$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \, dx$$

$$\overset{P.I.}{=} \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \varphi \, dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi \, dx .$$

$\Rightarrow$ Beh., $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ $\forall$ $|\alpha| \le m$

$\Rightarrow$ $u_n \to u$ in $H^{m,p}(\Omega)$.

$\square$

Wir wollen nun Eigenschaften von Sobolevfunktionen kennenlernen. Da es nun relativ unpraktisch ist, immer nachzuprüfen ob die Funktion eine schwache Ableitung hat, machen wir uns zunutze, dass sich $H^{m,p}$-Funktionen durch glatte Funktionen approximieren lassen.

4.11 Definition (dicht)

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt dicht in X, falls $\operatorname{clos}(A) = X$, wobei

$$\operatorname{clos}(A) := \{x \in X \mid B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \ \forall \varepsilon > 0\} \supset A .$$

4.12 Satz

Für $1 \leq p < \infty$ ist $H^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht im $H^{m,p}(\Omega)$.

Bew.:

Erinnerung: auf Blatt 3 wurde gezeigt:
$f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, φ_ε Dirac-Folge, $1 \leq p < \infty$.
Dann gilt:

$$\varphi_\varepsilon * f \to f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d) \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Der Bew. geht nun ähnlich.
ABER: Wir müssen das ganze lokalisieren,
da wir nun in einem ~~beschränkten~~
Gebiet und nicht im $\mathbb{R}^d$ sind (Satz gilt auch für $\mathbb{R}^d$, Gebiet aber zusätzlich)

4.13 Satz (Lokale Approximation von $H^{m,p}$-Funktionen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in H^{m,p}(\Omega)$. Wähle eine Dirac-Folge $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ und definiere

$$T_\varepsilon f(x) := \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y) f y = (\varphi_\varepsilon * \chi_\Omega f)(x).$$

Für offene Mengen $D \subset \Omega$ mit $\delta := \operatorname{dist}(D, \partial\Omega) > 0$ ist dann $T_\varepsilon f \in H^{m,p}(D)$ für $\varepsilon < \delta$ und es konvergiert $T_\varepsilon f \to f$ in $H^{m,p}(D)$ für $\varepsilon \to 0$.

Bew.:

Es ist $T_\varepsilon f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und für $|\alpha| \le m$ gilt

$$D^\alpha (T_\varepsilon f)(x) \underset{\uparrow \Omega}{=} \int D_x^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy$$

Faltungsableitung

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D_y^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy$$

Wir brauchen $\delta > \varepsilon$ da wir sonst φ_ε nicht als Testfkt. zum partiellen integrieren verwenden dürfen.

Für $x \in \Omega$ mit $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon$ ist die Funktion $y \mapsto \varphi_\varepsilon(x-y)$ in $C_0^\infty(\Omega)$

$$\overset{p.I.}{=} \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)\, D^\alpha f(y)\, dy = T_\varepsilon(D^\alpha f)(x).$$

$D^\alpha(T_\varepsilon f) = T_\varepsilon(D^\alpha f)$

$\circledast$: $D^\alpha f \in L^p$, da $f \in H^{m,p}$

Es gilt: $g \in L^p \Rightarrow \varphi * g \in L^p \Rightarrow$ Beh.

Für jede offene Menge $D \subset \Omega$ mit $\operatorname{dist}(D, \partial\Omega) > \varepsilon$ folgt daher, wenn wir $\varepsilon < \operatorname{dist}(D, \partial\Omega)$ wählen, dass $\underbrace{T_\varepsilon f}_{\circledast} \in H^{m,p}(D)$ und mit Blatt 3, Aufg. 3

$$\|D^\alpha(T_\varepsilon f) - D^\alpha f\|_{L^p(D)} = \|T_\varepsilon(D^\alpha f) - D^\alpha f\|_{L^p(D)} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

$$\Rightarrow \|T_\varepsilon f - f\|^p_{H^{m,p}(D)} = \sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha(T_\varepsilon f) - D^\alpha f\|^p_{L^p(D)} \to 0.$$

$\square$

Problem: So erhalten wir nur eine Konvergenz im $H^{m,p}_{loc}(\Omega)$ und nicht in $H^{m,p}(\Omega)$.

