Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 25.06.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christopher Deninger (Mathematisches Institut)
Dipl. Math. Kathrin Smetana

Übung zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

SS 2010 — Übungsblatt 10

Abgabe: 02.07.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten das folgende Randwertproblem für $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben ist. L ist dabei entweder von der Form

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)\, u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u \tag{1}$$

oder

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u, \tag{2}$$

wobei die Koeffizientenfunktionen a^{ij}, b^i, c $(i, j = 1, ..., n)$ gegeben sind. Wir sagen, dass die partielle Differentialgleichung $Lu = f$ in Divergenzform ist, falls L durch (1) gegeben ist und dass sie nicht in Divergenzform ist, falls L durch (2) gegeben ist. Sei nun $a^{ij} \in C^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass sich dann die beiden Formen (1) und (2) ineinander umschreiben lassen und geben Sie die neuen Koeffzienten an.

Aufgabe 2 (Schwache Lösung der Stokes-Gleichungen) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Wir betrachten die Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $u : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und $\Delta u := (\Delta u_1, \ldots, \Delta u_d)^T$.
Sei

$$X \;:=\; \left\{ w \in \mathring{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \mid \operatorname{div} w = 0 \text{ f.ü. in } \Omega \right\}.$$

Die Funktion $u \in X$ heißt schwache Lösung von (3), falls für alle $\varphi \in X$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \nabla u_i \nabla \varphi_i \;=\; \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega f_i \varphi_i.$$

Zeigen Sie:

(a) X ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathring{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

(b) Zu $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ gibt es genau eine schwache Lösung $u \in X$.

Aufgabe 3 (Advektions-Diffusions-Problem) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes $C^{0,1}$-Gebiet, seien ϵ, $q \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$, $q \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}^d$ und sei $f \in L^2(\Omega)$. Die schwache Formulierung des Advektions-Diffusions-Problems

$$\begin{aligned} -\epsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + q\, u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4}$$

lautet

$$B(u,v) \;:=\; \int_\Omega \epsilon \nabla u \cdot \nabla v + \beta \cdot \nabla u\, v + q\, u\, v\, dx \;=\; \int_\Omega f\, v\, dx \quad \text{für alle } v \in \mathring{H}^1(\Omega).$$

Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass die Bilinearform $B : \mathring{H}^1(\Omega) \times \mathring{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ für $|\beta| < C$ stetig und koerziv ist und dass eine eindeutige schwache Lösung existiert.

Aufgabe 4 (Auswirkung der Randdaten auf die Regularität der Lösung) (5 Punkte)
Es seien $S := \left\{ (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < r < 1,\, 0 < \varphi < \alpha\pi \right\}$ der Kreissektor mit dem Winkel $\alpha\pi$, $\alpha \in (0,2)$ und

$$u(r,\varphi) := r^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sin \frac{\varphi}{\alpha} \qquad (x \in \overline{S}).$$

In Aufgabe 4 (Blatt 2) haben wir gezeigt, dass diese Funktion das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{aligned} \triangle u &= 0 \;\text{ in }\; S, \\ u &= 0 \;\text{ auf }\; \Gamma_0 := \{x \in \partial S \,|\, \|x\| \neq 1\}. \end{aligned}$$

Für welche $\alpha \in (0,2)$ gilt $u \in H^{1,2}(S)$ bzw. $u \in H^{2,2}(S)$?