2. Der Satz von Gauß in Lipschitz Gebieten

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann hat Ω einen Lipschitz-Rand falls folgendes gilt: Für jedes $x \in \partial\Omega$ ex.:

(1) Eine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit Normalenvektor $\nu \in \mathbb{R}^n$, so daß

$$H = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - x, \nu \rangle = 0 \}$$

(2) Für $\varepsilon > 0$ und $V = H \cap U_\varepsilon(x)$ eine Lipschitz-Abb.

$g : V \to \mathbb{R}$ sowie $\eta > 0$, so daß in $U = V + (-\eta, \eta)\nu$ gilt:

$$\Omega \cap U = \{ y + z\nu \mid y \in V, \ -\eta < z < g(y) \}.$$

Insbesondere ist dann

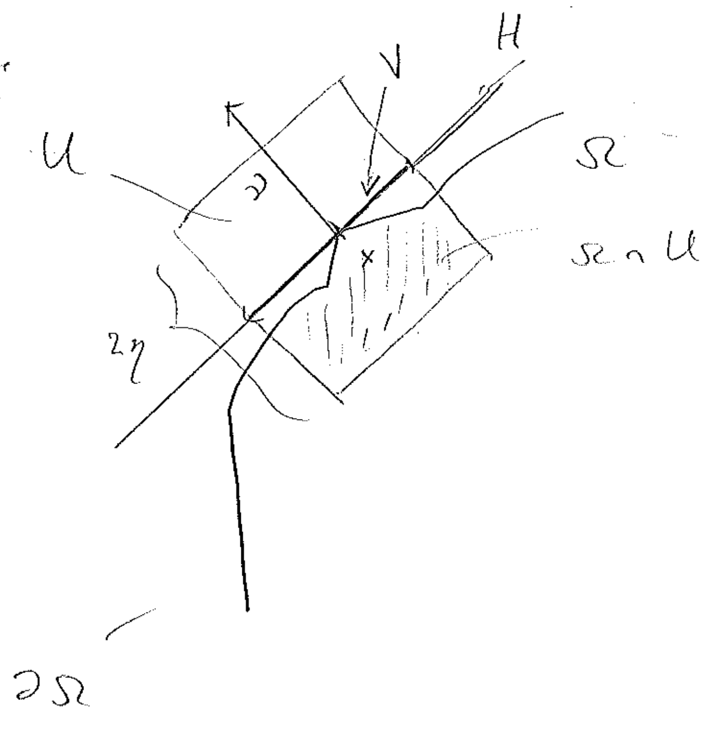
$$\partial\Omega \cap U = \{ y + g(y)\nu \mid y \in V \}$$

$$= \{ (y, g(y)) \mid y \in V \}$$

bezügl. der Zerlegung ("lokale Koordinaten")

$$V \times (-\eta, \eta) \cong U \subset \mathbb{R}^n$$
$$(y, z) \longmapsto y + z\nu .$$

Bildchen



Für geeignete Funktionen $f: \partial\Omega \to \mathbb{R}$ wollen wir "Oberflächenintegrale $\int_{\partial\Omega} f\,dS$" definieren: Wir nehmen an, daß Ω beschränkt und daher $\partial\Omega$ kompakt ist. Für off. Überdeckg. $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m$ von $\partial\Omega$ bezeichne $\{\varphi_j\}$ eine zugehörige Partition der Eins d.h. C^∞-Fkt. mit kp. Träger $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathcal{U}_j)$, $\varphi_j : \mathcal{U}_j \to [0,1]$ für die gilt:

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega .$$

Die $\mathcal{U}_j$ seien so gewählt, daß $\Gamma_j = \partial\Omega \cap \mathcal{U}_j$ eine Lipschitz-Parametrisierung besitzt, d.h. es ex. eine Teilmenge $V_j \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und eine bijektive Abb.

$$\Phi_j : V_j \xrightarrow{\sim} \Gamma_j$$

so daß Φ_j und Φ_j^{-1} lokal Lipschitz sind, V_j meßbar und $V_j \setminus \mathring{V}_j$ Lebesgue Nullmenge in $\mathbb{R}^{n-1}$ ist. Das geht, s.u.

Dann def. man

$$\int_{\partial\Omega} f\,dS := \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial\Omega \cap \mathcal{U}_j} f \varphi_j \, dS$$

wobei wir für $g_j = f\varphi_j$ definieren:

$$\int_{\partial\Omega \cap \mathcal{U}_j} g_j \, dS := \int_{V_j} g_j \circ \Phi_j \sqrt{\det (D\Phi)^t (D\Phi)} \, d\lambda^{n-1}$$

Beachte, daß nach dem Satz von Rademacher $D\Phi_j$ f.ü. auf V_j def. ist. Nach Vor. kann auch über die offene Menge $\mathring{V}_j$ integriert werden.

