

# Partielle Differentialgleichungen

*Ben Schweizer*

Skript zur Vorlesung an der  
**Technischen Universität Dortmund**  
im  
**Wintersemester 2007/08**



# Inhaltsverzeichnis

<b>Teil 1. Einführung und Vorbereitungen</b>	7
Einführung	9
1. Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen	9
2. Erstaunliche erste Eigenschaften von Lösungen	13
Verallgemeinerter Lösungsbegriff	29
3. Der Gaußsche Satz	29
4. Distributionen	35
5. Sobolevräume	41
<b>Teil 2. Elliptische Differentialgleichungen</b>	49
Darstellungsformeln	51
6. Die Fundamentallösung	51
7. Greensche Funktionen	54
Energiemethoden	61
8. Variationsmethode und symmetrische Probleme	61
9. Unsymmetrische Bilinearformen und Lax-Milgram	68
10. $L^2$ -Regularität	74
Weitere Eigenschaften und Verfahren	83
11. Weitere Aussagen über harmonische Funktionen	83
12. Das Perron-Verfahren	86
13. Maximumprinzipien für elliptische Gleichungen	91
<b>Teil 3. Parabolische Differentialgleichungen</b>	97
Darstellungsformeln	99
14. Existenz von Lösungen im Ganzraum	99
15. Maximumprinzip und Regularität	103
Energiemethoden	107
16. Existenz von Lösungen mit Rothe-Methode	107
17. Eindeutigkeit und Regularität	115
<b>Teil 4. Appendix</b>	123
18. Bochner-Integral	124
19. Variation der Konstanten	126



## Literatur

**L.C. Evans:** Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics No. 19, AMS 1998.

**H.-W. Alt:** Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung. Springer Hochschultext. Die Referenzen beziehen sich auf die Ausgabe von 1985.

**M.Ruzicka:** Nichtlineare Funktionalanalysis. Springer, 2003.

**E. DiBenedetto:** Partial Differential Equations. Birkhäuser, 1995.

**D. Gilbarg und N.S. Trudinger:** Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Classics in Mathematics. Springer, 2001.

**Q. Han and F. Lin:** Elliptic Partial Differential Equations. CIMS Lecture Notes 1.

**J. Jost:** Partial Differential Equations. Graduate Texts in Mathematics 214. Springer, 2002.

**M. Renardy und R. Rogers:** An introduction to partial differential equations, Texts in Applied Mathematics. 13. Springer, 1996.

Eine wichtige Vorlage war für mich:

**W. Jäger:** Skript zur Vorlesung *Lineare Partielle Differentialgleichungen*, Sommersemester 1991, Heidelberg.



## **Teil 1**

# **Einführung und Vorbereitungen**



# Einführung

Diese Einführung dient der Motivation und der Begriffsbildung. In Abschnitt 1 leiten wir aus physikalischen Prinzipien erste partielle Differentialgleichungen ab. In Abschnitt 2 beweisen wir, dass die Lösungen einige erstaunliche zusätzliche Eigenschaften haben. Dabei sammeln wir solche Eigenschaften, die sich elementar und schnell beweisen lassen.

## 1. Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen

Wir wollen die *Modellierung* eines physikalischen Vorganges an einem Beispiel illustrieren.

**Physikalische Beobachtung:** Ein Metallkörper wird am Rand beheizt (zeitlich konstant). Wir beobachten, dass sich nach einer Zeit eine feste Temperaturverteilung innerhalb des Körpers ausbildet.

**Frage:** Gegeben die Temperaturverteilung am Rand ... können wir die Temperaturverteilung im Inneren auch ermitteln ohne das Experiment durchzuführen?

**Modellierung (Variablen):** Wir nennen das Gebiet, das der Metallkörper einnimmt  $\Omega$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ). Die Temperaturverteilung im Inneren (die wir nicht kennen), nennen wir  $u$  ( $u$  weist jedem Raumpunkt eine Temperatur zu, also  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ). Zusätzlich führen wir den Wärmestrom  $j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein. Für einen Raumpunkt  $x \in \Omega$  gibt  $j(x) \in \mathbb{R}^3$  an, in welche Richtung Wärmeenergie transportiert wird (und wieviel transportiert wird).

**Modellierung (Gleichungen):** Im Gedankenexperiment betrachten wir ein beliebiges Volumen  $V \subset \Omega$ . Falls sich die Wärmeverteilung nicht mehr ändert (weil wir lange genug gewartet haben), dann darf insgesamt keine Wärme in das Volumen  $V$  hineintransportiert werden, denn sonst würde die Temperatur entsprechend ansteigen. Mit dem Normalenvektor  $\nu$  an  $\partial V$  gilt

$$\int_{\partial V} j \cdot \nu \, dS = 0.$$

Mit dem Gaußschen Satz schreiben wir dies als

$$\int_V \operatorname{div} j \, dx = \int_{\partial V} j \cdot \nu \, dS = 0.$$

Da das Volumen  $V$  beliebig war, gilt

$$(1.1) \quad \operatorname{div} j = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Nun brauchen wir eine Abhängigkeit zwischen  $j$  und  $u$ . Die einfachste ist gegeben durch das Fouriersche Gesetz: Man nimmt an, dass die Wärme immer vom warmen Bereich in den kalten Bereich strömt, die Geschwindigkeit ist proportional zu Temperaturunterschieden. Mit einer Zahl  $a > 0$  (*Leitfähigkeit* des Materials) nimmt man an, dass

$$(1.2) \quad j = -a \nabla u.$$

Setzt man dies in (1.1) ein, so erhält man die *Laplace-Gleichung*

$$(1.3) \quad \Delta u = 0.$$

Wir verwenden dabei den *Laplace-Operator* in  $n$  Dimensionen,

$$\Delta = \operatorname{div} \nabla = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}^2 = \sum_{k=1}^n \partial_k^2.$$

**Varianten:** Falls die Leitfähigkeit  $a$  vom Raumpunkt abhängt,  $a = a(x)$ , dann können wir im letzten Schritt nicht vereinfachen. Wir betrachten dann

$$(1.4) \quad \operatorname{div} (a \cdot \nabla u) = 0.$$

Falls wir Wärmequellen innerhalb des Körpers haben, die in jedem Punkt  $x$  die Wärmemenge  $f(x)$  erzeugen, dann hätten wir  $-\operatorname{div} (a \cdot \nabla u) = f$  gefunden. Im Falle  $a \equiv 1$  also die *Poisson-Gleichung*

$$(1.5) \quad -\Delta u = f.$$

Falls wir die *instationäre* (= zeitlich veränderliche) Situation betrachten, dann ist der Wärmestrom nach  $V$  nicht unbedingt 0. Er ist dann aber gleichzusetzen mit der Zunahme an Temperatur in  $V$ ,  $\int_V \partial_t u$ . Dies führt auf die *Wärmeleitungsgleichung*

$$(1.6) \quad \partial_t u = \Delta u.$$

**In dieser Vorlesung** betrachten wir die

*Laplace-Gleichung:*  $\Delta u = 0$

*Poisson-Gleichung:*  $-\Delta u = f$

*andere elliptische Gleichungen, z.B.:*  $-\operatorname{div} (a \cdot \nabla u) = f$

*Wärmeleitungsgleichung:*  $\partial_t u = \Delta u$

*andere parabolische Gleichungen, z.B.:*  $\partial_t u = \operatorname{div} (a \cdot \nabla u) + f$

Lösungen der Laplace-Gleichung heißen *harmonische Funktionen*.

Die zeitunabhängigen (*stationären*) Gleichungen werden in Teil 2 behandelt, die zeitabhängige (*instationäre*) Wärmeleitungsgleichung in Teil 3.

**Unsere Antwort auf obige Frage:** Um die Temperaturverteilung im Inneren zu kennen, müssen wir 'nur' Gleichung (1.3) lösen (mit geeigneten Randbedingungen).

Die Modellierung ermöglicht aber noch viel mehr:

- Wir können Größen berechnen, die nicht direkt meßbar sind.
- Wir können die Lösung berechnen, ohne das Experiment durchzuführen.
- Mit (1.6) können wir Vorhersagen über die Zukunft treffen.
- Mit (1.4) können wir aus dem Experiment Rückschlüsse über das Material gewinnen.
- Wir können nach optimalen Materialien fragen: Wie muss  $a$  verteilt werden, damit z.B. Lösungen nirgends zu groß werden?

**Partielle Differentialgleichungen:** Die genannten Gleichungen heißen partielle Differentialgleichungen, weil in der Gleichung Ableitungen vorkommen, und zwar Ableitungen nicht nur in eine Richtung (dann: gewöhnliche DGL), sondern partielle Ableitungen in verschiedene Richtungen.

**Dasselbe Modell in anderem Kontext:** Die beschriebenen Phänomene waren eine Energieerhaltung in Gleichung (1.1) (andere Bedeutungen: Massenerhaltung, Ladungserhaltung, Impulserhaltung) und eine lineare Beziehung zwischen Strom und  $u$ -Gradient in (1.2). Dieselben Gleichungen entstehen in ganz anderen Zusammenhängen:

Bedeutung von $u$	Name für Gesetz (1.2)
Temperatur	Fourier'sches Gesetz
chemische Konzentration	Fick'sches Diffusionsgesetz
elektrostatisches Potential	Ohm'sches Gesetz
Flüssigkeitsdruck	Darcy Gesetz
Deformation	Hook'sches Gesetz

**Modellierung anderer Phänomene:** Sehr viele Vorgänge in der Natur werden mit partiellen Differentialgleichungen beschrieben:

- Elektrostatik, Elektromagnetische Wellen (Maxwell-Gleichungen)
- Elastizität (Kräfte in Bauwerken, Werkstoffen), Plastizität

- Strömungen von Flüssigkeiten (Navier-Stokes Gleichungen)
  - Umströmung eines Fahrzeuges
  - Bewegung im Ozean (mit Wellen!)
  - Bewegungen von Luftmassen (Wettervorhersage)
  - Grundwasserströmungen
- Ausbreitung von Schall (Helmholtz-Gleichung)
- Verbrennungsvorgänge (Reaktions-Diffusions-Gleichungen)
- Populationsdynamik in der Biologie
- Beschreibung von elektrochemischen Vorgängen (z.B. Nervenreizleitung)
- Beschreibung von Optionspreisen in der Finanzmathematik

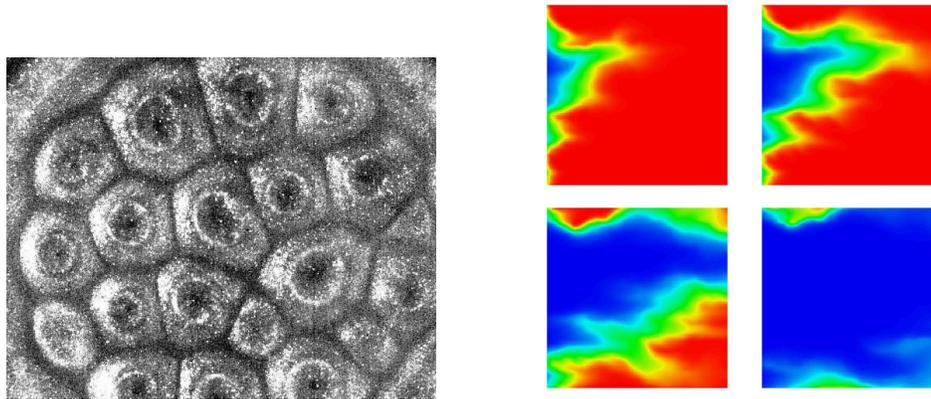


ABBILDUNG 1. Strömungsphänomene. Links: Konvektionsrollen im Experiment. Rechts: Eindringen von Frischwasser in Salzwasser-getränkten Boden (Computersimulation).

Für weitere Informationen zu den Bildern verweisen wir auf die 'Autoren' [benard-www.zarm.uni-bremen.de.jpg](http://benard-www.zarm.uni-bremen.de.jpg), P. Bastian, Meteosat, M. Kirkilionis, O. Riedel, G. Warnatz, O. Sterz, G. Wittum, State of Washington, S. Krömker.

**Fragestellungen zu partiellen DGL:** Wir werden uns an folgenden grundsätzlichen Fragen orientieren.

*Existenz:* Hat die gegebene Gleichung eine Lösung?

*Eindeutigkeit:* Gibt es höchstens eine Lösung?

*Regularität:* Welche Glattheitseigenschaften hat die Lösung?

*Eigenschaften:* Wie kann die Lösung charakterisiert werden?

Die Antworten auf die Fragen nach Existenz und Eigenschaften können oft verwendet werden, um numerische Verfahren zur Berechnung der Lösung anzugeben.

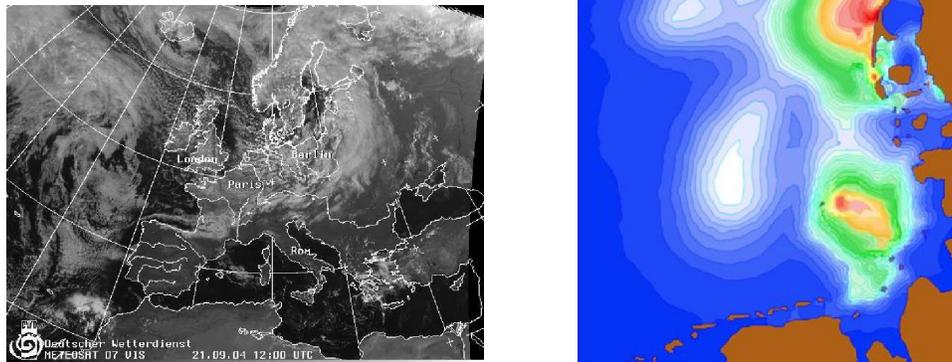


ABBILDUNG 2. Linkes Bild: Wasserkonzentration über Europa ('Messung'). Rechtes Bild: Planktonkonzentration in der Nordsee (Simulation)

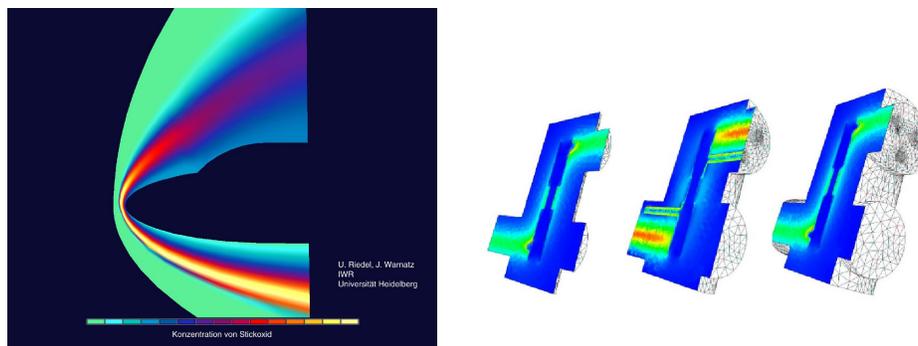


ABBILDUNG 3. Links: Strömung um einen Raumleiter beim Wiedereintritt. Rechts: Felder in einem Elektromagneten

## 2. Erstaunliche erste Eigenschaften von Lösungen

Wir wenden uns nun der mathematischen Seite der Gleichungen zu.

