Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christopher Deninger (Mathematisches Institut)
Dipl. Math. Kathrin Smetana

16.04.2010

Übung zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

SS 2010 — Übungsblatt 1

Abgabe: 23.04.2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Berechnung von Lebesgue-Integralen) (6 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset B_{1/2}(0) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ln|x|$ in $L^4(B_{1/2}(0))$ liegt. Hinweis: Beachten Sie, dass f rotationssymmetrisch ist und zeigen Sie zunächst, dass für $0 < r \leq \frac{1}{2}$ die folgende Abschätzung gilt: $\ln \frac{1}{r} \leq r^{-\frac{1}{2}}$. (2 Punkte)

(b) Es sei $g : [0;1] \to [3;5]$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 5 & \text{falls } x \in [0;1] \cap \mathbb{Q}, \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\|g\|_{L^\infty([0;1])}$. (1 Punkt)

(c) Es sei $\Omega = R_1 \cup R_2$ und $h : [0;5] \times [0;3] \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = x^2 \cdot e^y$, wobei R_1 und R_2 die beiden Rechtecke aus Abbildung 1 (linke Abb.) sind und x und y wie in Abb. 1 gewählt sind. Berechnen Sie $\|h\|_{L^2(\Omega)}$. (2 Punkte)

(d) S sei das Integrationsgebiet, welches in Abb. 1 (rechte Abb.) dargestellt ist. Sei h die Funktion aus Aufgabenteil (c). Berechnen Sie

$$\int_{\partial S} h(x,y)\, dx\, dy.$$

Hinweis: Es soll hier kein Oberflächenintegral berechnet werden. (1 Punkt)

Aufgabe 2 (Satz von Fubini und Cavalierisches Prinzip) (2 Punkte)
Berechnen Sie für eine Kugel $B_r(0) \subset \mathbb{R}^3$ um den Nullpunkt mit beliebigem Radius r das Volumen der Kugel.

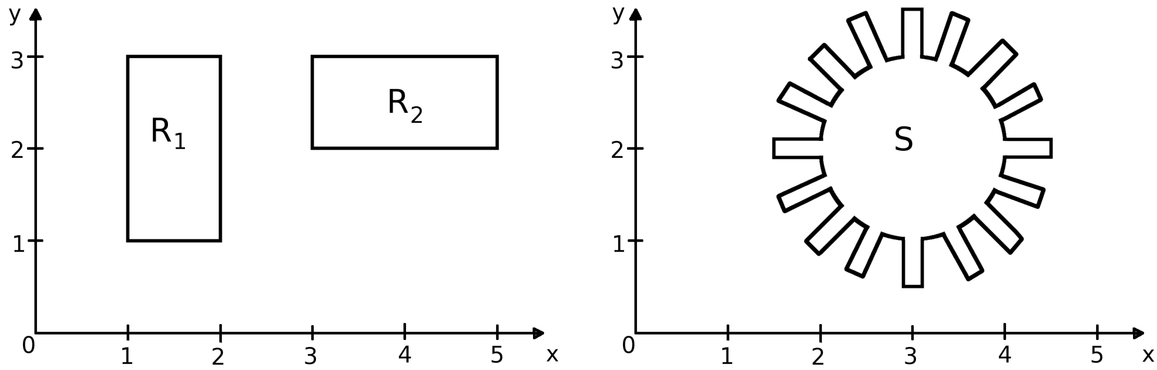

Abbildung 1: Die Integrationsgebiete Ω und S.

Aufgabe 3 (Transformationssatz) (4 Punkte)
Sei $f : B_R(0) \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x + y + z$. Es soll das Integral

$$\int\limits_{B_R(0)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

berechnet werden. Hierbei sind x, y, z kartesische Koordinaten. Transformieren Sie zunächst das Integral in eine Darstellung in Kugelkoordinaten, welche folgendermaßen lauten:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi, \\ y &= r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi, \\ z &= r \cdot \cos\theta, \end{aligned}$$

mit $0 \le r,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi$. Verwenden Sie dann den Transformationssatz zur Berechnung des Integrals. Geben Sie die Transformationsmatrix an.

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe) (+ 3 Punkte)
Zeigen Sie, dass der Raum $C^0([-1; 1])$ mit der L^1-Norm unvollständig ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und seien $u, v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und $w : \Omega \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &:= \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} u_j & \operatorname{rot} u &:= (\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2, \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3, \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1) \\ \operatorname{grad} w &:= (\partial_{x_1} w, \partial_{x_2} w, \partial_{x_3} w) & \Delta u &:= (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3) \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} w &= \Delta w & \operatorname{div}(wu) &= w \operatorname{div} u + \operatorname{grad} w \cdot u \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} w &= 0 & \operatorname{rot} \operatorname{rot} u &= \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \Delta u \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} u &= 0 & \operatorname{div}(u \times v) &= v \cdot \operatorname{rot} u - u \cdot \operatorname{rot} v. \end{aligned}$$