Weiter ist $D\Phi$ eine $(n-1)\times n$-Matrix, also $(D\Phi)^t D\Phi$ eine $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, "Gramsche-Matrix". Also ist die Det def.

Diese Def. ist sinnvoll 1) falls $f \geq 0$ und f „meßbar" d.h. alle $f \circ \Phi_j$ meßbar sind. Dann ist $\int\limits_{\partial\Omega} f\,dS \in [0,\infty]$.

2) falls f über $\partial\Omega$ integrierbar ist, d.h. alle $(f\varphi_j) \circ \Phi_j$ über $\tilde{V}_j$ integrierbar sind.

Mit Hilfe der Transformationsformel (für bi-Lipschitz Abb.) sieht man, daß $\int\limits_{\partial\Omega \cap U_j} g_j\,dS$ nicht von der Wahl der Parametrisierung Φ_j abhängt.

Hat man eine weitere Überdeckg. $U_1', \dots, U_\ell'$ mit Part. der Eins $\varphi_1', \dots, \varphi_\ell'$ so gilt:

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\partial\Omega \cap U_j} f\varphi_j\,dS = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\ell} \int\limits_{\partial\Omega \cap U_j} f\varphi_j\varphi_i'\,dS$$

oder $\partial\Omega \cap U_j \cap U_i'$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \int\limits_{\partial\Omega \cap U_i'} f\varphi_i'\,dS.$$

Also ist die Def. von $\int\limits_{\partial\Omega} f\,dS$ auch von der Wahl der Überdeckg. und bzg. Partition unabhängig.

<u>Beachte</u> Da $\partial\Omega$ lokal Lipschitz war, ex. nach Def. für jedes $x \in \partial\Omega$ off. $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, so daß $\partial\Omega \cap U = \{(y, g(y)) \mid y \in V\}$ für eine Lipschitz Fkt. $g: V \to \mathbb{R}$ ist. Dann ist

$$\Phi : V \to \partial\Omega \cap U \quad \text{def. durch} \quad \Phi(y) = (y, g(y))$$

eine bij. Abb. für die Φ und Φ^{-1} (lokal) Lipschitz sind.

Also ex. Überdeckg. wie oben benutzt. Es gilt hier übrigens:

$$\det(D\Phi^t D\Phi) = 1 + \|\operatorname{grad} g\|^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2.$$

(Übgsaufg. zur lin. Algebra!)

Bem.: Viele $\partial\Omega$ besitzen eine globale Parametrisierung

$$\Phi : V \xrightarrow{\sim} \partial\Omega$$

wie oben, also $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ meßbar, $V \setminus \mathring{V}$ Nullmenge, Φ, Φ^{-1} lokal Lipschitz. Dann ist einfach

$$\int_{\partial\Omega} f\, dS = \int_V f\circ\Phi \sqrt{\det D\Phi^t D\Phi}\, d\lambda^{n-1}.$$

Beispiel $\Omega = U_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ off. Kreisscheibe vom Radius R.

$$\Phi : V = [0, 2\pi) \xrightarrow{\sim} \partial\Omega \quad , \Phi(t) = (R\cos t, R\sin t)$$

$$D\Phi = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad D\Phi^t D\Phi = (-R\sin t, R\cos t)\begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t\end{pmatrix} = R^2.$$

Also ist $$\int_{\partial\Omega} f\, dS = R\int_0^{2\pi} f(R\cos t, R\sin t)\, dt$$

insbes. $$\int_{\partial\Omega} 1\, dS = 2\pi R = \text{Länge von } \partial U_R(0).$$

Bez.: Ist $\Phi : V \to \partial\Omega \cap U$ lokale (Lipschitz) Parametrisierung von $\partial\Omega$ mit off. V, so bilden $\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial\Phi}{\partial y_{n-1}}(y)$ eine Basis des Tangentialraumes von $\partial\Omega$ im Punkte $x = \Phi(y)$ (f.ü. def.)

Speziell f. $\Phi(y) = (y, g(y))$ bilden also

$$(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0, \frac{\partial g}{\partial y_i}) \quad \text{f.} \quad 1 \le i \le n-1$$

eine Basis. Der Vektor $(-\frac{\partial g}{\partial y_1}, \dots, -\frac{\partial g}{\partial y_{n-1}}, 1)$ ist zu ihnen orthogonal. Man nennt f. $x \in \partial\Omega$

$$\nu(x) = \frac{(-\operatorname{grad} g, 1)}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g\|^2}}(\Phi^{-1}(x))$$

den (äußeren) Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$ im Pkt x (er zeigt aus Ω heraus). Er ist unabh. von der Wahl der lokalen Koordinaten und bezügl. dS f.ü. definiert. Dort wo nicht def. setzt man $\nu(x) = 0$. Dann ist $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Borel-meßbare Abb. ("äußeres Normalenfeld").