In diesem langen Abschnitt stellen wir einige elementar beweisbare Aussagen über Lösungen verschiedener Gleichungen zusammen. Sie sollen ein Gefühl für die Gleichungen vermitteln und insbesondere klären, welche Randbedingungen jeweils zu stellen sind.

**2.1. Notation und partielle Integration.** Eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist der Gaußsche Satz. Wir geben ihn hier in der Formulierung der *partiellen Integration* an. In Abschnitt 3 werden wir uns eingehender mit diesem Satz beschäftigen.



ABBILDUNG 4. Links: Stahlbrücke im Staat Washington. Rechts: Kapillarwellen auf einem Fluß.



ABBILDUNG 5. Bildverarbeitung: vorher-nachher. Die Grauwerte des Bildes links wurden als Startwerte einer partiellen Differentialgleichung genommen; zu einem späteren Zeitpunkt sieht die Lösung der Gleichung aus wie im rechten Bild. Es findet eine 'Reinigung' durch anisotrope Diffusion statt.

SATZ 2.1 (Partielle Integration). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene, beschränkte Teilmenge mit  $C^1$ -Rand  $\partial\Omega$  und äußerer Normalen  $\nu$ . Dann gilt für Funktionen  $u, v \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$  die Vektorengleichung

$$(2.1) \quad \int_{\Omega} u \nabla v = - \int_{\Omega} \nabla u v + \int_{\partial\Omega} uv \nu.$$

**Notation für Integrale:** Für Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  schreiben wir (ab jetzt) für das Lebesgue-Integral über  $\Omega$  eines der Symbole

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f d\mathcal{L}^n = \int_{\Omega} f(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Dabei hat die erste Schreibweise den Vorteil, dass wir uns damit auf das Wesentliche konzentrieren, die Schreibweise mit dem Symbol  $\mathcal{L}^n$  für das  $n$ -dimensionale Lebesgue-Maß hat den Vorteil, dass sie absolut unmissverständlich ist. In den letzten beiden Formen kann  $x$  durch eine andere 'Laufvariable' ersetzt werden.

Für das Integral über eine  $n - 1$ -dimensionale Fläche  $\Sigma$  schreiben wir eines der Symbole

$$\int_{\Sigma} f = \int_{\Sigma} f d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Sigma} f(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{\Sigma} f(x) dS(x).$$

Hier konzentriert sich wieder die erste Schreibweise auf das Wesentliche, ist jedoch missverständlich: Würde man nämlich bezüglich des  $n$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes über die ( $n$ -dimensional) Nullmenge  $\Sigma$  integrieren, so könnte man immer nur 0 erhalten. Die anderen Schreibweisen machen deutlich, dass ein Flächenintegral gemeint ist. Bei Verwendung des  $n - 1$ -dimensionalen Hausdorff-Maßes  $\mathcal{H}^{n-1}$  wird die Dimension angegeben und das Integral ist unmissverständlich definiert (für eine Wiederholung der Definitionen siehe Abschnitt 3).

**Varianten der partiellen Integration:** Für die  $i$ -te Koordinate,  $i = 1, \dots, n$  lautet die Aussage

$$\int_{\Omega} u \partial_i v = - \int_{\Omega} \partial_i u v + \int_{\partial\Omega} uv \nu_i.$$

Für die konstante Funktion  $u = 1$  erhalten wir

$$\int_{\Omega} \partial_i v = \int_{\partial\Omega} v \nu_i.$$

Falls  $v \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  (vektoriell), dann können wir obige Formel auf die Komponenten  $v_i$  anwenden und addieren. Mit der Abkürzung  $\operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \sum_{i=1}^n \partial_i v_i$  finden wir

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v = \int_{\partial\Omega} v \cdot \nu.$$

Dies ist der klassische Gaußsche Satz. Wir haben ihn in der Ableitung von (1.1) bereits verwendet.

**2.2. Einfache harmonische Funktionen.** Im zweidimensionalen ist die einfachste (nichttriviale) harmonische Funktion

$$(2.2) \quad u(x) = u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2.$$

Tatsächlich finden wir  $\partial_1 u(x) = x_1$ ,  $\partial_1^2 u(x) = 1$ ,  $\partial_2^2 u(x) = -1$ , und damit  $\Delta u = 0$ . Man kann dieses Beispiel so interpretieren: In die Richtung  $e_1$  und  $e_2$  sind die zweiten Ableitungen ( $\sim$  Krümmungen) betragsmässig gleich, vom Vorzeichen aber umgekehrt. Die 'mittlere zweite Ableitung' verschwindet.

*Eindimensionale harmonische Funktionen.* Zusammenhängende Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}$  sind Intervalle, wir schreiben  $\Omega = I = (a, b)$ . Sei nun  $u$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall, die die Laplace-Gleichung löst, also

$$u \in C^2(I, \mathbb{R}), \quad \Delta u = 0.$$

Dann ist die Ableitung  $\nabla u = u'$  konstant auf dem Intervall und damit  $u$  linear:  $u(x) = cx + d$  für  $c, d \in \mathbb{R}$ . Die Randwerte von  $u$ , also  $u(a)$  und  $u(b)$ , bestimmen die Werte von  $c$  und  $d$ .

**2.3. Mittelwerteigenschaft der Laplace-Gleichung.** Nun sei  $n \geq 1$  beliebig und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Wir bezeichnen die offene Kugel mit Radius  $r > 0$  und Mittelpunkt  $x$  mit  $B(x, r)$ .

Mittelwerte über eine Mannigfaltigkeit  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit

$$\int_{\Sigma} u = \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} u, \quad \text{wobei} \quad |\Sigma| = \int_{\Sigma} 1.$$

**SATZ 2.2** (Mittelwertformel für harmonische Funktionen). *Sei  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  mit  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ . Dann gilt*

$$(2.3) \quad u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u$$

für jede Kugel  $B(x, r) \subset \Omega$ .

**BEWEIS.** Für festes  $x \in \Omega$  bezeichnen wir den zweiten Term mit  $\Phi(r)$  und schreiben mit der Transformationsformel

$$\Phi(r) := \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) dS(z).$$

Die Ableitung nach  $r$  (sie existiert!) ist dann

$$\begin{aligned}\Phi'(r) &= \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x + rz) \cdot z \, dS(z) = \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} \, dS(y) \\ &= \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \nu \, dS(y).\end{aligned}$$

Die Gaußsche Satz für  $v = \nabla u$  liefert

$$|\partial B(x,r)| \Phi'(r) = \int_{\partial B(x,r)} v \cdot \nu = \int_{B(x,r)} \operatorname{div} v = \int_{B(x,r)} \Delta u = 0.$$

Also ist  $\Phi$  konstant. Die Stetigkeit von  $u$  liefert  $\Phi(r) \rightarrow u(x)$  für  $r \rightarrow 0$ , also das Resultat.  $\square$

**COROLLAR 2.3** (Variante der Mittelwertformel). *Sei  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  mit  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  und  $B(x,r) \subset \Omega$ . Für jede integrierbare Gewichtsfunktion  $\varphi : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\int_{B(0,r)} \varphi(|x|) \, dx = 1$  gilt dann*

$$(2.4) \quad u(x) = \int_{B(x,r)} u(y) \varphi(|y-x|) \, dy.$$

**BEWEIS.** Das Volumenintegral kann in Polarkoordinaten berechnet werden. Wir schreiben  $B(x,r) \ni y = x + sz$  mit  $s \in [0, r]$  und  $z \in \partial B(0,1)$ ,

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} u(y) \varphi(|y-x|) \, dy &= \int_0^r \int_{\partial B(0,1)} u(x + sz) \varphi(s) \, dS(z) \, s^{n-1} \, ds \\ &= \int_0^r u(x) |\partial B(0,1)| \varphi(s) \, s^{n-1} \, ds = u(x).\end{aligned}$$

Damit ist die gewichtete Mittelwertformel gezeigt.  $\square$

Wir sehen, dass harmonische Funktionen in jedem Punkt mit ihrem Mittelwert in einer Umgebung übereinstimmen. Es gilt auch die Umkehrung: Die Mittelwerteigenschaft charakterisiert harmonische Funktionen.

**SATZ 2.4** (Charakterisierung harmonischer Funktionen). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $u \in C^2(\Omega)$  mit*

$$(2.5) \quad u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u$$

*für alle Kugeln  $B(x,r) \subset \Omega$ . Dann ist  $u$  harmonisch.*

**BEWEIS.** Angenommen,  $\Delta u(x) \neq 0$  für ein  $x \in \Omega$ . Ohne Einschränkung gelte  $\Delta u(x) > 0$ . Wegen der Stetigkeit der zweiten Ableitungen finden wir  $R > 0$ , so dass in  $B(x,R)$  gilt  $\Delta u > 0$ . Wieder

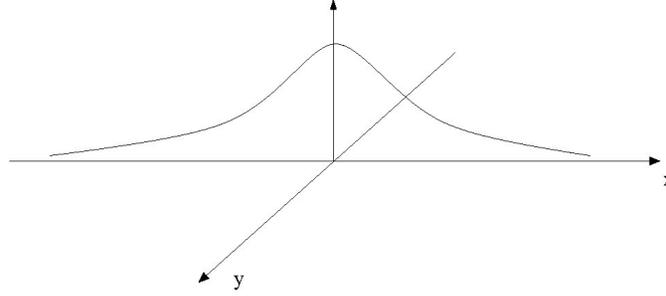


ABBILDUNG 6. Eine glatte radialsymmetrische Gewichtsfunktion.

definieren wir  $\Phi$  durch die rechte Seite von (2.5). Nach Voraussetzung gilt  $\Phi' = 0$ , aber die Rechnung des vorigen Beweises liefert

$$|\partial B(x, r)| \Phi'(r) = \int_{B(x, r)} \Delta u > 0$$

für  $r < R$ . Ein Widerspruch.  $\square$

**2.4. Regularität.** Aus der Mittelwertformel folgt sofort eine erstaunliche Regularitätsaussage. Sei  $u$  harmonisch in  $\Omega$  und  $B(x, r) \subset \Omega$ . Wir wählen  $\varphi \in C^\infty([0, r], \mathbb{R})$  mit kompaktem Träger, d.h. für ein  $\varepsilon > 0$  gilt  $\varphi(s) = 0$  für alle  $s > r - \varepsilon$ . Mit dieser Funktion können wir definieren

$$\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(y) = \varphi(|y|),$$

wobei wir setzen  $\varphi(s) = 0$  für  $s > r$ . Damit die Funktion  $\psi$  ebenfalls  $C^\infty$  ist, fordern wir  $\varphi(s) = 1$  für alle  $0 \leq s \leq \varepsilon$ . Um das Integral zu normieren fordern wir

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \psi = \int_0^r \int_{\partial B_s(0)} \varphi(|y|) d\mathcal{H}^{n-1}(y) ds = \int_0^r |\partial B_1(0)| s^{n-1} \varphi(s) ds.$$

**SATZ 2.5.** *Harmonische Funktionen  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  sind von der Klasse  $C^\infty(\Omega)$ .*

**BEWEIS.** Wir benutzen die Mittelwertformel mit der Gewichtsfunktion  $\psi$ . Differenzenquotienten in  $k$ -te Einheitsrichtung  $e_k$  berechnen

sich für  $0 < h < \varepsilon$  durch

$$\begin{aligned} & \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_{B(x+he_k, r)} u(y) \psi(y - x - he_k) dy - \int_{B(x, r)} u(y) \psi(y - x) dy \right) \\ &= \int_{B(x, r)} u(y) \frac{\psi(y - x - he_k) - \psi(y - x)}{h} dy \\ &\rightarrow \int_{B(x, r)} u(y) (-1) \partial_k \psi(y - x) dy. \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $u$  differenzierbar in  $x$  (was wir allerdings schon wußten). Die Argumentation kann nun wiederholt werden und liefert für die höhere Ableitung nach dem Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$D^\alpha u(x) = \int_{B(x, r)} u(y) (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \psi(y - x) dy,$$

und insbesondere existieren alle Ableitungen.  $\square$

Die Regularität ist insofern erstaunlich, als dass wir doch zunächst nur Informationen über die spezielle Kombination zweiter Ableitungen der Form  $\sum_{k=1}^n \partial_k^2 u$  haben. Zunächst ist nicht einmal klar, wie man daraus eine Information über (z.B.)  $\partial_1^2 u$  bekommen kann. Aber tatsächlich gewinnt man eine Information über alle Ableitungen.

### 2.5. Maximumprinzip für die Laplace-Gleichung.

SATZ 2.6 (Maximumprinzip). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  harmonisch in  $\Omega$ . Dann gilt*

(1) Schwaches Maximumprinzip.

$$(2.6) \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(2) Starkes Maximumprinzip. *Falls  $\Omega$  zusammenhängend ist und das Maximum im Inneren angenommen wird,  $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$  für ein  $x_0 \in \Omega$ , dann ist  $u$  konstant, also*

$$(2.7) \quad u \equiv \max_{\bar{\Omega}} u.$$

BEWEIS. Wir stellen zunächst fest, dass (2.6) aus (2.7) folgt. Tatsächlich gilt: Falls  $u$  ein inneres Maximum besitzt, so ist wegen (2.7) die Funktion  $u$  auf der Zusammenhangskomponente konstant. Also wird das Maximum auch am Rand angenommen.

Wir beweisen nun (2.7). Sei also  $u(x_0) = M := \max_{\bar{\Omega}} u$  für  $x_0 \in \Omega$ . Für jede Kugel  $B(x_0, r) \subset \Omega$  gilt

$$\int_{\partial B(x_0, r)} u = u(x_0) = M \text{ und } u \leq M \text{ punktweise.}$$

Da  $u$  stetig ist auf  $\partial B(x_0, r)$ , muss dort  $u \equiv M$  gelten. Da  $r$  beliebig war, hat  $x_0$  eine offene Umgebung mit  $u \equiv M$ .

Die Menge  $Q := \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$  ist also offen. Gleichzeitig sind aber Häufungspunkte von  $Q$  in  $\Omega$  wieder in  $Q$  enthalten, also stimmt  $Q$  mit  $\Omega$  überein.  $\square$

**2.6. Das Dirichlet-Prinzip.** Oft liefert der physikalische Hintergrund des Problems eine weitere Größe: Eine Energie, die vom System minimiert wird.

Wir nehmen hier einen komplett mathematischen Standpunkt ein und betrachten das Dirichlet-Funktional

$$(2.8) \quad E(u) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

Da wir Randbedingungen festlegen möchten, betrachten wir für stetiges  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nur Funktionen der Klasse

$$(2.9) \quad X := \{u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = g\}.$$

**SATZ 2.7 (Dirichlet-Prinzip).** *Sei  $\Omega$  offen und  $u \in X$  eine Funktion mit*

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v).$$

*Dann ist  $u$  eine harmonische Funktion.*

**Bemerkung:** Das Prinzip kann ein Verfahren liefern, um die Laplace-Gleichung  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ ,  $u = g$  auf  $\partial\Omega$  zu lösen.

