Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 02.07.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christopher Deninger (Mathematisches Institut)
Dipl. Math. Kathrin Smetana

Übung zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

SS 2010 — Übungsblatt 11

Abgabe: 09.07.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (A priori Abschätzungen) (5 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und äußerer Normale n.

(a) Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot n &= g_N \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

mit zugehöriger schwacher Formulierung: Finde $u \in H^{1,2}(\Omega)$ so dass

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f \, \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} g_N \, \varphi \, d\sigma(x) \qquad \forall \, \varphi \in H^{1,2}(\Omega),$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$ und $g_N \in L^2(\partial\Omega)$. Beweisen Sie für die Lösung u mit $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u = 0$ die folgende A priori Abschätzung:

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g_N\|_{L^2(\partial\Omega)} \right). \tag{2}$$

Hierbei ist C eine Konstante.

(b) Wir betrachten nun das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot n &= g_N \quad \text{auf } \Sigma_N, \\ u &= g_D \quad \text{auf } \Sigma_D, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei Σ_N der Neumann- und Σ_D der Dirichletrand des Gebietes Ω sind. Die zugehörige schwache Formulierung lautet: Finde $u \in V = \{v \in H^{1,2}(\Omega) \, : \, v = g_D \text{ auf } \Sigma_D\}$ so dass

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f \, \varphi \, dx + \int_{\Sigma_N} g_N \, \varphi \, d\sigma(x) \qquad \forall \, \varphi \in V_0,$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$, $g_N \in L^2(\Sigma_N)$, $g_D \in L^2(\Sigma_D)$ und $V_0 = \{v \in H^{1,2}(\Omega) \,:\, v = 0 \text{ auf } \Sigma_D\}$. Sei $\hat{g}_D$ die H^1-Fortsetzung von g_D. Beweisen Sie für die Lösung u die folgende A priori Abschätzung:

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g_N\|_{L^2(\Sigma_N)} + \|\nabla \hat{g}_D\|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{4}$$

Hierbei ist C wieder eine Konstante. Hinweis: Es gilt die folgende allgemeine Version der Poincaré-Ungleichung.

Satz 1 (Poincaré-Ungleichung):
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Dann gibt es eine Konstante C, so dass für jede Funktion $u \in H^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq C \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5}$$

Dies gilt, falls durch eine Zusatzbedingung ausgeschlossen werden kann, dass u eine große konstante Funktion ist, zum Beispiel, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

1. $u = 0$ auf $\partial\Omega$.
2. $\int_\Omega u \; = 0$.
3. Für eine Teilmenge $\Sigma \subset \partial\Omega$ mit nichtverschwindendem $\mathcal{H}^{d-1}$-Maß gilt $u = 0$ auf Σ.

Aufgabe 2 (Der Einbettungssatz von Sobolevräume in Hölderräume in 1D)(7 Punkte)
Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es dann zu $u \in H_0^{1,2}(I)$ eine Funktion $\tilde{u} \in C^0(\overline{I})$ gibt mit $u = \tilde{u}$ fast überall in I und $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$. Beweisen Sie ferner, dass die folgende Abschätzung gilt:

$$\|\tilde{u}\|_{C^0(\overline{I})} \leq \sqrt{b-a}\, \|u\|_{H^{1,2}(I)}. \tag{6}$$

Aufgabe 3 (Explizite Lösung der Wärmeleitungsgleichung) (4 Punkte)
Sei $u_0 \in C^0(\mathbb{R})$, sodass $|u_0(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, u_0(y)dy$$

eine Lösung der Wärmeleitunggleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

ist. Dabei ist $u(x,0) = u_0(x)$ als $\lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = u_0(x)$ zu verstehen.

Hinweis: Es gilt $\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\pi}$.