<u>Satz von Gauß</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand sowie $\alpha, \beta \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt f. $i = 1, \dots, n$ und das äußere Normalenfeld $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$:

(1) $$\int_\Omega \partial_i \alpha \, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \alpha \, \nu_i \, dS$$

(2) $$\int_\Omega (\partial_i \alpha)\beta + \alpha(\partial_i \beta) \, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \alpha \cdot \beta \, \nu_i \, dS .$$

(3) Als vektorwertige Gleichung gilt

$$\int_\Omega \operatorname{grad} \alpha \, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \alpha \, \nu \, dS .$$

(4) Für $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{div} \underline{\alpha} = \sum_{i=1}^n \partial_i \alpha_i$ gilt:
$$\int_\Omega \operatorname{div} \underline{\alpha} \, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \langle \underline{\alpha}, \nu \rangle \, dS$$

<u>Bew.</u>: (2) folgt aus (1) mit $\alpha\beta$ statt α, (3) ist äquiv. zu (1)
(4) folgt durch Anwenden von (1), auf α_i und Addition.

<u>Zu (1)</u> Sei $U_1, \dots, U_m$ off. Überdeckg., so daß $\partial\Omega \cap U_j$ Graph einer Lipschitz-Abb. ist. Da $\overline{\Omega}$ kp. ist ex. eine weitere off. Menge U_0 mit $\overline{U_0} \subset \Omega$, so daß gilt:

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{j=0}^m U_j .$$

(insbes. ist $U_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$)

Wähle eine zugeh. Part. der Eins $\varphi_0, \dots, \varphi_m$, also
$\sum_{j=0}^{m} \varphi_j(x) = 1$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

<u>Beh. 1</u> Es gilt $\displaystyle\int_{\Omega \cap U_j} \partial_i(\alpha \varphi_j)\, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega \cap U_j} \alpha \varphi_j \nu_i \, dS$ für $j \geq 0$, $i \geq 1$

Falls dies gezeigt ist, folgt (1) so:

$$\int_{\partial\Omega} \alpha \nu_i \, dS = \sum_{j=0}^{m} \int_{\underbrace{\partial\Omega}_{\text{oder } \partial\Omega \cap U_j}} \alpha \varphi_j \nu_i \, dS$$

$$\overset{\text{Beh. 1}}{=} \sum_{j=0}^{m} \int_{\underbrace{\Omega}_{\text{oder } \Omega \cap U_j}} (\partial_i \alpha)\varphi_j + \alpha\, \partial_i \varphi_j \; d\lambda^n$$

$$= \int_{\Omega} \partial_i \alpha \, d\lambda_n \qquad \text{da } \partial_i \sum \varphi_j = \partial_i(1) = 0 .$$

<u>Bew. der Beh. 1</u> Für $j = 0$ ist $\partial\Omega \cap U_0 = \emptyset$ also r. S. $= 0$.
Die linke Seite ist ebenfalls $= 0$: Schreibe mit Fubini als iteriertes Integral und wende auf die i-te Integration den Hauptsatz der Diff.- u. Integralrechnung an: Beachte: φ_0 hat kp. Träger in U_0 $\Rightarrow$ Randwerte $= 0$.

Jetzt betrachten wir den Fall $j \geq 1$:

Sei $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $g : V \to \mathbb{R}$ Lipschitz, $U = V \times (-\eta, \eta)$,

$\Omega \cap U = \{(y,z) \mid y \in V, -\eta < z < g(y)\}$ und daher:

$\partial\Omega \cap U = \{(y, g(y)) \mid y \in V\}$.

Dann ist für $y \in V$

Vektor im $\mathbb{R}^n$

$$\nu(y, g(y)) = \frac{(-\operatorname{grad} g, 1)}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g\|^2}}(y)$$

und daher:

"$\nu \, dS = (-\operatorname{grad} g, 1)$".

