Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 16.04.2010
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christopher Deninger (Mathematisches Institut)
Dipl. Math. Kathrin Smetana

Übung zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

SS 2010 — Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1 (Vergleich Riemann- und Lebesgueintegral)
Vergleichen Sie das Riemann- und Lebesgue-Integral unter folgenden Gesichtspunkten:

(a) Geben Sie eine Funktion f mit einem Integrationsgebiet I an, für die das Riemann-Integral existiert, $f : I \to \mathbb{R}$ aber nicht Lebesgue-integrierbar ist. (Hinweis: Betrachten Sie uneigentliche Integrale).

(b) Geben Sie eine Funktion g an, welche nicht Riemann-integrierbar aber Lebesgue-integrierbar ist. Berechnen Sie dieses Lebesgue-Integral.

Aufgabe 2
Welche der folgenden Funktionen sind über ihren jeweiligen Integrationsgebieten Lebesgue-integrierbar?

(a) $f_1 = \|x\|^{-1}$ auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, wobei $B_1(0)$ die Kugel um den Nullpunkt mit Radius 1 ist.

(b) $f_2 = \|x\|^{-3}$ auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$.

(c) $f_3 = \|x\|^{-2}$ auf $\mathbb{R}^1 \setminus B_1(0)$.

(d) $f_4 = \|x\|^{-1}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie: Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ integrierbarer, nichtnegativer Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int \|g_k\| \,\mathrm{dx} < \infty$ konvergiert fast überall gegen eine integrierbare Funktion, und es gilt

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k \right) \mathrm{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k \,\mathrm{dx}.$$

Aufgabe 4 (Anwendung des Satzes von Lebesgue über majorisierte Konvergenz)

Es sei f eine differenzierbare Funktion auf dem kompakten Intervall $[a;x]$, deren Ableitung beschränkt ist. Zeigen Sie, dass dann die Ableitung f' Lebesgue-integrierbar über $[a;x]$ ist und dass gilt:

$$f(x) - f(a) = \int_{[a;x]} f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_k : [a;x] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_k(t) := \begin{cases} \frac{f\left(t+\frac{1}{k}\right)-f(t)}{1/k} & \text{für } t \in \left[a; x-\frac{1}{k}\right], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und wenden Sie den Satz über majorisierte Konvergenz an.