Partielle Differentialgleichungen

Literatur 1) (Lineare) Partielle Differentialgleichungen
Ben Schweizer, Uni Dortmund → Link auf Internetseite
der Vorlesg. (Skript)
2) Partial Differential equations, Lawrence C. Evans,
AMS, Grad. Studies in Math. Vol. 19.

Einige Beisp. f (lineare) PDGL

Sei $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ d. Laplace Operator auf dem $\mathbb{R}^n$.

1. Laplace Gleichung $\Delta u = 0$

   Lösungen u heißen harmonische Funktionen

2. Poisson Gleichung $-\Delta u = f$ bei gegebenem f

3. Wärmeleitungsgleichung

   $$u_t - \Delta u = 0 \quad , \quad u = u(t,x)$$

4. Schrödinger Gleichung

   $$i u_t + \Delta u = 0$$

5. Wellengleichung

   $$u_{tt} - \Delta u = 0$$

etc.

Die Natur der Lösungen dieser Gleichungen unterscheidet sich sehr stark. Es gibt daher in der Theorie der PDGL sehr viele verschiedene Methoden, sie anzugreifen. Die meisten dieser PDGL kommen aus der Physik, sie haben aber auch innerhalb der Mathematik große Bedeutung. Die physikalische Herleitung ist sehr aufwendig. Bevor wir einige Typen mit ihren phys. Bedeutung nicht besprechen können, brauchen wir einige Vorbereitungen und Erinnerungen aus der Analysis. Daher:

1. Steilkurs Lebesgue Integral und Integralsätze

Es gibt keinen vernünftigen Volumenbegriff auf allen Teilmengen von $\mathbb{R}^N$. Daher folgender Exkurs:

Sei Ω eine Menge. Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω d.h. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega) = \{N \mid N \subset \Omega\}$ heißt σ-Algebra in Ω falls gelten:

a) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$

b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

c) Für $A_i \in \mathcal{A}$ sind auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Bez. Sei Ω top. Raum. Die kleinste σ-Algebra in Ω, die alle offenen (also auch abg.) Teilmengen von Ω enthält heißt die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(\Omega)$ von Ω. Es ist also

$$\mathcal{B}(\Omega) = \bigcap \mathcal{A}$$

wobei $\mathcal{A}$ über alle σ-Alg. in Ω läuft, die alle off. Mengen enth. Beachte: $\mathcal{P}(\Omega)$ ist ein Kandidat.

Bez. Man schreibt $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Def. Ein Maß μ auf einer σ-Algebra ist eine Abb.

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

mit folg. Eig.:

1) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$

2) $\mu(\emptyset) = 0$

3) Für paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad (\mu \text{ ist "}\sigma\text{-additiv"}).$$

Bem.: Für bel. $A_i \in \mathcal{A}$ folgt $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

<u>Satz</u> Es gibt genau ein Maß $\lambda = \lambda^n$ auf $\mathcal{B}^n$ f. das gilt
$\lambda([a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ f. alle $a_i \le b_i$.
Es heißt das n-dimensionale Lebesgue Maß.

<u>Bez.</u>: Eine Teilmenge $N \subset \Omega$, f. die ein $A \in \mathcal{A}$ mit $N \subset A$ und $\mu(N) = 0$ ex., heißt eine μ-Nullmenge. Klar: Abzählbare Vereinigungen von μ-Nullmengen sind wieder μ-Nullmengen.

<u>Bez.</u> Eine Abb. $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>meßbar</u>, falls f. alle $A \in \mathcal{B}^n$ gilt $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Es genügt, dies f. alle off. A zu fordern. Ist Ω top. Raum und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$, so sind alle stet. Fkt. $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ meßbar.

<u>Fakt</u> Summe, Diff., Produkt, Quot. (falls def.) meßbarer Fkt. $f: \Omega \to \mathbb{R}$ sind meßbar. Für jede Folge $f_n: \Omega \to \mathbb{R}$ meßbarer Fkt. sind $\underline{\lim} f_n$ und $\overline{\lim} f_n$ meßbar, wobei $(\underline{\lim} f_n)(\omega) := \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(\omega)$ etc. Insbes. ist $\lim_{n\to\infty} f_n$ meßbar, falls der pktweise Limes ex.

<u>Integral nach einem Maß</u>

Fü $A \subset \Omega$ sei χ_A die char. Fkt., $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{f. } \omega \in A \\ 0 & \text{f. } \omega \notin A \end{cases}$.