Die Beh. 1 für die verbleibenden $j \geq 1$ folgt also aus

Beh. 2
$$\int_{\Omega \cap \mathcal{U}} \operatorname{grad} \alpha \, d\lambda^n = \int_V \alpha(y, g(y)) \, ((-\operatorname{grad} g)(y), 1) \, d\lambda^{n-1} \in \mathbb{R}^n$$

für Fkt. $\alpha \in C_0^1(\mathcal{U})$. $\quad (\alpha \,\hat{=}\, \alpha\varphi_j$ in Beh. 1$)$

Bew von Beh. 2: Da α kp. Träger in $\mathcal{U} = V \times (-\eta, \eta)$ hat, können wir $\Omega \cap \mathcal{U}$ im linken Integral ersetzen durch:

$$\Omega' = \{(y,z) \mid y \in V;\ z < g(y)\}.$$

Betrachte die lokale Lipschitz Abb.

$$\Phi : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad \Phi(y,x) = (y, g(y) + x).$$

Sie liefert eine Bijektion $\Phi : V \times (-\infty, 0) \xrightarrow{\sim} \Omega'$.
Dann sind Φ und Φ^{-1} lokal Lipschitz und es gilt:

$$\det D\Phi = \det \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline \operatorname{grad} g & 1 \end{array} \right) = 1.$$

Also erhalten wir:

$$(*) \quad \int_{\Omega \cap \mathcal{U}} \operatorname{grad} \alpha \, d\lambda^n = \int_{\Omega'} \operatorname{grad} \alpha \, d\lambda^n \overset{\text{Transf. Formel}}{=} \int_{V \times (-\infty, 0)} (\operatorname{grad} \alpha) \circ \Phi \, d\lambda^n$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{V \times (-\infty,0)} \operatorname{grad}(\alpha \circ \Phi) (D\Phi)^{-1} \, d\lambda^n.$$

Hierbei gilt $(D\Phi)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline -\operatorname{grad} g & 1 \end{array} \right)$, also nach kurzer Rechnung:

$$\operatorname{grad}(\alpha \circ \Phi)(D\Phi)^{-1} = (\partial_1(\alpha \circ \Phi), \ldots, \partial_{n-1}(\alpha \circ \Phi), 0) + \underbrace{\frac{\partial(\alpha \circ \Phi)}{\partial x}(-\operatorname{grad} g, 1)}_{\text{Leibniz Regel}}$$

$$\frac{\partial 1}{\partial x} = 0 \quad \overset{\downarrow}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \circ \Phi \, (-\operatorname{grad} g, 1)\right)$$

Da α kp. Träger in $\mathcal{U} = V \times (-\eta, \eta)$ hat, hat $\alpha \circ \Phi$ kp. Träger in $V \times \mathbb{R}$ und daher gilt

$$\int_V \partial_i (\alpha \circ \Phi)\, d\lambda^n = 0 \quad f\ 1 \le i \le n-1$$

(Fubini + Hauptsatz Diff u. Integralrechnung).

Also gilt:

$$\int_{V \times (-\infty, 0)} (\operatorname{grad} \alpha) \circ \Phi \, d\lambda^n = \int_V \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial}{\partial x} \big(\alpha \circ \Phi \, (-\operatorname{grad} g, 1)\big)\, dx\, dy$$

$$= \int_V \alpha(\Phi(y,0))\, (-\operatorname{grad} g, 1)\, dy$$

$$= \int_V \alpha(y, g(y))\, (-\operatorname{grad} g, 1)\, dy$$

Zusammen mit (*) folgt Beh. 2 und damit ist der Satz von Gauß bewiesen.

<u>Bem.</u>: Wir haben benutzt, daß der Hauptsatz der Diff. u. Integralrechnung auch f Lipschitz-stetige Fkt. gilt: $\int_a^b f'\, d\lambda = f(b) - f(a)$ falls f Lipschitz stetig ist:

<u>Bew.</u>: Sei $a < \xi < b$. Dann ist

$$\int_a^\xi f'\, d\lambda = \int_a^\xi \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, dx \qquad L \text{ Lipschitz Konstante}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \int_a^\xi \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, dx \quad \left(\text{wegen Satz von Lebesgue: } \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \le L \right)$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \left(\int_{a+h}^{\xi+h} f(x)\, dx - \int_a^\xi f(x)\, dx \right)$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \int_{\xi}^{\xi+h} f(x)\,dx - \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \int_{a}^{a+h} f(x)\,dx$$

$$= f(\xi) - f(a).$$

(beachte $\left| \frac{1}{h} \int_{a}^{a+h} f(x)\,dx - f(a) \right| \leq \frac{1}{h} \int_{a}^{a+h} |f(x) - f(a)|\,dx \leq L h$)

Analog für $[\xi, b]$:

$$\int_{\xi}^{b} f'\,d\lambda = f(b) - f(\xi)$$

also insgesamt: $\int_{a}^{b} f'\,d\lambda = f(b) - f(a).$