Kapitel 4 : Sobolevräume

Motivation

Betrachte das Randwertproblem

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega$$
$$u = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Bisher: $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$.

ABER: Das ist sehr oft nicht der Fall!

→ Wir suchen die Lösung zu unserem Randwertproblem in Räumen mit weniger glatten Funktionen, den so genannten Sobolevräumen.

4.1 Def. ($L^p_{loc}(\Omega)$)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet (offen, zusammenhängend und beschränkt). Dann ist der Raum $L^p_{loc}(\Omega)$ definiert durch

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{ u \in L^p(K) \mid \forall K \subset \Omega, K \text{ kompakt} \}.$$

4.2 Def. (Schwache Ableitung):

Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex.
Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ besitzt die schwache Ableitung $u_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$, wenn für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u^{(\alpha)} \varphi.$$

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$

Wir schreiben dann auch $u^{(\alpha)} = D^\alpha u$ für die schwache Ableitung.

4.3 Lemma

Falls $u \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$, und $|\alpha| \geq 1$, gilt:

$$D^\alpha u = u^{(\alpha)},$$

d.h. klassische und schwache Ableitung stimmen überein.

4.4. Beispiel (Schwache Ableitung von $|x|$)

Sei $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) = |x|$. Dann ist $u'(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ die schwache Ableitung von u.

Bew.: Es gilt für beliebige $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^{0} u(x)\,\varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{1} u(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x)\,\varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} (-1)\,\varphi(x)\,dx + \left[(-x)\varphi\right]_{-1}^{0} - \int_{0}^{1} 1\cdot\varphi(x)\,dx + \left[x\varphi\right]_{0}^{1}$$

$$= -\int_{-1}^{0} (-1)\varphi(x)\,dx - \int_{0}^{1} 1\,\varphi(x)\,dx$$

$$+\, 0\cdot\varphi(0) - \underbrace{1\cdot\varphi(1)}_{=0} + \underbrace{1\cdot\varphi(1)}_{=0} - 0\cdot\varphi(0)$$

da $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$= -\int_{-1}^{1} u'(x)\,\varphi(x)\,dx$$

mit $u'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \le 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$.

4.5 Beispiel:

Im Gegensatz zu $|x|$ ist $v(x) = \begin{cases} -1 & x \le 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

auf Ω nicht schwach differenzierbar.

Bew.: ÜA

4.6 Definition (Sobolevräume):

Seien $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty]$ und $u \in L^p_{loc}(\Omega)$. Wir nehmen an, dass alle schwachen partiellen Ableitungen $D^\alpha u$ existieren für $|\alpha| \leq m$. Dann definieren wir die Sobolevnormen $\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}$ durch

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} := \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}$$

falls $1 \leq p < \infty$ und für $p = \infty$ als

$$\|u\|_{H^{m,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Grenzwert davon

Schließlich definieren wir die Sobolevräume $H^{m,p}(\Omega)$ durch

$$H^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p_{loc} \;\middle|\; \|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} < \infty \right\}.$$

Für $p = 2$ schreiben wir auch $H^m(\Omega) := H^{m,2}(\Omega)$.

4.7 Bemerkung

Anstelle von $H^{m,p}(\Omega)$ werden die Sobolevräume in der Literatur auch oft mit $W^{m,p}(\Omega)$ bezeichnet.

4.8 Beispiel

Seien $\Omega := B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $u(x) = \ln|\ln\|x\||$, $x \in \Omega$. Dann gilt: $u \in H^{1,2}(\Omega)$, aber $u \notin C^0(\Omega)$. D.h. Funktionen im $H^{1,p}$ sind in mehreren Raumdimensionen nicht notwendigerweise stetig!

Bew.: ÜA.

4.9 Beispiel

Wir betrachten $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$, $u(x) = \|x\|^s$, für $s \in \mathbb{R}$ und $x \in \Omega$. Dann ist $u \in H^{1,p}(\Omega)$, wenn gilt $s > 1 - \frac{d}{p}$.

Bew.: ÜA

Wir haben die Sobolevräume u.a. deshalb eingeführt, weil die C^k-Räume bezüglich den L^p-Normen nicht vollständig sind. Für die Sobolevräume gilt hingegen der wichtige Satz:

4.10 Satz (Vollständigkeit der Sobolevräume)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Dann ist $H^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}_0$ mit der in 4.6 definierten Norm ein Banachraum. $H^m(\Omega)$ ist ein

Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{H^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Bew.:

- Normeigenschaften ✓
- Vollständigkeit

Sei $(u_n)_n$ Cauchy-Folge in $H^{m,p}(\Omega)$. Dann ist für jedes $|\alpha| \le m$, $(D^\alpha u_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, existieren Funktionen $u_\alpha \in L^p(\Omega)$, so dass

$$D^\alpha u_n \longrightarrow u_\alpha \quad \text{in } L^p(\Omega)$$

für jedes $|\alpha| \le m$. Insbesondere gilt auch

$$u_n \longrightarrow u_{(0,\dots,0)} =: u \quad \text{in } L^p(\Omega).$$

Grenzwertidentifikation

Beh.: $u \in H^{m,p}(\Omega)$, $D^\alpha u = u_\alpha$ $(|\alpha| \le m)$.

Bew.: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt:

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \, dx$$

$$\overset{P.I.}{=} \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \varphi \, dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi \, dx.$$

$\Rightarrow$ Beh., $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ $\forall |\alpha| \leq m$

$\Rightarrow$ $u_n \to u$ in $H^{m,p}(\Omega)$.

$\square$

Wir wollen nun Eigenschaften von Sobolevfunktionen kennenlernen. Da es nun relativ unpraktisch ist, immer nachzuprüfen ob die Funktion eine schwache Ableitung hat, machen wir uns zunutze, dass sich $H^{m,p}$-Funktionen durch glatte Funktionen approximieren lassen.

4.11 Definition (dicht)

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt dicht in X, falls $\operatorname{clos}(A) = X$, wobei

$$\operatorname{clos}(A) := \{x \in X \mid B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \;\; \forall \varepsilon > 0\} \supset A.$$