**BEWEIS.** Wir wählen eine Funktion  $w \in C^2(\Omega)$  mit kompaktem Träger in  $\Omega$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . Zur Störung  $\varepsilon w$  betrachten wir nun die Vergleichsfunktionen  $u_\varepsilon := u + \varepsilon w$ . Es gilt  $u_\varepsilon \in X$  und wegen der Minimalität von  $u$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{E(u_\varepsilon) - E(u)}{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \nabla(u + \varepsilon w) \cdot \nabla(u + \varepsilon w) - |\nabla u|^2 \\ &= \int_{\Omega} 2\nabla u \cdot \nabla w + \varepsilon |\nabla w|^2 \\ &\rightarrow 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w = 2 \int_{\Omega} (-\Delta u) w. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir den Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  gebildet und einmal partiell integriert (ohne Randterm, weil  $w$  kompakten Träger hat). Da  $w$  beliebig war, gilt  $\Delta u = 0$ .  $\square$

## 2.7. Eindeutigkeit bei der Poisson-Gleichung.

**SATZ 2.8 (Eindeutigkeit).** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt,  $g \in C^0(\partial\Omega)$  und  $f \in C^0(\Omega)$  gegeben. Dann gibt es höchstens ein  $u$  der Klasse  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , welches die Poisson-Gleichung*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

löst.

**BEWEIS.** Seien  $u$  und  $v$  zwei Lösungen der Gleichung. Dann erfüllt die Differenz  $w := u - v$  auf  $\Omega$

$$\Delta w = \Delta u - \Delta v = f - f = 0,$$

und auf  $\partial\Omega$

$$w = u - v = g - g = 0.$$

$w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  ist harmonisch und nimmt sein Maximum nach (2.6) auf dem Rand an, also  $w \leq 0$  in  $\bar{\Omega}$ . Aber auch  $-w$  ist harmonisch und nimmt sein Maximum auf dem Rand an, also auch  $-w \leq 0$  auf  $\bar{\Omega}$ . Es gilt also  $w = 0$  und damit  $u = v$ .  $\square$

Wir interpretieren den Satz so: Für vorgegebenes  $f$  und  $g$  ist die Lösung eindeutig. Falls wir nun noch zu 'jedem'  $f$  und  $g$  eine Lösung finden, dann wissen wir, welche Daten zur Poisson-Gleichung 'dazugehören' (nämlich neben  $f$  auch  $g$ ).

*Bemerkung.* Wir fordern immer zwei Eigenschaften von den Lösungen:  $u \in C^2(\Omega)$ , damit wir den Laplace-Operator 'klassisch' anwenden können. Zusätzlich  $u \in C^0(\bar{\Omega})$ , damit die Randwerte wirklich angenommen werden. Ohne diese Forderung wäre die Funktion

$$u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{für } x \in \{0, 1\} \end{cases}$$

auf  $\Omega = (0, 1)$  eine Lösung der Gleichung

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 1.$$

Insbesondere sehen wir, dass ohne die Forderung  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  keine Eindeutigkeit der Lösung gilt.

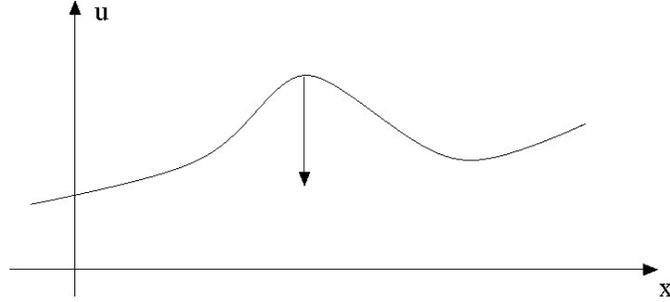


ABBILDUNG 7. Die Richtung von  $\partial_t u$  im Maximum.

### 2.8. Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung.

Hier sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und mit  $C^1$ -Rand. Wir betrachten für  $T > 0$  Raum-Zeit Zylinder der Form  $\Omega_T := \Omega \times (0, T] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Als parabolischen Rand des Zylinders bezeichnet man die Menge  $\Gamma_T := \bar{\Omega}_T \setminus \Omega_T$ , sie faßt den seitlichen und den  $t = 0$ -Rand zusammen. Nach unserer Intuition erwarten wir, dass  $u$  niemals größer wird, als dies die Randwerte auf  $\Gamma_T$  vorgeben (man denke an eine Wärmeverteilung in einem Körper). Tatsächlich wird sich dies als richtig herausstellen.

Ein mathematisches Argument ist wie folgt. Sei  $u$  in einem inneren Punkt  $(x, t) \in \Omega_T$  maximal. Dann verschwinden erste Ortsableitungen und zweite sind nichtpositiv, also

$$\partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) \leq 0.$$

$u$  sollte also eher ab- als zunehmen. Das Problem, dass wir keine strikte Ungleichung gefunden haben, kann im Fall der Wärmeleitungsgleichung mit einem einfachen Trick gelöst werden.

**SATZ 2.9** (Parabolisches Maximumprinzip). *Sei  $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\bar{\Omega}_T)$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$(2.10) \quad \partial_t u = \Delta u \quad \text{in } \Omega_T.$$

*Dann gilt mit  $\Gamma_T := \bar{\Omega}_T \setminus \Omega_T$*

$$(2.11) \quad \max_{\bar{\Omega}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u.$$

**BEWEIS.** Für ein Widerspruchsargument wollen wir das Gegenteil annehmen, nämlich dass eine Lösung  $u$  ihr Maximum nicht am parabolischen Rand annimmt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass dieses innere Maximum zum Zeitpunkt  $T$  auftritt, ansonsten verkleinern wir  $T$ . Weiterhin können wir annehmen, dass  $\max_{\Gamma_T} u = 1$ , andernfalls addieren wir eine Konstante zu  $u$ . Wir finden also  $x_0 \in \Omega$  mit  $u(x_0, T) = 1 + \varepsilon$  für ein  $\varepsilon > 0$ .

Wir betrachten die Funktion  $v(x, t) := e^{\lambda(T-t)}u(x, t)$ . Für kleines  $\lambda > 0$  (kleiner  $\log(1 + \varepsilon/2)/T$ ) gilt  $v \leq 1 + \varepsilon/2$  auf  $\Gamma_T$ , und im Punkt  $(x_0, T)$  gilt  $v(x_0, T) = 1 + \varepsilon$ . Also hat  $v$  genau wie  $u$  ein inneres Maximum,  $v(x_1, t_1) = \max_{\Omega_T} v \geq \max_{\Gamma_T} v$ .

Die Funktion  $v$  löst auf  $\Omega_T$

$$\partial_t v = -\lambda v + \Delta v.$$

Der Punkt  $(x_1, t_1)$  ist ein Maximum und daher gilt  $\partial_t v(x_1, t_1) \geq 0$  und  $\Delta v(x_1, t_1) \leq 0$ , also in diesem Punkt

$$0 \leq \partial_t v = -\lambda v + \Delta v \leq -\lambda v < 0.$$

Dies liefert den gewünschten Widerspruch.  $\square$

Genau wie bei der Poisson-Gleichung liefert das Maximumprinzip eine Eindeutigkeitsaussage.

**COROLLAR 2.10 (Eindeutigkeit).** *Für  $f \in C^0(\Omega_T)$ ,  $u_0 \in C^0(\bar{\Omega})$  und  $g \in C^0(\partial\Omega \times [0, T])$  gibt es höchstens eine Lösung  $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\bar{\Omega}_T)$  der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f && \text{in } \Omega_T, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \times [0, T], \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{auf } \Omega. \end{aligned}$$

Das Corollar liefert uns wieder einen Hinweis darauf, welche Daten zur Wärmeleitungsgleichung 'dazugehören'. Tatsächlich werden wir später sehen, dass wir zu 'jedem'  $f$ ,  $g$ , und  $u_0$  eine eindeutige Lösung  $u$  finden.

### 2.9. Elementare Lösungen zu einer Transportgleichung.

*Homogene Gleichung.* Die einfachste Gleichung erster Ordnung lautet

$$(2.12) \quad \partial_t u + \partial_x u = 0.$$

Wir wollen hier  $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  suchen. Wieder wollen wir ein *Anfangswertproblem* lösen, wir fordern

$$(2.13) \quad u(\cdot, 0) = u_0,$$

mit, sagen wir,  $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Eine Lösung der Gleichung läßt sich elementar angeben, nämlich

$$(2.14) \quad u(x, t) = u_0(x - t).$$

Die Lösungseigenschaft folgt aus  $\partial_t u(x, t) = u_0'(x - t) = \partial_x u(x, t)$  und die Anfangswertannahme aus  $u(x, 0) = u_0(x)$ . Die Lösung verschiebt also einfach die Startwerte mit der Zeit nach rechts.

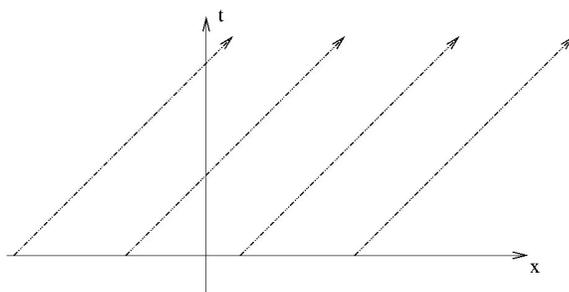


ABBILDUNG 8. Charakteristiken: Entlang der Linien  $x = t + c$  ist die Lösung konstant.

Die spezielle Lösung verrät Folgendes über Gleichungen erster Ordnung.

- Die Lösung wird mit der Zeit nicht regulärer, '*die Gleichung glättet nicht*'.
- Es gibt eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Der zweite Punkt meint das Folgende: Information über die Anfangswerte in  $x = 0$  wird zur Zeit  $t$  jenseits der Punkte  $|x| = t$  nicht wahrgenommen. Dies steht, wie wir sehen werden, im Gegensatz zur Wärmeleitungsgleichung. Dort werden die Anfangswerte in 0 nach beliebig kurzer Zeit  $t > 0$  überall wahrgenommen.

*Inhomogene Gleichung.* Wir haben gesehen, dass die Transportgleichung alle Werte mit Geschwindigkeit 1 nach rechts transportiert. Wir werden nun ein fundamentales Prinzip kennenlernen, eine Art Superposition von Effekten (letztlich das Prinzip der Charakteristiken). Wir betrachten die inhomogene Gleichung

$$(2.15) \quad \partial_t u + \partial_x u = f,$$

wobei  $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R})$ .

*Homogen:* Entlang der Linien  $(x-t+s, s)$  ist  $u$  konstant. *Inhomogen:* Entlang der Linien  $(x-t+s, s)$  nimmt  $u$  um  $f$  zu.

Wir erraten also

$$(2.16) \quad u(x, t) = u_0(x - t) + \int_0^t f(x - t + s, s) ds.$$

Einsetzen verifiziert den Tipp, denn

$$\partial_t u(x, t) = -u'_0(x - t) + f(x, t) - \int_0^t \partial_1 f(x - t + s, s) ds,$$

$$\partial_x u(x, t) = u'_0(x - t) + \int_0^t \partial_1 f(x - t + s, s) ds.$$

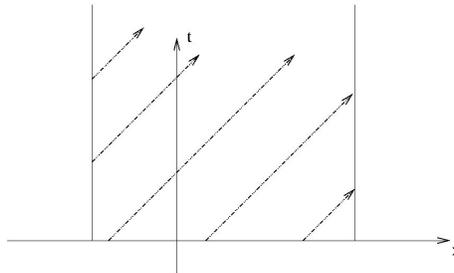


ABBILDUNG 9. Auf einem beschränkten Gebiet bestimmen die Charakteristiken welche Randbedingungen gestellt werden müssen.

*Beschränkte Gebiete.* Schon im eindimensionalen Fall sieht man anhand der Charakteristiken, dass die Ränder des Gebietes links und rechts unterschiedlich behandelt werden müssen. Laufen die Charakteristiken nach rechts (wie bei uns), so gilt

- Am linken Rand müssen die Werte von  $u$  vorgegeben werden, damit der Wert entlang der Charakteristik bestimmt ist.
- Am rechten Rand können keine Werte vorgegeben werden, sie sind durch die Charakteristik bestimmt.

**2.10. Eine Wellengleichung.** Die einfachste Wellengleichung zweiter Ordnung lautet

$$(2.17) \quad \partial_t^2 u = \Delta u.$$

*Eine physikalische Interpretation.* Wir bezeichnen die vertikale Auslenkung einer dünnen Membran (eine Saite für  $n = 1$ ) mit  $u$ , bei einer unendlich ausgedehnten horizontalen Membran, also  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Im einfachsten Modell sind die vertikalen Kräfte gegeben durch  $\nabla u$ , d.h. über eine Linie  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  mit Normalen  $\nu$  wird die vertikale Kraft  $\nabla u \cdot \nu$  übertragen (dahinter steht das Hooksche Gesetz Kraft  $\sim$  Auslenkung). Wir verwenden nun Newtons Gesetz für die kinematische Beschreibung: Beschleunigung  $\sim$  Kraft. Für ein Elementarvolumen  $V \subset \mathbb{R}^2$  gilt dann nach Normalisierung

$$(2.18) \quad \int_V \partial_t^2 u = \int_{\partial V} \nabla u \cdot \nu = \int_V \Delta u.$$

In der zweiten Gleichung haben wir wieder den Gaußschen Satz verwendet. Da  $V$  beliebig war, folgt die Wellengleichung.

*Eindimensionale Wellengleichung.* Der einfachste Fall ist die eindimensionale Wellengleichung, also

$$(2.19) \quad \partial_t^2 u = \partial_x^2 u.$$

Wir wollen wieder ein *Anfangswertproblem* lösen. Wir suchen  $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto u(x, t)$ , so dass

$$(2.20) \quad u(., 0) = u_0, \quad \partial_t u(., 0) = u_1,$$

mit, sagen wir,  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  und  $u_1 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

*Bemerkung:* Die Wellengleichung enthält  $\partial_t^2 u$ , daher schreiben wir (wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen) nicht nur  $u$  am Anfang, sondern auch  $\partial_t u$  am Anfang vor.

Zwei Lösungen der Gleichung (ohne Anfangsbedingungen) lassen sich elementar angeben, nämlich für beliebige  $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(2.21) \quad u(x, t) = \varphi(x + t), \quad u(x, t) = \psi(x - t).$$

Dies folgt durch zweimaliges Differenzieren. Da wir nun zwei 'Elementarlösungen' haben, können wir die zwei Anfangsbedingungen erfüllen.

Wir könnten nun die Lösung angeben und verifizieren, dass tatsächlich eine Lösung gefunden ist. Um jedoch die Formel zu motivieren schreiben wir zunächst die Gleichung in der Form

$$(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u = 0.$$

Daher löst  $v(x, t) := (\partial_t - \partial_x)u(x, t)$  die Gleichung

$$(\partial_t + \partial_x)v = 0, \quad v(., 0) = u_1 - \partial_x u_0.$$

Wie im letzten Abschnitt finden wir eine Lösung, nämlich

$$v(x, t) = [u_1 - \partial_x u_0](x - t).$$

Wir müssen nun die inhomogene Transportgleichung

$$(2.22) \quad (\partial_t - \partial_x)u(x, t) = v(x, t)$$

nach  $u$  auflösen. Wir verwenden dazu die Formel (2.16) und bedenken dabei das umgekehrte Vorzeichen in der Gleichung.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x + t) + \int_0^t v(x + t - s, s) ds \\ &= u_0(x + t) + \int_0^t [u_1 - \partial_x u_0](x + t - 2s) ds \\ &= u_0(x + t) + \frac{1}{2} [u_0(x - t) - u_0(x + t)] + \int_0^t u_1(x + t - 2s) ds \\ &= \frac{1}{2} [u_0(x + t) + u_0(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy. \end{aligned}$$

Die letzte Darstellung ist die d'Alembert-Formel für die eindimensionale Wellengleichung. Man kann durch Einsetzen leicht verifizieren, dass sie tatsächlich eine Lösung liefert.