$\Rightarrow$ Brauchen ein weiteres Konzept.

4.14 Def. (Zerlegung der Eins)

1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $(U_i)_{i\in N}$, $N \subset \mathbb{N}$, eine offene Überdeckung von Ω. Die Überdeckung heißt lokal finit (oder lokal endlich), falls es zu jedem $x \in \bigcup_{i\in N} U_i$ eine Umgebung $\overline{B_\varepsilon(x)}$ gibt, so dass $\{i \in N \mid U_i \cap \overline{B_\varepsilon(x)} \neq \emptyset\}$ endlich ist.

2) Wir nennen $(\eta_j)_{j\in N}$ eine Partition der Eins (oder Zerlegung der Eins) auf Ω zu einer lokal finiten offenen Überdeckung $(U_j)_{j\in N}$ von Ω, falls

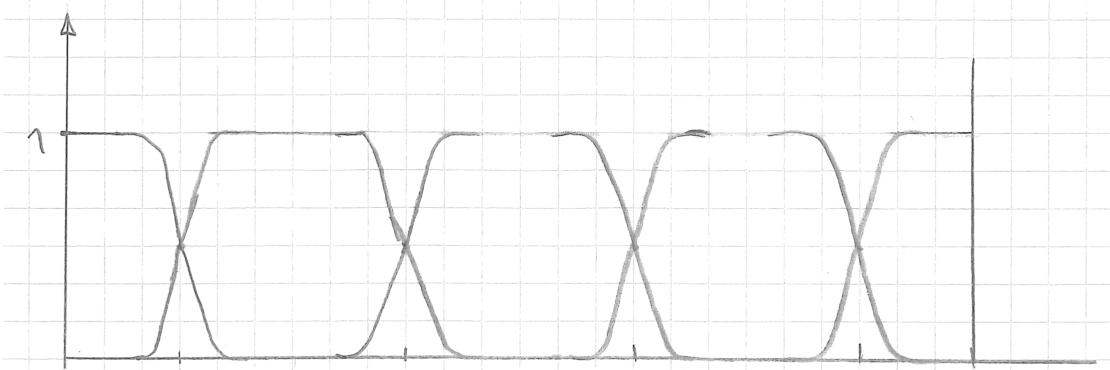
$$\eta_j \in C_0^\infty(U_j),\ \eta_j \geq 0,\ \text{und } \sum_{j\in N} \eta_j(x) = 1$$

für $x \in \Omega$.

4.15 Satz (Existenz der Zerlegung der Eins)

Sei $(U_j)_{j\in N}$ wie in 4.14 und U_j beschränkt, $\overline{U_j} \subset \Omega$. Dann existiert zu $(U_j)_{j\in N}$ eine Zerlegung der Eins.

Bew.: 2.13 Alt



Damit können wir nun Satz 4.12 beweisen!

Bew.-idee:

wähle lokal endl. offene Überdeckung von Ω, verwende die dazugehörige Zerlegung der Eins zum Lokalisieren und approximiere dann auf jedem U_j die Funktion f lokal wie in Satz 4.13.

4.16 Bew. von Satz 4.12

Sei $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine lokal endliche offene Überdeckung von Ω, so dass $\overline{U}_k \subset \Omega$ kompakt sind. Nach 4.15 existiert eine zugehörige Partition der Eins $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Sei $f \in H^{m,p}(\Omega)$ und $c_k := \frac{1}{\|\eta_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} + 1} \cdot 2^{-k}$ und $\varepsilon > 0$.