Eine Fkt. der Gestalt

$$g = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i} \qquad \text{mit } A_i \in \mathcal{A}$$

heißt "Treppenfkt." Es gibt dann paarweise disjunkte $B_i \in \mathcal{A}$ mit

$$g = \sum_{i=1}^{\ell} d_i \chi_{B_i} \,.$$

Man prüft nach, daß $\int_\Omega g \, d\mu := \sum_{i=1}^{\ell} d_i \mu(B_i)$ nur von der Treppenfkt. $g: \Omega \to \mathbb{R}$ abhängt.

<u>Bez.</u>: Sei $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Eine Fkt. $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt meßbar, falls $f^{-1}([a,b]) \in \mathcal{A}$ f. alle $-\infty \le a \le b \le +\infty$.

Satz/Def.: Sei $f: \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f \geq 0$ eine meßbare Fkt. Dann ex. eine mon. wachsende Folge g_n von Treppenfkt. mit $\lim\limits_{n \to \infty} g_n = f$ μ-f.ü. (d.h. außerhalb einer μ-Nullmenge)

Die Folge der $\int\limits_\Omega g_n \, d\mu$ ist mon. wachsend in $[0,\infty]$ und der Grenzwert

$$\int_\Omega f \, d\mu := \lim_{n \to \infty} \int_\Omega g_n \, d\mu \in [0,\infty]$$

ist unabh. von der Wahl der $g_n \nearrow f$. Er heißt das Integral von f nach dem Maß μ.

Es gilt folgender grundlegende Satz über die Vertauschung von Limes und Integral:

Satz (Levi) Sei $f_n: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_n \geq 0$ eine mon. wachsende Folge meßbarer Fkt. Dann ist $f := \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ meßbar und es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

$\longrightarrow$ b.w.

Bez.: Eine Fkt. $f: \Omega \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar falls für die meßbare Fkt. $|f|$ gilt $\int\limits_\Omega |f| \, d\mu < \infty$. In diesem Fall gilt für $f^+ = \max(f,0)$ und $f^- = \max(-f,0)$, daß

$$\int_\Omega f^\pm \, d\mu < \infty$$

ist (Integral def. wegen $f^\pm \geq 0$) und entsprechend der Zerlegung $f = f^+ - f^-$ setzt man

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu.$$

Damit ist das Integral f. integrierbare Fkt. erklärt.

Satz Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfkt. (bzw. Riemann integrierbar).
Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\underset{\uparrow}{\int_a^b f(x)\,dx} = \int_{[a,b]} f\,d\lambda =: \int_a^b f\,d\lambda$$

Regel- bzw. Riemann Integral

Erklärung Sei $A \in \mathcal{B}^n$. Dann setzt man:

$$\int_A f\,d\lambda^n := \int_{\mathbb{R}^n} f\,\chi_A\,d\lambda^n \quad \text{falls } f\chi_A \text{ über } \mathbb{R}^n \text{ integr. ist.}$$

Der wichtigste Vertauschungssatz von Limes und Integral ist der folgende Satz von der majorisierten Konvergenz

Satz (Lebesgue) Sei $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Folge meßbarer Fkt., für die $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-f.ü. (d.h. f. alle $\omega \in \Omega$ außerhalb einer μ-Nullmenge) existiert. Es gebe eine integrierbare Fkt. $g: \Omega \to \mathbb{R}$ mit $|f_n| \leq g$ f. alle n. Dann sind die f_n und f integrierbar und es gilt in $\mathbb{R}$:

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu$$

Die beiden folgenden Sätze helfen bei der Berechnung von Lebesgue Integralen:

Satz (Fubini) Sei $f: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ (Lebesgue-) ~~integrierbar oder~~ ≥ 0 und meßbar. Dann gilt:

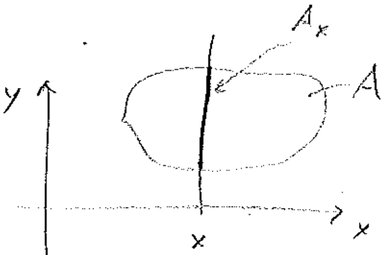
$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,d\lambda^{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,d\lambda^m(y)\Big)\,d\lambda^n(x)$$

Insbes. ex. die rechten Integrale.

<u>Beispiel</u> Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{B}^2$. Dann ist $\chi_A \geq 0$ meßbar und daher

$$\text{Fläche von } A := \lambda^2(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A \, d\lambda^2 \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x,y) \, d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$$

"Cavalierisches Prinzip" $$= \int_{\mathbb{R}} \lambda(A_x) \, d\lambda(x)$$



wobei $A_x = \{ y \mid (x,y) \in A \}$

Entsprechend kann man die Volumina höher-dimensionaler Körper ausrechnen. Z. B. erhält man induktiv

$$\lambda^n(B_R(0)) = \begin{cases} R^{2k} \pi^k / k! & \text{für } n = 2k \geq 2 \\ R^{2k+1} 2^{k+1} \pi^k / 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1) & \text{für } n = 2k+1 \geq 1 \end{cases}$$

Hierbei ist $B_R(0) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R \}$ mit $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ die n-dim Kugel mit Radius R.