Wir sehen, dass auch die Wellengleichung die Anfangsdaten  $u_0$  nur transportiert und nicht glättet.



# Verallgemeinerter Lösungsbegriff

## 3. Der Gaußsche Satz

Wir erinnern an die Begriffsbildung beim Gaußschen Satz, insbesondere an Lipschitzgebiete und Randintegrale, und wir wiederholen den Beweis des Satzes. Wir bereiten damit den Gaußschen Satz für Sobolevfunktionen vor und den Spursatz.

Wir lösen partielle Differentialgleichungen auf Teilmengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Wir müssen uns also mit Eigenschaften solcher Mengen beschäftigen.

### Lipschitz-Gebiete.

DEFINITION 3.1. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Wir sagen, dass  $\Omega$  einen Lipschitz-Rand hat, falls zu jedem  $x \in \partial\Omega$  folgendes existiert:

- (1) Koordinaten. Eine  $n-1$ -dimensionale Hyperebene  $H_x$  mit Normalenvektor  $\nu \in \mathbb{R}^n$ ,  $H_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y-x) \cdot \nu = 0\}$ .
- (2) Funktion. Für  $\varepsilon > 0$  und  $H_x^\varepsilon := H_x \cap B_\varepsilon(x)$  eine Lipschitz-Abbildung  $g : H_x^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\eta > 0$ , so dass im Zylinder

$$Z_{\varepsilon,\eta} := H_x^\varepsilon + (-\eta, \eta)\nu \text{ gilt:}$$
$$\Omega \cap Z_{\varepsilon,\eta} = \{y + z\nu \mid y \in H_x^\varepsilon, -\eta < z < g(y)\}.$$

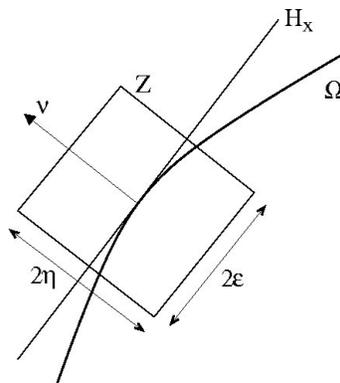


ABBILDUNG 10. Ein Lipschitz Gebiet  $\Omega$  mit einem lokalen Koordinatensystem.

*Bemerkungen.*

- Wenn  $\Omega$  beschränkt ist, so ist  $\partial\Omega$  kompakt. Falls  $\Omega$  einen Lipschitz-Rand hat, so gibt es also eine Überdeckung von  $\partial\Omega$  mit endlich vielen Zylindern  $U_1, \dots, U_m$  wie in der Definition,

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^m U_j.$$

- In Beweisen nehmen wir oft eine offene Menge  $U_0$  mit  $\bar{U}_0 \subset \Omega$  hinzu, die  $\Omega \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_m)$  überdeckt. Dann gilt

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup_{j=0}^m U_j.$$

- Zur Überdeckung  $(U_j)$  existiert eine zugehörige *Teilung der 1*, also  $m+1$  Funktionen der Klasse  $C^\infty$  mit kompakten Trägern,  $\eta_j \in C_c^\infty(U_j)$ ,  $\eta_j : U_j \rightarrow [0, 1]$  mit

$$\sum_{j=0}^m \eta_j(x) = 1 \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

**Randintegrale.** Unser Ziel ist eine Definition von  $\int_\Gamma f$  für  $n-1$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ . Wir beschränken uns auf den Fall, dass  $\Gamma$  lokal Graph einer Lipschitz-Funktion ist (wie  $\partial\Omega$  in Definition 3.1).

Für eine entsprechende Überdeckung von  $\Gamma$  mit Zylindern  $U_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  wählen wir eine zugehörige Teilung der 1,  $\eta_j$ , und setzen

$$(3.1) \quad \int_\Gamma f := \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma \cap U_j} f \eta_j.$$

Damit reicht es, nachfolgend die rechte Seite zu definieren, also Integrale über Graphen.

Sei also im Folgenden  $U$  von der speziellen Form  $U = V \times I$  mit  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$  und  $I = (a, b)$  ein reelles Intervall. Weiterhin sei  $g : V \rightarrow I$  Lipschitz-stetig. Als Graph von  $g$  bezeichnen wir

$$\Gamma := \text{graph}(g) := \{(x, y) : x \in V, y = g(x)\}.$$

Wir werden folgendes Resultat verwenden (für einen Beweis siehe z.B. Evans, Abschnitt 5.8, Theorem 6).

**SATZ 3.2 (Rademacher's Theorem).** *Sei  $g$  Lipschitz-stetig,  $g \in C^{0,1}(V, \mathbb{R})$ , mit Lipschitz-Norm  $\|g\|_{Lip}$ . Dann ist  $g$  fast überall differenzierbar,  $\nabla g$  ist meßbar und es gilt  $\|\nabla g\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{Lip}$ .*

Wir können nun Randintegrale definieren.

**DEFINITION 3.3.** Sei  $\Gamma = \text{graph } g$  für eine Funktion  $g \in C^{0,1}(V, \mathbb{R})$ . Wir nennen eine Funktion  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  meßbar bzw. integrierbar, falls die Verkettung  $x \mapsto f(x, g(x))$  meßbar bzw. integrierbar über  $V$  ist. Wir setzen

$$(3.2) \quad \int_{\Gamma} f := \int_{\Gamma} f d\mathcal{H}^{n-1} := \int_V f(x, g(x)) \sqrt{1 + |\nabla g(x)|^2} d\mathcal{L}^{n-1}(x).$$

Falls  $\Gamma$  eine Vereinigung von Lipschitz Graphen ist, so definieren wir das Integral mit einer Teilung der 1 wie in (3.1).

Bemerkungen zu dieser Definition.

- Satz 3.2 stellt sicher, dass für integrierbares  $f$  auch das Integral von  $(f \circ g) \sqrt{1 + |\nabla g|^2}$  existiert.
- Der  $\sqrt{\quad}$ -Faktor sorgt dafür, dass das Integral unabhängig ist von der Wahl von der Parametrisierung, also von  $V$  und  $g$ . Insbesondere führt eine andere Parametrisierung des Randes auf denselben Begriff der Messbarkeit und der Integrierbarkeit.

Zwei Dinge bleiben zu tun. 1) Wir müssen nachweisen, dass das Integral unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist. 2) Wir wollen eine praktische Methode angeben, wie Integrale ohne eine Teilung der 1 berechnet werden können.

**Berechnung von Integralen mit Parametrisierungen.** Die Graphenkonstruktion liefert einem schnell geeignete Definitionen und ist auch die im Satz von Gauß verwendete Konstruktion. Im allgemeinen wollen wir aber Integrale lieber über allgemeine Parametrisierungen berechnen, nicht immer über Graphen.

*Beispiel:* Für die Kreislinie  $\Gamma := \partial B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$  und eine Funktion  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  wollen wir  $\int_{\Gamma} f$  bestimmen. Dabei wollen wir nicht  $\Gamma$  lokal als Graph schreiben (dazu benötigen wir 3 Graphen, anschließend eine Teilung der 1). Stattdessen parametrisieren wir mit

$$\Phi : \tilde{V} := [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \Phi(t) = (R \cos(t), R \sin(t)).$$

$\Phi$  ist invertierbar als Abbildung  $\Phi : \tilde{V} \rightarrow \Gamma$ . Unser Ziel ist eine Formel

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\tilde{V}} f(\Phi(y)) J(y) dy = \int_0^{2\pi} f(R \cos(t), R \sin(t)) J(t) dt.$$

Dabei müssen wir den richtigen Faktor  $J$  bestimmen.

Es genügt, wenn wir die Situation lokal betrachten. Wir nehmen also an, dass wir  $\Gamma$  als Graph schreiben können,  $\Gamma = \text{graph}(g)$  mit

$g : V \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz. Weiterhin sei uns eine andere Parametrisierung gegeben,

$$\Phi : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Lipschitz, } \tilde{V} \subset \mathbb{R}^{n-1}, \quad \Gamma = \Phi(\tilde{V}), \quad \Phi : \tilde{V} \rightarrow \Gamma \text{ bijektiv.}$$

Wir fordern von  $\Phi$ , dass  $\Phi$  invertierbar ist auf  $\Gamma$  und dass die Wechselabbildung

$$\psi : V \rightarrow \tilde{V}, x \mapsto \Phi^{-1} \circ G(x), \quad G(x) = (x, g(x))$$

Lipschitz-stetig ist.

SATZ 3.4. Für  $\Gamma$  und  $\Phi$  wie oben und  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar gilt

$$(3.3) \quad \int_{\Gamma} f = \int_{\tilde{V}} f \circ \Phi \sqrt{\det D\Phi^T \cdot D\Phi}.$$

BEWEIS. Wir verwenden eine Gleichheit aus der linearen Algebra. Für Matrizen der Form  $A = (a_{ij})$ ,  $a_{ij} = \delta_{ij} + \xi_i \xi_j$  gilt für die Determinante  $\det A = 1 + |\xi|^2$ .

Wir verwenden den  $\mathbb{R}^{n-1}$ -Transformationssatz für die Wechselabbildung  $\psi = \Phi^{-1} \circ G$

$$\int_{\tilde{V}} f \circ \Phi \sqrt{\det D\Phi^T \cdot D\Phi} = \int_V f \circ \Phi \circ \psi \sqrt{\det D\Phi^T \cdot D\Phi} |\det D\psi|.$$

Wir werten nun den Faktor im Integranden aus unter Benutzung von  $\det AB = \det A \det B$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{\det D\Phi^T \cdot D\Phi} |\det D\psi| &= \sqrt{\det D\Phi^T \cdot D\Phi} \sqrt{\det D\psi^T \cdot D\psi} \\ &= \sqrt{\det (D\psi^T D\Phi^T \cdot D\Phi D\psi)} = \sqrt{\det (D(\Phi \circ \psi)^T \cdot D(\Phi \circ \psi))} \\ &= \sqrt{\det DG^T \cdot DG}. \end{aligned}$$

Wir sehen schon hier die Invarianz der Darstellung,

$$\int_{\tilde{V}} f \circ \Phi \sqrt{\det D\Phi^T \cdot D\Phi} = \int_V f \circ G \sqrt{\det DG \cdot DG}.$$

Wenn wir nun noch obige Formel für die Determinante benutzen, so erhalten wir wegen

$$\int_V f \circ G \sqrt{\det DG \cdot DG} = \int_V f \circ G \sqrt{1 + |\nabla g|^2},$$

die ursprüngliche Formel.  $\square$

Insbesondere haben wir mit dem Satz nachgewiesen, dass die Definition des Integrals unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist.

*Im Beispiel der Kreislinie:* Die Parametrisierung der Kreislinie ist  $\Phi : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Phi(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$ . Dann ist  $D\Phi(t) =$

$(-R \sin(t), R \cos(t))$  und  $D\Phi^T \cdot D\Phi = R^2$  (eine  $1 \times 1$ -Matrix). Die Wurzel der Determinante ist  $R$  und wir erhalten  $J = R$ ,

$$\int_{\Gamma} f = \int_0^{2\pi} f(R \cos(t), R \sin(t)) R dt.$$

**Der Satz von Gauß für glatte Integranden.** Wir werden den Normalenvektor an einem Lipschitz-Gebiet mit  $\nu$  bezeichnen. In lokalen Koordinaten mit  $\partial\Omega = \{(x, g(x)) : x \in V\}$  gilt

$$\nu(x, g(x)) = \frac{(-\nabla g, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}.$$

Der Vektor  $\nu$  ist nach dem Theorem von Rademacher fast überall auf dem Rand definiert. Er ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

**SATZ 3.5.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit Lipschitz-Rand,  $u, v \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt für  $i = 1, \dots, n$  und die äußere Normale  $\nu$  an  $\partial\Omega$

$$(3.4) \quad \int_{\Omega} \partial_i u = \int_{\partial\Omega} u e_i \cdot \nu,$$

$$(3.5) \quad \int_{\Omega} u \partial_i v + \partial_i u v = \int_{\partial\Omega} u v e_i \cdot \nu.$$

**BEWEIS.** Die Formel der partiellen Integration (3.5) folgt aus (3.4) durch Einsetzen von  $u \cdot v$  und Produktregel.

*Schritt 1: Reduktion auf Graphen.* Um (3.4) zu zeigen, lokalisieren wir  $u$  mit der Teilung der 1 ( $\eta_j$ ) und schreiben  $u = \sum_j \eta_j u$ . Es reicht dann, (3.4) für Funktionen mit Träger in einem  $U_j$  zu zeigen. Tatsächlich liefert das lokale Ergebnis

$$\int_{\Omega \cap U_j} \partial_i (u \eta_j) = \int_{\partial\Omega \cap U_j} u \cdot \eta_j e_i \cdot \nu,$$

und Summation über  $j$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u e_i \cdot \nu &= \sum_j \int_{\partial\Omega \cap U_j} u \cdot \eta_j e_i \cdot \nu \\ &= \sum_j \int_{\Omega \cap U_j} (\partial_i u \eta_j + u \partial_i \eta_j) = \int_{\Omega} \partial_i u + \int_{\Omega} u \partial_i \sum_j \eta_j = \int_{\Omega} \partial_i u. \end{aligned}$$

*Schritt 2: Beweis für  $C^1$ -Graphen..* Wir können nun  $u$  mit Träger in  $U_j$  betrachten.

Für  $U_0$ : Das Integral  $\int_{U_0} \partial_i u$  verschwindet (Fubini und Hauptsatz der Differentialrechnung).

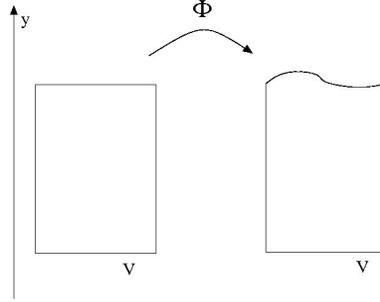


ABBILDUNG 11. Die Gebietstransformation  $\Phi$  transformiert das krummlinig berandete Gebiet  $\Omega$  auf ein Rechteck/Zylinder mit flachem oberem Rand.

