \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \, ds,$$

(b) $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \;=\; -\int_\Omega u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \, \partial_\nu v \, ds,$$

(c) $$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \, dx \;=\; \int_{\partial\Omega} u \, \partial_\nu v - v \, \partial_\nu u \, ds.$$

Hierbei ist $\partial_\nu u = \langle \mathrm{grad}(u), \nu \rangle$, also die Richtungsableitung von u in Richtung ν.

Aufgabe 3 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten) (2 Punkte)
Sei $v(r, \varphi) = u(x, y)$ mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Zeigen Sie, dass dann folgendes gilt

$$\partial_r^2 v + \frac{1}{r}\partial_r v + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v \;=\; \Delta u.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $S := \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < r < 1,\, 0 < \varphi < \alpha\pi\right\}$ der Kreissektor mit dem Winkel $\alpha\pi$, $\alpha \in (0,2)$ wie in Abb. 1 dargestellt und

$$u(r,\varphi) := r^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sin\frac{\varphi}{\alpha} \qquad (x \in \overline{S}).$$

Zeigen Sie: u ist Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \triangle u &= 0 \ \text{ in } \ S, \\ u &= 0 \ \text{ auf } \ \Gamma_0 := \{x \in \partial S \,|\, \|x\| \neq 1\}\,. \end{aligned}$$

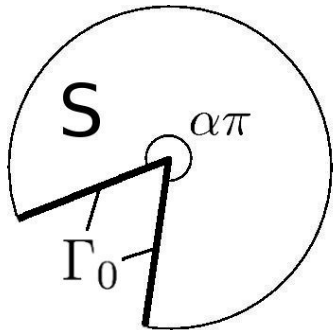

Abbildung 1: Kreissektor S.