Nach 4.13 gibt es $f_{k,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f - f_{k,\varepsilon}\|_{H^{m,p}(U_k)} \le \varepsilon c_k.$$

Definiere

$$f_\varepsilon := \sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k f_{k,\varepsilon}, \text{ also } f_\varepsilon - f = \sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k (f_{k,\varepsilon} - f)$$

$$\Big(\sum_{k \in \mathbb{N}} \eta_k = 1\Big).$$

⚠ lokal sind immer nur endlich viele

Summanden von Null verschieden.

Beh. $\eta_\varepsilon f \in H^{1,p}(\Omega)$. (wollen das ja später mit f_ε in der $H^{1,p}$-Norm vergleichen)

Bew. Sei $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$\int_\Omega \eta_\varepsilon \partial_i \phi \cdot f = \int_\Omega (\partial_i(\eta_\varepsilon \phi) - \phi \partial_i \eta_\varepsilon) f$$

$$= -\int_\Omega \eta_\varepsilon \phi \, \partial_i f + \phi \partial_i \eta_\varepsilon f.$$

$\Rightarrow \eta_\varepsilon f \in H^{1,p}(\Omega)$ mit

$$\partial_i (\eta_\varepsilon f) = \eta_\varepsilon \partial_i f + (\partial_i \eta_\varepsilon f).$$

⚠ Bis jetzt wissen wir nicht, dass die Produktregel für Sobolevfunktionen gilt. Daher können wir nicht einfach $\partial_i(\eta_\varepsilon f)$ berechnen, sondern müssen den Umweg über ϕ und η_ε gehen.

Zeige mittels Induktion, dass $\eta_\varepsilon f \in H^{m,p}(\Omega)$ und dass für $|\alpha| \le m$ gilt

$$D^\alpha(\eta_\varepsilon f) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta}\eta_\varepsilon) D^\beta f.$$

(Leibnizformel)

$$\Rightarrow D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f = \sum_{0\le\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_k (D^{\alpha-\beta}\eta_k)(D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f)$$

$$\Rightarrow \|D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \le C \sum_k \|\eta_k\|_{C^m(\Omega)} \|f_{k,\varepsilon} - f\|_{H^{m,p}(\Omega_k)}$$

$$\le C\varepsilon \sum_k c_k \|\eta_k\|_{C^m(\Omega)}$$

Müssen unendliche Summe beschränkt kriegen;

$$= C\varepsilon \sum_k \frac{\|\eta_k\|_{C^m(\Omega)}}{\|\eta_k\|_{C^m(\Omega)}+1} \cdot 2^{-k}$$

Gradienten von η_k können groß werden → s. Bild.

$$\le C\varepsilon$$

$\square$

4.17 Satz (Produktregel für Sobolev-Funktionen)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Weiter sei $1 \le p \le \infty$ sowie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sind dann $f \in H^{m,p}(\Omega)$ und $g \in H^{m,q}(\Omega)$, so ist $f \cdot g \in H^{m,1}(\Omega)$ und die schwachen Ableitungen von fg berechnen sich nach der Produktregel.

Bew.: Aus Symmetriegründen: $p < \infty$.
Sei $m = 1$.

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit

$f_k \to f$ in $H^{m,p}(\Omega)$ (existieren nach 4.12/4.16)

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega g f_k \partial_i \varphi \overset{4.16}{=} -\int_\Omega (\partial_i g f_k + \partial_i f_k g) \varphi$$

$$\Big\downarrow k \to \infty \qquad\qquad\qquad \Big\downarrow k \to \infty$$

$$\int_\Omega g f \partial_i \varphi \qquad -\int_\Omega (\partial_i g f + \partial_i f g) \varphi$$

Exemplarisch:

$$\left| \int_\Omega g f_k \varphi - \int_\Omega g f \varphi \right|$$

$$\leq c(\varphi) \int_\Omega |g| |f_k - f| \, dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} c(\varphi) \|g\|_{L^q(\Omega)} \|f - f_k\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$\Rightarrow$ Beh. für $m = 1$. $m > 1$: Induktion.