Für  $U = U_j$ ,  $j \geq 1$ : Wir haben  $U = V \times I \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $g : V \rightarrow I$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in U : y < g(x)\}$ . Wir nehmen in diesem Schritt an, dass  $g \in C^1$ . Wir erinnern an

$$\nu(x, g(x)) = \frac{(-\nabla g, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}.$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$(3.6) \quad \int_{\Omega} \nabla u = \int_V u(x, g(x)) (-\nabla g(x), 1) dx.$$

Mit diesem Ziel betrachten wir die neue Funktion  $v : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$v(x, y) := u(x, g(x) + y),$$

also  $v = u \circ \Phi$  für  $\Phi : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi(x, y) := (x, g(x) + y)$ . Wir werden die Transformationsformel verwenden, um  $\Omega$ -Integrale von  $u$  als Integrale von  $v$  über  $\Sigma := V \times (-\infty, 0)$  zu schreiben. Die auftauchende Determinante ist

$$\det D\Phi = \det \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ \nabla g & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Wegen eindimensionaler partieller Integration gilt

$$\int_{\Sigma} \partial_i v = 0 \quad \text{für } i \leq n-1, \quad \text{und} \quad \int_{\Sigma} \partial_n v = \int_{V \times \{0\}} v.$$

Daraus folgt mittels Transformationsformel und nochmaliger eindimensionaler partieller Integration das Ergebnis. Wir schreiben das erste

Integral um zu

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Sigma} \partial_i v \\
 &= \int_{\Sigma} \partial_i u(x, g(x) + y) \, dx \, dy + \int_{\Sigma} \partial_n u(x, g(x) + y) \cdot \partial_i g(x) \, dx \, dy \\
 &= \int_{\Omega} \partial_i u + \int_V \int_{-\infty}^0 \partial_n v \cdot \partial_i g \\
 &= \int_{\Omega} \partial_i u + \int_V v(x, 0) \cdot \partial_i g(x) \, dx,
 \end{aligned}$$

wegen  $v(x, 0) = u(x, g(x))$  also das Ergebnis in Richtung  $i \leq n - 1$ . Für die vertikale Richtung rechnen wir

$$\int_V u(x, g(x)) \, dx = \int_{V \times \{0\}} v = \int_{\Sigma} \partial_n v = \int_{\Omega} \partial_n u.$$

*Schritt 3: Beweis für Lipschitz-Graphen..* Wir approximieren ein allgemeines  $g \in \text{Lip}(V, \mathbb{R})$  durch  $C^1$ -Funktionen  $g_k$ . Die Approximation wählen wir mit  $g_k \rightarrow g$  in  $C^0$  und  $\nabla g_k \rightarrow \nabla g$  in  $L^2(V)$  (Existenz nach Satz 5.2 unten, angewendet auf  $g \in W^{1,2}$ ). Für jedes  $g_k$  und die Gebiete  $\Omega_k = \{(x, y) | y < g_k(x)\}$  zu  $g_k$  gilt das lokale Resultat (3.6) nach Schritt 2,

$$\int_{\Omega_k} \nabla u = \int_V u(x, g_k(x)) (-\nabla g_k(x), 1) \, dx.$$

Für  $k \rightarrow \infty$  konvergieren auf der linken Seite die Integrationsgebiete gleichmäßig und  $\nabla u$  ist beschränkt, auf der rechten Seite konvergiert  $u(\cdot, g_k(\cdot)) \rightarrow u(\cdot, g(\cdot))$  gleichmäßig und  $\nabla g_k \rightarrow \nabla g$  in  $L^2(V)$ . Wir können auf beiden Seiten zum Limes übergehen und erhalten lokal

$$\int_{\Omega} \nabla u = \int_V u(x, g(x)) (-\nabla g(x), 1) \, dx.$$

Addition der lokalen Ergebnisse liefert den Satz von Gauß.  $\square$

## 4. Distributionen

Hier sei immer  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, nicht notwendig beschränkt.

**Frage:** Wann ist  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der Gleichung  $\Delta u = f$ ?

Sicherlich ist die Gleichung erfüllt, falls  $u \in C^2$ ,  $f \in C^0$  und die Gleichung  $\Delta u(x) = f(x)$  in jedem Punkt  $x \in \Omega$  gilt. Wir wollen aber gerne einen allgemeineren Lösungsbegriff haben, zum Beispiel wollen

wir für eine Funktion  $f$  mit Sprüngen,  $f \in L^2(\Omega)$  lösen. Dann wird  $u$  im Allgemeinen auch nicht von der Klasse  $C^2$  sein.

DEFINITION 4.1 (Testfunktionen  $\mathcal{D}$ ). Wir setzen

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega),$$

die unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in  $\Omega$ .

**Grundidee:** Wir können eine beliebige  $L^1(\Omega)$ -Funktion  $f$  auffassen als eine Linearform  $\langle f \rangle$  auf dem Raum  $\mathcal{D}$ . Wir identifizieren  $f$  mit

$$\langle f \rangle : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \int_{\Omega} f \cdot \varphi.$$

Jedes  $f \in L^1(\Omega)$  definiert eine solche Form (es reicht die lokale Integrierbarkeit,  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ). Auch umgekehrt gilt: Falls für  $f, g \in L^1(\Omega)$  die Formen übereinstimmen,  $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ , dann gilt schon  $f = g$ . Eine mit einer  $L^1$ -Funktion darstellbare Linearform hat also eine eindeutige Darstellung.

### Erste Definitionen.

DEFINITION 4.2 (Distributionen  $\mathcal{D}'$ ).  $u$  heißt eine Distribution und wir schreiben  $u \in \mathcal{D}'$ , falls

- (1)  $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  linear
- (2)  $\forall K \subset \Omega$  kompakt  $\exists c = c(K), m = m(K)$ :

$$(4.1) \quad |u(\varphi)| \leq c \|\varphi\|_{C^m} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \text{supp}(\varphi) \subset K.$$

Beispiele:

(i) *Funktionen.* Für  $f \in L^1(\Omega)$  ist  $\langle f \rangle$  linear auf  $\mathcal{D}$ . Die Abschätzung (4.1) ist mit  $c = \|f\|_{L^1}$  und  $m = 0$  für alle  $K$  erfüllt:

$$|\langle f \rangle(\varphi)| = \left| \int_{\Omega} f \cdot \varphi \right| \leq \sup |\varphi| \int_{\Omega} |f| = \|\varphi\|_{C^0} \|f\|_{L^1}.$$

Notation: Für ein  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  schreiben wir  $\langle f \rangle$  für die zugehörige Distribution  $\langle f \rangle \in \mathcal{D}'$ . Später werden wir allerdings oft für beide Objekte nur  $f$  schreiben.

(ii) *Die Dirac-Distribution.* Für  $a \in \Omega$  ist die Abbildung

$$(4.2) \quad \delta_a : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \varphi(a)$$

eine Distribution. Linearität ist klar. Die Abschätzung ist wieder mit  $m = 0$  und für  $c = 1$ ,

$$|\delta_a(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{C^0}.$$

Distributionen mit  $m = 0$  nennt man auch Distributionen 0-ter Ordnung.

(iii) Eine Distribution erster Ordnung. Für  $a \in \Omega$  und  $k \leq n$  ist die Abbildung

$$\varepsilon_a : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi(a)$$

eine Distribution erster Ordnung.

**Ableitungen von Distributionen.** Warum sind Distributionen als Lösungen geeignet? Weil wir immer differenzieren können!

DEFINITION 4.3 (Ableitungen). Für eine Distribution  $u$  und einen Richtungsvektor  $e_k \in \mathbb{R}^n$  definieren wir die Ableitung in  $k$ -te Richtung,  $\partial_k u$ , durch

$$(4.3) \quad \partial_k u \in \mathcal{D}', \quad (\partial_k u)(\varphi) = u(-\partial_k \varphi).$$

Man sieht sofort, dass wir tatsächlich  $\partial_k u \in \mathcal{D}'$  definieren: (1)  $\partial_k u$  ist linear. (2) wenn auf  $K \subset \Omega$  die Distribution  $u$  die Abschätzung (4.1) mit  $c$  und  $m$  erfüllt, dann erfüllt  $\partial_k u$  dieselbe Abschätzung mit  $c$  und  $m + 1$ .

Beispiel: In Beispiel (iii) war die Distribution  $\varepsilon_a$  gerade  $\varepsilon_a = -\partial_k \delta_a$ .

Durch Iteration haben wir damit auch automatisch höhere Ableitungen definiert. Für einen Multiindex  $\alpha$  gilt

$$D^\alpha u(\varphi) = u((-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi).$$

Ist dies noch die gewohnte Ableitung? Wir werden später oft nicht zwischen einer Funktion  $f$  und der zugehörigen Distribution  $\langle f \rangle$  unterscheiden. Dazu müssen wir aber sicherstellen, dass zumindest für  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  gilt

$$\langle \partial_k f \rangle = \partial_k \langle f \rangle.$$

Tatsächlich gilt für  $\varphi \in \mathcal{D}$  für linke und rechte Seite

$$\begin{aligned} \langle \partial_k f \rangle (\varphi) &= \int_{\Omega} \partial_k f \varphi, \\ \partial_k \langle f \rangle (\varphi) &= - \langle f \rangle (\partial_k \varphi) = - \int_{\Omega} f \partial_k \varphi. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Gauß (der Randterm verschwindet!) stimmen also beide Seiten überein. Wir können also Funktionen mit den zugehörigen Distributionen identifizieren.

Beispiel: Ableitung der Heavyside Sprungfunktion. Sei  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion

$$(4.4) \quad H(x) := \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\partial_x H = \delta_0.$$

Wir bemerken hierzu, dass wir in  $\mathbb{R}^1$  meist  $\partial_x$  statt  $\partial_1$  schreiben. In obiger Formel haben wir bereits Funktion und Distribution identifiziert, denn im klassischen Sinne hat  $H$  keine Ableitung in der 0. Tatsächlich gilt

$$\partial_x H(\varphi) = - \int_{\mathbb{R}} H(x) \partial_x \varphi(x) dx = - \int_0^{\infty} \partial_x \varphi(x) dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

*Beispiel: Lösung der Transportgleichung.* Wir behaupten, dass für  $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  die Funktion  $u(x, t) = u_0(x - t)$  in  $Q := \mathbb{R} \times (0, \infty)$  tatsächlich die Transportgleichung  $\partial_t u + \partial_x u = 0$  im Distributionssinne löst. Wir berechnen für  $\varphi \in C_c^\infty(Q)$  und die Funktion  $\psi(z, t) := \varphi(z + t, t)$

$$\begin{aligned} - \langle \partial_t u + \partial_x u \rangle (\varphi) &= \int_Q u (\partial_t \varphi + \partial_x \varphi) \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(x - t) (\partial_t \varphi + \partial_x \varphi)(x, t) dx dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(z) (\partial_t \varphi + \partial_x \varphi)(z + t, t) dz dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(z) \partial_t \psi(z, t) dz dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_0(z) \int_0^{\infty} \partial_t \psi(z, t) dt dz = 0. \end{aligned}$$

### Konvergenz von Distributionen.

DEFINITION 4.4. Für eine Folge von Distributionen  $u_j$  und  $u$  eine Distribution definieren wir Konvergenz durch

$$(4.5) \quad u_j \rightarrow u : \iff u_j(\varphi) \rightarrow u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

*Beispiele:* (i) Seien  $H_{a_j}$  um  $a_j$  verschobene Heavysidefunktionen,  $\mathbb{R} \ni a_j \rightarrow a$ . Dann gilt  $H_{a_j} \rightarrow H_a$ . Dieses Beispiel zeigt, dass die zugehörige Funktionenfolge nicht in  $C^0$  konvergieren muß. Wir haben eine sogenannte *schwache Konvergenz* eingeführt, weil wir nur auf festen Testfunktionen die Konvergenz fordern.

(ii) Für  $\Omega \ni a_j \rightarrow a \in \Omega$  gilt  $\delta_{a_j} \rightarrow \delta_a$ .

(iii) Sei  $u_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_k(x) = \sin(kx)$ , wir betrachten  $k \rightarrow \infty$ . Es gilt  $u_k \in \mathcal{D}'$ . Wir behaupten, dass  $u_k \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}'$ . Tatsächlich gilt

$$u_k(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \sin(kx) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k} \cos(kx) \varphi'(x) dx \rightarrow 0.$$

*Wichtige Bemerkung.* Die Ableitung  $\partial_k$  ist stetig bezüglich der Konvergenz: Für Distributionen  $u_j \rightarrow u$  gilt  $\partial_k u_j \rightarrow \partial_k u$ , denn

$$\partial_k u_j(\varphi) = -u_j(\partial_k \varphi) \rightarrow -u(\partial_k \varphi) = \partial_k u(\varphi).$$

**Dirac-Folgen.** Wir betrachten eine Funktion  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$ . Wir stauchen nun diese Funktion in geeigneter Weise und definieren

$$\psi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Die Skalierung ist so gewählt, dass das Integral erhalten bleibt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n} \psi(z) \varepsilon^n dz = 1.$$

Eine solche Folge  $\psi_\varepsilon$  heißt *Dirac-Folge*.

**SATZ 4.5.** *Für Dirac-Folgen gilt*

$$(4.6) \quad \langle \psi_\varepsilon \rangle \rightarrow \delta_0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

*im Distributionssinne.*

**BEWEIS.** Für  $\varphi \in \mathcal{D}$  schreiben wir

$$\begin{aligned} \langle \psi_\varepsilon \rangle(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x) \frac{dx}{\varepsilon^n} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \varphi(\varepsilon y) dy. \end{aligned}$$

Wir haben die punktweise Konvergenz  $\psi(y) \varphi(\varepsilon y) \rightarrow \psi(y) \varphi(0)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und die Majorante  $\psi(\cdot) \varphi(\varepsilon \cdot) \leq M \psi(\cdot)$  für  $M := \sup \varphi$ , also auch Konvergenz der Integrale,

$$\langle \psi_\varepsilon \rangle(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \varphi(\varepsilon y) dy \rightarrow \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) dy = \varphi(0).$$

Dies war zu zeigen.  $\square$

**Faltung.** In Anwendungen hat man oft eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die man glätten möchte. Man wählt dann eine glatte Funktion  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  wie oben und ersetzt den Wert  $f(x)$  durch

$$(4.7) \quad f_\varepsilon(x) := \langle \psi_\varepsilon \rangle(f(x - \cdot)) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y) f(x - y) dy.$$

Man ersetzt also  $f$  durch (gewichtete) Mittelwerte über eine Umgebung. Das Ergebnis ist tatsächlich eine glatte Funktion, wie man durch die Transformationsformel sieht. Man schreibt den Ausdruck als

$$(4.8) \quad f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \psi_\varepsilon(x - z) dz,$$

und sieht, dass  $f_\varepsilon$  nur über die glatte Funktion  $\psi_\varepsilon$  eine  $x$ -Abhängigkeit hat. Vergleiche Regularität von harmonischen Funktionen in 2.4. Der Ausdruck in (4.8) hat wegen seiner Wichtigkeit einen eigenen Namen, er wird als *Faltung* bezeichnet,

$$(4.9) \quad f * \psi(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \psi(x - z) dz.$$

Wir wollen nicht näher auf die Theorie von Faltungen eingehen, sondern werden  $f * \psi$  als Abkürzung für den obigen Ausdruck schreiben, falls er definiert ist. Dies ist z.B. der Fall für  $f \in L^1$  und  $\psi \in L^\infty$ .

Ein wichtiges Theorem aus der Funktionalanalysis zur Faltung mit Diracfolgen lautet wie folgt.