Die folgende Formel verallgemeinert die Substitutionsformel für 1-dim. Integrale:

<u>Satz (Transformationsformel)</u> Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : \Omega \to \Omega'$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist $f \circ \varphi \, |\det D\varphi|$ integrierbar über Ω und es gilt:

$$\int_{\Omega} f \circ \varphi \, |\det D\varphi| \, d\lambda^n = \int_{\Omega'} f \, d\lambda^n.$$

Hierbei ist $D\varphi = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ die Jacobi-Matrix von φ.

<u>Zusatz</u> Der Satz gilt auch, wenn φ bijektiv ist und φ, φ^{-1} nur lokal Lipschitz sind.

<u>Bez.</u>: Für $U \subset \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ heißt Lipschitz-stetig mit Konst. L, falls für alle $x, y \in U$ gilt

$$\| \varphi(x) - \varphi(y) \| \leq L \| x - y \|$$

Sei $\|\varphi\|_{Lip} = \inf L$. Dies ist ebenfalls eine Lipschitz-Konst.

Der Vektorraum $C^{0,1}(U) = \{\varphi : U \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ Lipschitz}\}$ ist mit der Norm $\| \ \|_{Lip}$ ein Banachraum.

Eine Abb. $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ heißt lokal Lipschitz falls f. alle $x \in U$ eine Umgebg. $x \in V \subset U$ ex., so daß $\varphi|_V$ Lipschitz ist.

Es gilt: 1) φ lokal Lipschitz $\Rightarrow$ φ stetig

2) Ist U offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ C^1, so ist φ lokal Lipschitz (benutze die Mittelwertungl.)

<u>Satz</u> (Rademacher) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in C^{0,1}(U)$. Dann ist φ fast überall (total) diffb., alle $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ sind meßbar und es gilt: $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_\infty \leq \|\varphi\|_{Lip}$ $\quad$ ($\longrightarrow$ insbes. $|\det D\varphi|$ def.)

Hierbei def. man f. eine meßbare Fkt. $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| := \inf\{C \in \mathbb{R} \mid \mu\{|f| \geq C\} = 0\}$$

Man schreibt $\{f \geq C\} := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \geq C\} \in \mathcal{A}$.

<u>Bez.:</u> Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $0 < p \leq \infty$ setzt man:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ meßbar} \mid \|f\|_p < \infty\}.$$

Hierbei heißt $f : \Omega \to \mathbb{C}$ meßbar, wenn $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ meßbar sind.

Weiter ist $\quad \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$ falls $0 < p < \infty$.

Es gilt $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$, sowie f. $p \geq 1$ auch $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Alle $\mathcal{L}^p(\Omega)$ sind $\mathbb{C}$-Vektorräume f. $0 < p \leq \infty$. Es gilt $\|f\|_p = 0$ äquiv. $f = 0$ μ-f.ü.

Setze $N = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ meßbar} \mid f = 0 \ \mu\text{-f.ü.}\}$. Dann ist N ein Unterraum aller $\mathcal{L}^p(\Omega)$ und man setzt:

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega) / N .$$

Durch $\| f + N \|_p := \| f \|_p$ wird $\| \ \|_p$ auf $L^p(\Omega)$ wohldef.

<u>Satz</u> Für $1 \le p \le \infty$ ist $L^p(\Omega)$ mit der Norm $\| \ \|_p$ ein Banachraum. Für $p = 2$ wird $L^2(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = (f, g)_2 = \int_\Omega f \bar{g} \, d\mu$$

ein Hilbertraum mit Norm $\| \ \|_2$. Für $0 < p < 1$ ist $L^p(\Omega)$ mit der Metrik $d(f,g) = \| f - g \|_p^p$ vollständig.

Es gilt die Hölder Ungleichung: Für $f \in L^p$, $g \in L^q$ mit $p > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(\Rightarrow q > 1)$ ist $fg \in L^1$ und

$$\| fg \|_1 \le \| f \|_p \| g \|_q .$$

<u>Bem.:</u> Der Einfachheit halber werden die El. von $f \in L^p(\Omega)$ als "Funktionen" aufgefasst, aber Vorsicht: Es gibt keine Auswertungsabbildung $L^p(\Omega) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(\omega)$!