**SATZ 4.6.** *Sei  $f \in L^p(\Omega)$  mit  $p \in [1, \infty)$  und  $\psi_\varepsilon$  eine Diracfolge mit  $0 \leq \psi \in C_c^\infty$ . Dann ist  $f * \psi_\varepsilon$  ein Familie von  $C^\infty$ -Funktionen mit*

$$\|f - f * \psi_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Für einen Beweis siehe z.B. Alt, Satz 2.10.

**Faltung für Distributionen.** Seien  $f \in \mathcal{D}'$  und  $\psi \in \mathcal{D}$ . Dann können wir setzen

$$f * \psi(x) := \langle f \rangle (\psi(x - \cdot)).$$

Mit dieser Definition stimmt die Faltung im Falle von *Funktionen*  $\psi$  mit obiger Faltung überein.

**SATZ 4.7** (Approximation von Distributionen). *Sei  $\psi_\varepsilon$  eine Dirac-Folge zu  $0 \leq \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt*

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) \ni f * \psi_\varepsilon \rightarrow f \text{ als Distributionen in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

**BEWEISSKIZZE.** Die Glattheit der Faltung ist eine Konsequenz der Tatsache, dass die Ableitung auf die Testfunktion fällt,

$$\partial_i(f * \psi_\varepsilon)(x) = \langle f \rangle (\partial_i \psi_\varepsilon(x - \cdot)).$$

Also sind alle Ableitungen endlich. Für einen echten Beweis betrachtet man die Differenzenquotienten.

Zur Approximation: Wir betrachten  $\varphi \in \mathcal{D} = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt (mit Integralen über  $\mathbb{R}^n$ ),

$$\begin{aligned} (f * \psi_\varepsilon)(\varphi) &= \int f(\psi_\varepsilon(x - \cdot))\varphi(x) dx \\ &= f \left( \int \psi_\varepsilon(x - \cdot)\varphi(x) dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f \left( \int \psi_\varepsilon(x) \varphi(x + \cdot) dx \right) \\
&= \int f(\varphi(x + \cdot)) \psi_\varepsilon(x) dx \rightarrow f(\varphi).
\end{aligned}$$

Für einen vollständigen Beweis muss man mit Hilfe von Riemann-Summen nachweisen, dass in obiger Rechnung die Anwendung der Distribution mit dem Integral vertauscht (Linearität der Distribution). Im letzten Schritt nutzt man die stetige Abhängigkeit von  $f(\varphi(x + \cdot))$  von  $x$ . Dies ist eine Konsequenz der Differenzierbarkeit aus dem ersten Beweisschritt.  $\square$

*Wir merken uns:*

- $\mathcal{D}'$  ist ein Raum verallgemeinerter Funktionen
- $\mathcal{D}'$  ist ein topologischer Vektorraum
- Es gibt Ableitungsoperatoren  $\partial_k : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ , die die gewöhnliche Ableitung verallgemeinern
- $C^\infty \subset \mathcal{D}'$  ist dicht

Erklärungen: Der Raum  $\mathcal{D}'$  ist ein Raum verallgemeinerter Funktionen, denn integrierbare Funktionen können mit Elementen aus  $\mathcal{D}'$  identifiziert werden. Andererseits enthält aber  $\mathcal{D}'$  Elemente, die nicht mit einer Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  identifiziert werden können (z.B.  $\delta_a$ ).  $\mathcal{D}'$  ist ein reeller Vektorraum (es gibt eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen), zudem hat  $\mathcal{D}'$  einen Konvergenzbegriff, also eine Topologie. Der Raum  $C^\infty$  ist dicht enthalten in  $\mathcal{D}'$ , denn jede Distribution lässt sich (bezüglich der Topologie der Distributionen) beliebig gut mit  $C^\infty$ -Funktionen approximieren (Faltung mit einer glatten Dirac-Folge).

## 5. Sobolevräume

Wir führen den Banachraum  $W^{k,p}$  von solchen  $L^p$ -Funktionen ein, deren  $k$ -fache distributionelle Ableitung wieder in  $L^p$  ist. Wir werden Lösungen von partiellen Differenzialgleichungen in diesen Räumen finden. Besonders wichtig ist der Raum zum Index  $p = 2$ . Er wird abgekürzt bezeichnet mit  $H^k := W^{k,2}$ .

### Definition des Raumes $W^{k,p}$ .

DEFINITION 5.1. Für  $k \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$  definieren wir den Sobolevraum  $W^{k,p}$  als

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\},$$

mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Dabei ist folgendes gemeint: Als  $L^p$ -Funktion ist  $u$  insbesondere eine  $L^1_{loc}$ -Funktion und definiert eine Distribution. Damit existieren auch die Ableitungen  $D^\alpha u$  als Distributionen. Mit der Aussage  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$  ist gemeint: Die Distribution  $D^\alpha u \in \mathcal{D}'$  kann dargestellt werden durch eine Funktion in  $L^p(\Omega)$ .

Elemente in  $W^{k,p}(\Omega)$  kann man addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren, wir haben also einen Vektorraum. Die angegebene Norm erfüllt die Dreiecksungleichung und verschwindet nur in der 0, ist also tatsächlich eine Norm.

Wir stellen nun fest, dass der Raum vollständig ist. Tatsächlich, falls  $u_j$  Cauchy-Folge in  $W^{k,p}$ , so ist  $u_j$  Cauchy-Folge in  $L^p$  und hat einen Limes  $u$ , aber nach Definition der Norm sind auch alle Ableitungen  $D^\alpha u_j$  Cauchy-Folgen in  $L^p$  und haben Limiten  $v_\alpha$  (Vollständigkeit von  $L^p$ ). Wegen der Vertauschbarkeit von Ableitung und Distributionskonvergenz gilt

$$v_\alpha \leftarrow D^\alpha u_j \rightarrow D^\alpha u \quad \text{in } \mathcal{D}',$$

insbesondere ist also die Distributionsableitung  $D^\alpha u$  darstellbar durch die  $L^p$ -Funktion  $v_\alpha$ . Wir schließen, dass  $u$  eine  $W^{k,p}$ -Funktion ist.

Wir haben damit gesehen, dass  $W^{k,p}$  für  $k \in \mathbb{N}$  und  $p \in [1, \infty]$  ein vollständiger, normierter Vektorraum ist, also ein **Banachraum**.

*Beispiele:* (i) Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt gilt  $C^k(\bar{\Omega}) \subset W^{k,p}(\Omega)$ .  
(ii) Die Funktion  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$  ist in  $W^{k,p}$  für jedes  $k$  und jedes  $p$ . Begründung:  $f$  stimmt fast überall mit der Funktion  $\tilde{f} \equiv 1$  überein. In  $L^p$  wird also zwischen  $f$  und  $\tilde{f}$  nicht unterschieden. Auch die Distributionsableitung ändert sich nicht bei Abänderung auf einer Nullmenge.

(iii) Für das Intervall  $\Omega = (0, 1)$  und  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  gilt  $f \in W^{1,p}$  für  $p < 2$ , und  $f \notin W^{1,p}$  für  $p \geq 2$ . Begründung:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad |f'(x)|^p = 2^{-p}|x|^{-p/2},$$

und daher

$$\int_0^1 |f'|^p < \infty \text{ genau dann, wenn } p < 2.$$

### Dichtheit glatter Funktionen.

**SATZ 5.2** (Dichtheit von  $C^\infty$  in  $W^{k,p}$ ). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in W^{k,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Dann gilt:*

- a) Für  $D \subset \Omega$  mit  $\text{dist}(D, \partial\Omega) > 0$  und eine  $C_c^\infty$ -Dirac-Folge  $\psi_j$  konvergieren die  $C^\infty$ -Funktionen  $f_j := f * \psi_j$  in  $D$ ,

$$\|f - f_j\|_{W^{k,p}(D)} \rightarrow 0.$$

- b) Falls  $\Omega$  einen Lipschitz-Rand hat, dann existiert  $\tilde{f}_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , so dass  $f_j = \tilde{f}_j|_\Omega$  auf  $\Omega$  konvergiert,

$$\|f - f_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

- c) Für allgemeines  $\Omega$  gibt es Funktionen  $f_j \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$  mit  $\|f - f_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0$ .

BEWEISSKIZZE. a) Für  $g \in L^p$  approximiert  $g * \psi_j$  die Funktion  $g$  in  $L^p$  (jedenfalls dort, wo  $g * \psi_j$  definiert werden kann, also weg vom Rand). Dann folgt sofort a), denn für die Approximation  $f_j := f * \psi_j \rightarrow f$  gilt

$$\nabla(f * \psi_j) = (\nabla f) * \psi_j \rightarrow \nabla f \quad \text{in } L^p,$$

und ebenso für höhere Ableitungen.

b) Man kann man lokal die Funktion  $f$  'nach oben verschieben', so dass sie auch ausserhalb des Gebietes  $\Omega$  noch definiert ist. Die Approximation aus a) funktioniert dann im gesamten Gebiet. Für  $j \rightarrow \infty$  wird die Verschiebung von  $f$  immer kleiner gewählt; im Raum  $L^p$  verschwinden dann im Limes die Fehler durch die Verschiebung.

c) Hier schöpft man das Gebiet  $\Omega$  mit einer abzählbaren Familie offener Mengen  $U_k$  aus,  $\bar{U}_k \subset \Omega$  und  $\bigcup_k U_k = \Omega$ . Man lokalisiert mit einer Teilung der 1 und approximiert in jedem  $U_k$  die abgeschnittene Funktion. Dies ist in jedem  $U_k$  dann eine 'innere Approximation'.  $\square$

Für Beweise siehe z.B. Alt, 1.21 und 2.10. Der Satz erlaubt es, die Sobolevräume als Vervollständigung der glatten ( $C^\infty$ -) Funktionen bezüglich der Sobolevnorm zu charakterisieren.

Warnung: Der Satz gilt nicht für  $p = \infty$ .

Als eine typische Anwendung der Dichtheit zeigen wir die Produktregel für Sobolevfunktionen. Für  $v, w \in W^{1,2}(\Omega)$  behaupten wir, dass gilt:  $vw \in W^{1,1}(\Omega)$  und

$$(5.1) \quad \nabla(vw) = \nabla v w + v \nabla w.$$

Um dies zu zeigen wählen wir glatte Approximationen  $v_k \rightarrow v$  und  $w_k \rightarrow w$ , beide Konvergenzen in  $W^{1,2}(\Omega)$ . Die Produktregel gilt für glatte Funktionen, also

$$\nabla(v_k w_k) = \nabla v_k w_k + v_k \nabla w_k.$$

Wir betrachten  $u_k := v_k w_k$ , so dass  $u_k \rightarrow u := vw$  in  $L^1(\Omega)$ . Die rechte Seite in obiger Gleichung konvergiert ebenfalls, also

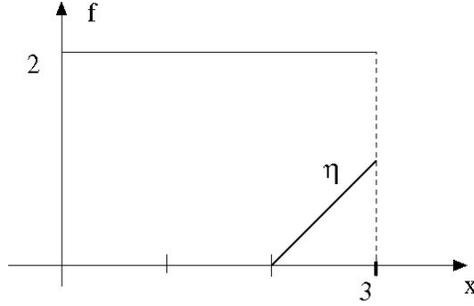


ABBILDUNG 12. Zur Illustration des Spursatzes. Die Funktion ist konstant gleich 2 fast überall. Insofern sollte der Randwert am rechten Rand gleich 2 sein. Die Punktauswertung liefert dies jedoch nicht.

$\nabla u_k \rightarrow \nabla v w + v \nabla w$  in  $L^1(\Omega)$ . Wegen Vollständigkeit von  $W^{1,1}$  ist dann  $u \in W^{1,1}(\Omega)$  mit der gewünschten Ableitung.

### Der Spursatz: Randwerte von Sobolevfunktionen.

*Beispiel.* Wir betrachten die Funktion  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2$  für alle  $x \in [0, 3)$  und  $f(3) = 0$ . Da die Funktion fast überall mit  $\tilde{f} \equiv 2$  übereinstimmt, ist die Funktion eine  $W^{1,1}([0, 3], \mathbb{R})$ -Funktion.

**Frage:** Was ist der Randwert  $f|_{x=3}$ ?

1. *Versuch.* Falls wir  $f$  einfach in  $x = 3$  auswerten, so erhalten wir die Antwort 0, aber wir wollen gerne  $f|_{x=3} = \tilde{f}|_{x=3} = 2$  erhalten.

2. *Versuch.* Wir integrieren die Ableitung, setzen also  $f|_{x=3} = f(0) + \int_0^3 f'(x) dx$ . Damit haben wir allerdings nur das Problem verlagert, denn die Punktauswertung in 0 ist auch nicht wohldefiniert.

3. *Versuch und Lösung.* Wir wählen eine Abschneidefunktion  $\eta : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\eta(3) = 1$ , aber mit  $\eta(0) = 0$ . Hier können wir zum Beispiel  $\eta(x) = (x - 2)_+$  wählen. Wir definieren nun

$$f|_{x=3} := \int_0^3 \partial_x(f\eta) = \int_0^3 f \partial_x \eta + \partial_x f \eta.$$

Dies ist wohldefiniert, da  $f$  und  $\partial_x f$  beide  $L^1$ -Funktionen sind. Im obigen Fall erhalten wir

$$f|_{x=3} = \int_0^3 2\partial_x \eta + 0\eta = 2 \int_2^3 \partial_x \eta = 2,$$

wie gewünscht.

Wir wollen im nächsten Satz festhalten, dass man mit diesem Verfahren jeder Sobolev-Funktion Randwerte, die sogenannte Spur, zuordnen kann.

**SATZ 5.3 (Spursatz).** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit Lipschitz-Rand. Dann haben Sobolev-Funktionen  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$  Randwerte in folgendem Sinne: Es gibt einen eindeutig bestimmten stetigen linearen Operator*

$$\text{Spur} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega),$$

*der auf Funktionen  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$  mit der klassischen Spur  $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$  übereinstimmt.*

Für den Beweis vergleiche auch Alt, A5.7.

**BEWEIS.** *Definition durch Lokalisieren.* Es genügt, folgende lokale Situation zu betrachten:  $\Omega = \{(x, y) | x \in V, y < g(x)\}$  mit  $g : V \rightarrow (a, b)$  Lipschitz. In dieser Situation definieren wir für  $u \in C_0^\infty(V \times (a, b))$

$$(5.2) \quad \text{Spur } u(x, g(x)) := \int_a^{g(x)} \partial_y u(x, y) dy.$$

Dieser Operator ist linear und stimmt für glatte Funktionen mit der klassischen Spur überein.

*Abschätzung.* Für die Abschätzung (also die Stetigkeit des Operators) rechnen wir die Beschränktheit nach:

$$\begin{aligned} \int_V |\text{Spur } u(x, g(x))|^p dx &= \int_V \left| \int_a^{g(x)} \partial_y u(x, y) dy \right|^p dx \\ &\leq C \int_V \int_a^{g(x)} |\partial_y u(x, y)|^p dy dx \leq C \|u\|_{W^{1,p}}^p, \end{aligned}$$

wobei wir die Hölder-Ungleichung  $\|f\|_{L^1}^p \leq \|f\|_{L^p}^p \|1\|_{L^{p'}}^p$  benutzt haben.

*Fortsetzung des Operators auf  $W^{1,p}$ .* Mit Obigem haben wir einen auf  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  definierten Operator Spur, der als Abbildung  $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$  stetig ist. Für ein beliebiges  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  definieren wir die Spur nun über die Dichtheit. Nach Satz 5.2 b) gibt es  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\Omega)$ ,

so dass die Spur von  $u_\varepsilon$  definiert ist. Wegen der Linearität und der Stetigkeit der Spur gilt

$$\|\text{Spur } u_{\varepsilon_1} - \text{Spur } u_{\varepsilon_2}\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Also bilden die entsprechenden Spuren eine Cauchy-Folge und haben (wegen der Vollständigkeit von  $L^p$ ) einen Limes. Mit Spur  $u$  bezeichnen wir diesen Limes.  $\square$

*Bemerkung.* Im letzten Beweisschritt haben wir ein sehr allgemeines Prinzip kennengelernt: Falls ein linearer Operator auf einer dichten Teilmenge eines Banachraumes definiert ist, und falls der Operator die Stetigkeits-Abschätzung erfüllt, so existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung des Operators auf den Banachraum.

*Beispiel.* Um den Spursatz gut zu verstehen, sollte man sich überlegen, dass man ohne eine Kontrolle der Ableitungen *keine* Spur definieren kann. Für  $\Omega = (0, 1)$  gilt: Es gibt keinen stetigen Operator

$$\text{Spur} : L^2([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $\text{Spur}(u) = u(1)$  für  $u \in C^0([0, 1])$ . Beweis: Die Folge  $u_\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_\varepsilon(x) = (x - (1 - \varepsilon))_+$  ist stetig bis zum Rand, andererseits gilt  $u_\varepsilon \rightarrow 0$  in  $L^2([0, 1])$ . Also

$$1 = u_\varepsilon(1) = \text{Spur } u_\varepsilon \xrightarrow{!} \text{Spur } u = 0,$$

ein Widerspruch. Wichtig war in dieser Rechnung die Stetigkeit des Spuroperators, den wir in der Konvergenz ausgenutzt haben.

Man kann auch direkt Sobolevräume konstruieren, in denen die Randwerte vorgegeben sind (und benötigt dafür nicht die Lipschitz-Stetigkeit des Randes). Alle glatten Funktionen mit kompaktem Träger in  $\Omega$  haben Randwerte 0. Wenn wir eine Funktion  $f$  mit solchen Funktionen approximieren können, dann können wir sagen, dass auch  $f$  verschwindende Randwerte hat (Stetigkeit des Spuroperators im Spursatz).

DEFINITION 5.4 (Sobolevfunktionen mit Nullrandwerten). *Für  $p < \infty$  setzen wir*

$$(5.3) \quad W_0^{k,p}(\Omega) := \{f \in W^{k,p}(\Omega) : \exists f_j \in C_c^\infty(\Omega), \|f - f_j\|_{W^{k,p}} \rightarrow 0\}.$$

Wir verwenden die  $W^{k,p}(\Omega)$ -Norm auch auf  $W_0^{k,p}(\Omega)$ . Der Raum  $W_0^{k,p}(\Omega)$  ist ebenfalls ein vollständiger normierter Vektorraum, also ein Banachraum. Zur Vollständigkeit: für  $u_j$  Cauchy-Folge in  $W_0^{k,p}$  finden wir  $u := \lim_j u_j$  in  $W^{k,p}$ , und die Funktionen  $f_j \in C_c^\infty$ ,  $\|u_j - f_j\| \leq 1/j$ , approximieren auch  $u$ .

Für  $\Omega$  mit Lipschitz-Rand liefert der Spursatz insbesondere, dass  $\text{Spur } u = 0$  für jedes  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Es gilt aber auch die Umkehrung (z.B. Alt, A5.11).

LEMMA 5.5. *Für  $\Omega$  mit Lipschitz-Rand kann der Raum  $W_0^{1,p}(\Omega)$  charakterisiert werden als*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \text{Spur } u = 0\}.$$

Zur Notation. Die Räume  $W^{k,p}$  stimmen mit Räumen  $H^{k,p}$  überein, die zunächst anders definiert wurden. Im Fall, dass  $k$  keine ganze Zahl ist, stimmen die Räume nicht mehr überein, aber wir betrachten hier diesen Fall nicht. Wir können also überall statt  $W^{k,p}$  auch  $H^{k,p}$  schreiben. Wir wollen die Notation mit  $H$  insbesondere im Falle  $p = 2$  benutzen und schreiben dann

$$H^k(\Omega) = H^{k,2}(\Omega) = W^{k,2}(\Omega).$$

**Der Satz von Gauß für Sobolevfunktionen.** Der Satz von Gauß 3.5 gilt in der obigen Form weiterhin, selbst wenn  $u$  und  $v$  nur Sobolevfunktionen sind.

SATZ 5.6. *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit Lipschitz-Rand,  $u \in W^{1,1}(\Omega)$ ,  $v, w \in W^{1,2}(\Omega)$ . Dann gilt für  $i = 1, \dots, n$  und die äußere Normale  $\nu$  an  $\partial\Omega$*

$$(5.4) \quad \int_{\Omega} \partial_i u = \int_{\partial\Omega} u e_i \cdot \nu,$$

$$(5.5) \quad \int_{\Omega} v \partial_i w + \partial_i v w = \int_{\partial\Omega} v w e_i \cdot \nu.$$

*Dabei wird auf der rechten Seite die Spur der Funktion integriert.*

*Idee:* Nach Satz 3.5 gilt die Aussage für glatte Funktionen. Wegen der Dichtheit der glatten Funktionen gilt die Aussage dann auch für Sobolevfunktionen.

BEWEIS. Wir beginnen mit der Beobachtung, dass

$$\text{Spur}(vw) = \text{Spur}(v)\text{Spur}(w).$$

Tatsächlich gilt für Funktionen  $v_k, w_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $v_k \rightarrow v$  und  $w_k \rightarrow w$  in  $W^{1,2}(\Omega)$  die Gleichung

$$\text{Spur}(v_k w_k) = \text{Spur}(v_k)\text{Spur}(w_k).$$

Wegen der Stetigkeit der Spur konvergiert die linke Seite in  $L^1(\partial\Omega)$  gegen  $\text{Spur}(vw)$ , die rechte Seite gegen  $\text{Spur}(v)\text{Spur}(w)$ . Wir können die rechte Seite in (5.5) also sowohl als Produkt der Spuren, wie auch als Spur des Produktes lesen.

Wir haben schon gesehen, dass für  $v, w \in W^{1,2}(\Omega)$  gilt dass  $v \cdot w \in W^{1,1}(\Omega)$  und  $\nabla(v \cdot w) = v\nabla w + w\nabla v$ . Insbesondere reicht es, (5.4) zu beweisen. Die Anwendung von (5.4) auf  $u = vw$  liefert (5.5).

Beweis von (5.4): Nach Satz 5.2 kann  $u$  approximiert werden durch  $u_k|_{\Omega} \rightarrow u$  in  $W^{1,1}(\Omega)$ ,  $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Für alle  $u_k$  gilt Formel (5.4) nach Satz 3.5. Auf der linken Seite können wir den Limes  $k \rightarrow \infty$  bilden, denn  $\nabla u_k|_{\Omega}$  konvergiert in  $L^1(\Omega)$  gegen  $\nabla u$ . Auf der rechten Seite müssen wir verwenden, dass auch Randwerte konvergieren,  $u_k|_{\partial\Omega} \rightarrow u|_{\partial\Omega}$  in  $L^1(\partial\Omega)$ . Dies stellt der Spursatz 5.3 sicher.  $\square$

**Was musste bisher geglaubt werden?** Bisher ist ohne Beweis geblieben (und wir verweisen auf die Funktionalanalysis für Beweise):

- Rademacher-Theorem Satz 3.2. Lipschitz-Funktionen haben einen beschränkten distributionellen Gradienten,  $C^{0,1}(\Omega) = W^{1,\infty}(\Omega)$ .
- Glättung von  $L^p$ -Funktionen mit der Faltung in Satz 4.6. Und, darauf aufbauend,
- Dichtheitsaussagen in Satz 5.2 und Lemma 5.5.

**Teil 2**

**Elliptische Differentialgleichungen**



## Darstellungsformeln

### 6. Die Fundamentallösung

Man kennt eine spezielle Lösung  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  der Poisson-Gleichung

$$-\Delta \Phi = \delta_0.$$

Die Gleichung gilt im Distributionssinn auf  $\mathbb{R}^n$ . Die Funktion  $\Phi$  heisst Newton-Potential oder Fundamentallösung.

DEFINITION 6.1. *Im  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 2$  definieren wir die Fundamentallösung  $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  durch*

$$(6.1) \quad \Phi(x) := \begin{cases} -c_{\Phi,2} \log |x|, & n = 2, \\ c_{\Phi,n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

mit den Konstanten  $c_{\Phi,2} = 1/(2\pi)$  und  $c_{\Phi,n} = 1/(n(n-2)\omega_n)$  für  $n \geq 3$ , wobei  $\omega_n$  das Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  ist.

Bemerkungen:

- a) Da  $\Phi(x) = \varphi(|x|)$  schreiben wir manchmal auch  $\Phi(r)$ .
- b) Tatsächlich gilt  $\Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , denn für  $n = 2$  bzw.  $n \geq 3$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} |\Phi| &= -c_{\Phi,2} \int_0^R (\log r) 2\pi r \, dr < \infty, \\ \int_{B_R(0)} |\Phi| &= c_{\Phi,n} \int_0^R r^{2-n} |\partial B_1| r^{n-1} \, dr < \infty. \end{aligned}$$

- c) Es gilt sogar  $\Phi \in W^{1,1}_{loc}$ . Der Gradient hat die  $n$ -unabhängige Form

$$\nabla \Phi(x) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{x}{|x|} \frac{1}{|x|^{n-1}},$$

wobei der Vorfaktor berechnet ist aus  $c'_{\Phi,2} = c_{\Phi,2} = 1/(2\omega_2)$  bzw.  $c'_{\Phi,n} = (n-2)c_{\Phi,n} = 1/(n\omega_n)$ . Insbesondere ist der Gradient  $\nabla \Phi$  ebenfalls eine Distribution nullter Ordnung auf  $\mathbb{R}^n$ .

- d) Zum Vorfaktor: Es gilt  $|B_r(0)| = \omega_n r^n$  und daher, durch differenzieren,  $|\partial B_r(0)| = n\omega_n r^{n-1}$ . Es gilt also

$$\partial_r \Phi(r) = -\frac{1}{|\partial B_r|}.$$

SATZ 6.2. *Es gilt  $-\Delta\Phi = \delta_0$  im Distributionssinn auf  $\mathbb{R}^n$ .*

BEWEIS. *Schritt 1.* Zunächst berechnen wir die Ableitung in einem Punkt  $x \neq 0$  klassisch.

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(x) &= -\frac{1}{n\omega_n} \sum_k \partial_k \left( \frac{x_k}{|x|^n} \right) \\ &= -\frac{1}{n\omega_n} \sum_k \frac{1}{|x|^n} + x(-n)|x|^{-n-1} \frac{x}{|x|} \\ &= -\frac{1}{n\omega_n} \left( \frac{n}{|x|^n} - \frac{n}{|x|^n} \right) = 0.\end{aligned}$$

Damit ist  $\Delta\Phi = 0$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gezeigt.

*Schritt 2.* Interessant ist das Verhalten in  $x = 0$ . Wir berechnen für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}-\Delta\langle\Phi\rangle(\varphi) &= \langle\nabla\Phi\rangle(\nabla\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\Phi(x) \nabla\varphi(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla\Phi(x) \nabla\varphi(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta\Phi(x) \varphi(x) dx + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_r \Phi(\varepsilon) \varphi(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{1-n} \varphi(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi = \varphi(0).\end{aligned}$$

Wir sehen, warum wir den Vorfaktor in dieser Form gewählt haben.  $\square$

Wir wollen noch einen zweiten Beweis für  $-\Delta\Phi = \delta_0$  angeben, der einen anderen Aspekt liefert. Wir rechnen mit der Zwiebelintegration

$$\begin{aligned}-\Delta\langle\Phi\rangle(\varphi) &= \langle\nabla\Phi\rangle(\nabla\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\Phi(x) \nabla\varphi(x) dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\partial B_r(0)} \frac{-1}{n\omega_n r^{n-1}} \partial_r \varphi(y) dS(y) dr \\ &= \int_0^\infty \int_{\partial B_1(0)} \frac{-1}{n\omega_n} \partial_r \varphi(ry) dS(y) dr \\ &= - \int_0^\infty \partial_r \left( \int_{\partial B_r(0)} \varphi(y) dS(y) \right) dr \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(0)} \varphi(y) dS(y) = \varphi(0).\end{aligned}$$

Die Anwendung von  $-\Delta\Phi$  auf  $\varphi$  bedeutet also einfach, dass die  $r$ -Ableitung der  $\varphi$ -Mittelwerte von unendlich bis 0 aufintegriert wird. Daher entsteht  $\varphi(0)$ .

Die Fundamentallösung gibt uns ein phantastisches Verfahren zum Lösen der Poisson-Gleichung an die Hand (zumindest im Gesamtraum).

SATZ 6.3. Sei  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Dann erfüllt die Funktion

$$(6.2) \quad u(x) := (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \Phi(x - y) dy$$

$-\Delta u = f$  im Distributionssinn auf  $\mathbb{R}^n$ . Es gilt  $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C$ ,  $C$  hängt nur vom Träger von  $f$  und von  $\|f\|_{L^\infty}$  ab.

BEWEIS. Für  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\Delta(\Phi * f)(x) = ((-\Delta\Phi) * f)(x) \\ &= (-\Delta\Phi)(f(x - \cdot)) = \delta_0(f(x - \cdot)) = f(x). \end{aligned}$$

Der Gradient  $\nabla u = (\nabla\Phi) * f$  ist die Faltung einer  $L^1_{loc}$ -Funktion mit einer beschränkten Funktion mit kompaktem Träger. Das Ergebnis ist daher auf kompakten Teilmengen beschränkt.  $\square$

Wir sehen, dass immer wieder die Integrierbarkeit der auftretenden Funktionen wichtig ist. So kann man zum Beispiel für  $\varphi \in W^{1,\infty}$  mit kompaktem Träger die Formel

$$-\Delta\Phi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\Phi \nabla\varphi$$

schreiben, weil  $\nabla\Phi$  lokal integrierbar ist. Wir wollen feststellen, dass  $\Phi$  sogar noch etwas besser ist. Für  $p \geq 1$  und einen Radius  $R > 0$  gilt

$$\int_{B_R(0)} |\nabla\Phi|^p \sim \int_0^R |r^{-(n-1)}|^p r^{n-1} dr < \infty$$

falls

$$-p(n-1) + n-1 > -1 \quad \text{oder, äquivalent,} \quad p < \frac{n}{n-1}.$$

Dieselbe Rechnung kann man auch für  $\Phi$  anstelle von  $\nabla\Phi$  durchführen. Wir erhalten  $\Phi \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$  falls  $p < n/(n-1)$ .

COROLLAR 6.4. Sei  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger. Dann gilt für

$$(6.3) \quad u(x) := (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \Phi(x - y) dy$$

wieder  $-\Delta u = f$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $u \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ .

BEWEIS. Wir betrachten  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit Träger  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Wir wissen, dass  $\Phi \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  für ein  $p > 1$ . Wir betrachten den dualen Exponenten  $p'$  und approximieren  $f$  (zum Beispiel durch Faltung mit einer Dirac-Folge) in  $L^{p'}$  mit Funktionen  $f_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Wir stellen fest, dass wir durch Vergrößerung von  $S$  annehmen können, dass alle Träger der  $f_k$  enthalten sind in  $S$ .

Die Lösungen  $u_k$  von  $-\Delta u_k = f_k$  aus Satz 6.3 erfüllen

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_R(0)} |u_k(x) - u_m(x)| &\leq \sup_{x \in B_R(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(y) - f_m(y)| |\Phi(x - y)| dy \\ &\leq \|f_k - f_m\|_{p'} \sup_{x \in B_R(0)} \|\Phi(x - \cdot)\|_{L^p(S)}. \end{aligned}$$

Wir schließen, dass die Folge  $u_k$  lokal gleichmäßig konvergiert. Wir finden also  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u_k \rightarrow u$  lokal gleichmäßig, und daher auch als Distribution. Wegen Vertauschbarkeit von Limesbildung und Differentiation bei Distributionen finden wir

$$-\Delta u = f.$$

Zudem können wir nun in der Darstellung

$$u_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y) \Phi(x - y) dy$$

auf beiden Seiten zum Limes übergehen. Dies liefert die Darstellung für  $u$ .

Wir können die obige Abschätzung für Gradienten wiederholen und finden

$$\sup_{x \in B_R(0)} |\nabla u_k(x) - \nabla u_m(x)| \leq \|f_k - f_m\|_{p'} \sup_{x \in B_R(0)} \|\nabla \Phi(x - \cdot)\|_{L^p(S)}.$$

Dies liefert, dass  $u_k$  eine Cauchy-Folge in  $W^{1,\infty}(B_R(0))$  ist. Insbesondere konvergiert  $u_k$  in diesem Raum gegen seine (distributionelle) Grenzfunktion  $u$ , und  $u$  ist in  $W^{1,\infty}(B_R(0))$  beschränkt.  $\square$

## 7. Greensche Funktionen

Die obige Darstellung ist sehr hilfreich, denn die Lösung  $u$  wird explizit als ein Integral dargestellt. Auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  können wir damit auch  $-\Delta u = f$  lösen, aber wir haben keine Kontrolle über die Randwerte von  $u$ .

**Dirichlet-Randbedingung.** Unser Ziel ist eine Darstellung von Lösungen  $u$  auf einem Gebiet  $\Omega$ . Wir nehmen nun zunächst an, dass  $u \in C^0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  mit  $\Delta u \in L^p(\Omega)$  für ein großes  $p$  (abhängig von  $n$ ,

genauer muss gelten  $p > \frac{n}{2}$ ). Wir setzen  $G(x, y) := \Phi(x-y)$  und können damit die obige Rechnung auch umkehren. Die formale Rechnung ist

$$\begin{aligned}
 (7.1) \quad u(x) &= \delta_x(u) = (-\Delta_y G(x, \cdot))(u) = \int_{\Omega} (-\Delta_y G(x, y)) u(y) dy \\
 &= - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} (\nu \cdot \nabla_y G(x, y)) u(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega} G(x, y) \nu \cdot \nabla_y u(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y).
 \end{aligned}$$

In dieser Rechnung ist das Integral in der ersten Zeile nicht definiert. Man kann die Rechnung (7.1) für glatte  $u$  dennoch wie folgt rechtfertigen. Wir wählen eine Funktion  $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ , die in einer Umgebung  $B_\varepsilon(x)$  von  $x$  identisch 1 ist. Dann setzt man  $u_1 = \eta u$  und  $u_2 = (1-\eta)u$ . Die Funktion  $u_1$  verschwindet am Rand und wir rechnen wie oben

$$u_1(x) = \delta_x(u_1) = (-\Delta_y G(x, \cdot))(u_1) = - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u_1(y) dy.$$

Die Funktion  $u_2$  verschwindet in der Kugel  $B_\varepsilon(x)$ . Da  $\Delta_y G(x, y) = 0$  für  $y \neq x$ ,

$$\begin{aligned}
 u_2(x) &= 0 = \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} (-\Delta_y G(x, y)) u_2(y) dy \\
 &= - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u_2(y) dy - \int_{\partial\Omega} (\nu \cdot \nabla_y G(x, y)) u_2(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega} G(x, y) \nu \cdot \nabla_y u_2(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y).
 \end{aligned}$$

Addition der  $u_1$  und der  $u_2$  Gleichung liefert das Gewünschte, denn  $u$  stimmt in einer Umgebung des Randes mit  $u_2$  überein. Damit ist die Rechnung (7.1) gerechtfertigt.

*Idee der Green'schen Funktion: Ein Randterm soll verschwinden!* Von  $G(x, y)$  haben wir bei allen Rechnungen nur verwendet, dass  $-\Delta_y G(x, \cdot) = \delta_x$ . Wir können also auch setzen

$$G(x, y) = \Phi(x-y) + H(x, y),$$

wenn  $H : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ist mit  $H(x, \cdot) \in H^2(\Omega)$  und  $\Delta_y H(x, \cdot) = 0$ . Dann können wir (eventuell) die Funktion  $H$  so wählen, dass  $G(x, y) = 0$  für alle  $x \in \Omega$  und alle  $y \in \partial\Omega$ . Mit einem solchen  $H$  fällt in unserer Darstellung das letzte Integral weg. Statt  $-\Delta u$  schreiben wir  $f$  und statt  $u|_{\partial\Omega}$  schreiben wir  $g$ . Wir erhalten dann

$$(7.2) \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} (\nu \cdot \nabla_y G(x, y)) g(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Wir haben damit  $u$  durch ein Integral mit den Daten  $f$  und  $g$  dargestellt. Diese Darstellung ist zugeschnitten auf Dirichlet-Daten, also die Bedingung  $u|_{\partial\Omega} = g$ .

**DEFINITION 7.1** (Greensche Funktion). *Für jedes  $x \in \Omega$  sei die Funktion  $H(x, \cdot) \in H^1(\Omega)$  eine Lösung der Gleichung*

$$\begin{aligned} \Delta_y H(x, \cdot) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ H(x, \cdot) &= -\Phi(x - \cdot) && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

*Dann heißt die Funktion  $G(x, y) := \Phi(x - y) + H(x, y)$  die Greensche Funktion zum Dirichletproblem auf  $\Omega$ .*

Uns stellen sich die Fragen:

- (1) Gibt es zu jedem Gebiet eine Greensche Funktion?
- (2) Liefert die Darstellungsformel eine Lösung? In welchem Sinn?

Zur Beantwortung der ersten Frage benötigt man einen Existenzsatz für harmonische Funktionen. Diesen werden wir in Corollar 9.3 als Folgerung aus Lax-Milgram erhalten. Weiterhin benötigt man die  $H^2(\Omega)$ -Regularität von Lösungen, die wir in Satz 10.3 für  $C^2$ -Gebiete erhalten. Für die Darstellungsformel muss man die Rechnung aus (7.1) rechtfertigen; dies ist notwendig, denn im Allgemeinen gilt  $u \notin \mathcal{D}$ .

Wir geben nun eine positive Antwort auf die obigen Fragen an. Satz 7.2 lässt sich mit den späteren Sätzen dieser Vorlesung beweisen.

**SATZ 7.2.** *Sei  $\Omega$  mit Lipschitz-Rand und beschränkt. Dann existiert eine Greensche Funktion  $G$  zum Dirichletproblem wie in Definition 7.1. Falls zusätzlich  $\partial\Omega \in C^2$ , so gilt  $H(x, \cdot) \in H^2(\Omega)$ .*

*Sei  $\partial\Omega \in C^2$  und  $u \in H^2(\Omega)$  eine Lösung von*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \in L^p(\Omega) \text{ mit } p > \frac{n}{2}, \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

*Dann gilt in jedem  $x \in \Omega$*

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) d\mathcal{L}^n(y) - \int_{\partial\Omega} (\nu \cdot \nabla_y G(x, y)) g(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Bemerkung: Die Voraussetzung  $f \in L^p$  mit  $p > n/2$  impliziert, dass das Volumenintegral für jedes  $x \in \Omega$  wohldefiniert ist.

**Neumann-Randbedingung.** Wir wollen lösen

$$(7.3) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \nu \cdot \nabla u &= \psi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir haben oben die Funktion  $H$  so gewählt, dass in der Darstellung (7.1) das zweite Randintegral wegfällt. Im Neumann-Problem sind wir allerdings daran interessiert, das erste Randintegral zu Null zu setzen.

Wir wählen dann für  $H(x, \cdot)$  eine harmonische Funktion, für die  $\nu \cdot \nabla_y H(x, y) = -\nu \cdot \nabla_y \Phi(x - y)$  für alle  $y \in \partial\Omega$ , denn damit gilt für  $G(x, y) = \Phi(x - y) + H(x, y)$ , dass  $\nu \cdot \nabla_y G(x, \cdot) = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Damit liefert (7.1) die Darstellung

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} G(x, y) \psi(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

### Greensche Funktion zum Dirichlet-Problem im Halbraum.

Wir betrachten den Halbraum  $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ . Die Greensche Funktion werden wir leicht erhalten, wenn wir zu einem  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$  den gespiegelten Punkt  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$  betrachten.

Wir gehen aus von der singulären Funktion  $G_{\Phi} : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $\Phi$ ,

$$G_{\Phi}(x, y) = \Phi(x - y).$$

Nun wollen wir eine Funktion  $H : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$  finden, welches, für jedes  $x$ , die Gleichung  $\Delta_y H(x, \cdot) = 0$  löst und welches dieselben Randwerte wie  $-G_{\Phi}(x, \cdot)$  hat. Wir müssen dafür nur  $G_{\Phi}$  vom unteren Halbraum benutzen,

$$H(x, y) = -\Phi(\tilde{x} - y).$$

Mit dieser Funktion und der Darstellungsformel (7.2) können wir sofort Lösungen angeben. Wir berechnen

$$\frac{\partial}{\partial y_n} G(x, y) = \frac{1}{n\omega_n} \left[ \frac{x_n - y_n}{|x - y|^n} - \frac{\tilde{x}_n - y_n}{|\tilde{x} - y|^n} \right],$$

also, auf dem Rand  $y_n = 0$ ,

$$K(x, y) := e_n \cdot \nabla_y G(x, y) = \frac{2x_n}{n\omega_n} \frac{1}{|x - y|^n}$$

**SATZ 7.3.** Sei  $g \in C^0(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ . Wir setzen

$$(7.4) \quad u(x) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x, y) g(y) dy = \frac{2x_n}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dy.$$

Dann gilt  $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty$ ,  $\Delta u = 0$  in  $\mathbb{R}_+^n$ , und

$$(7.5) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = g(x_0)$$

für jedes  $x_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n \equiv \mathbb{R}^{n-1}$  und jede Folge  $x \rightarrow x_0$  mit  $x \in \mathbb{R}_+^n$ .

BEWEIS. 1) *u* glatt und harmonisch. Für  $x \in \mathbb{R}_+^n$  (insbesondere nicht auf dem Rand) können wir beliebig oft unter dem Integral differenzieren, denn die Singularität ist ja in  $y = x$ , kommt also im Integral über  $\mathbb{R}^{n-1}$  nicht vor. Insbesondere ist  $u$  also in  $C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ . Die Funktion  $x_n |x - y|^{-n}$  ist (als  $y_n$ -Ableitung der Fundamentallösung) harmonisch, damit gilt auch  $\Delta u = 0$  in  $\mathbb{R}_+^n$ .

2) *u* beschränkt. Für jedes  $x \in \mathbb{R}_+^n$  gilt  $K(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$  durch den schnellen Abfall im Unendlichen. Eine formale Rechnung zeigt sofort, dass das Integral 1 ist,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x, y) dy &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (-\nu) \cdot \nabla_y G(x, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} (-\Delta_y) G(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}_+^n} \delta_x = 1. \end{aligned}$$

Diese Rechnung kann mit Hilfe von Integralen über kleine und große Kugeln gerechtfertigt werden. Wegen  $K \geq 0$  finden wir insbesondere

$$|u(x)| \leq \|g\|_{L^\infty} \cdot \|K\|_{L^1} = \|g\|_{L^\infty}$$

für alle  $x$ , also  $u \in L^\infty$ .

3) *Stetigkeit am Rand*. Es ist noch (7.5) zu zeigen. Sei also  $\mathbb{R}_+^n \ni x_j \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Die Funktionen  $K_j(y) := K(x_j, y)$  erfüllen

$$K_j \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(y) dy = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus B_\delta(x_0)} K_j(y) dy \rightarrow 0 \quad \forall \delta > 0.$$

Die Funktionen  $K_j$  bilden also eine Dirac-Folge. Wir haben schon gesehen, dass dann  $K_j \rightarrow \delta_{x_0}$  im Distributionssinn gilt. Wir wollen noch nachweisen, dass  $\langle K_j \rangle (g) \rightarrow g(x_0)$  auch für (nur) stetiges  $g$  gilt.

Für  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $\delta > 0$  so, dass  $|g(y) - g(x_0)| \leq \varepsilon$  für alle  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$  mit  $|y - x_0| \leq \delta$ . Damit rechnen wir

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_j(y) g(y) dy - g(x_0) \right| \\ & \leq \left| \int_{B_\delta(x_0)} K_j(y) (g(y) - g(x_0)) dy \right| \\ & \quad + \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus B_\delta(x_0)} K_j(y) (g(y) - g(x_0)) dy \right| \\ & \leq \varepsilon + C \int_{\mathbb{R}^{n-1} \setminus B_\delta(x_0)} K_j(y) dy \rightarrow \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

**Greensche Funktion für die Kugel.** Die Greensche Funktion für die Kugel ist ebenfalls explizit mit einem Spiegelungsprinzip berechenbar. Man verwendet dann als gespiegelten Punkt zu  $x \in B_1(0)$  den Punkt

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}.$$

Die Singularitätenfunktion mit Singularität in der Kugel wird durch die Spiegelung auf eine Singularitätenfunktion mit Singularität außerhalb der Kugel abgebildet. Man kann diese als Potential zu einer Ladung in einem gespiegelten Punkt auffassen.

**SATZ 7.4.** *Die Green'sche Funktion für das Dirichlet-Problem auf der Kugel  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$  ist gegeben durch*

$$G(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \left[ \log|x-y| - \frac{1}{2} \log(R^2 - 2xy + \frac{|x|^2|y|^2}{R^2}) \right] & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \left[ \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - (R^2 - 2xy + \frac{|x|^2|y|^2}{R^2})^{-\frac{n-2}{2}} \right] & \text{für } n \geq 3. \end{cases}$$

**BEWEIS.** Die Singularität ist jeweils die der 'richtigen' Singularitätenfunktion, der andere Summand ist harmonisch. Beim Einsetzen von  $y$  mit  $|y| = R$  erhält man  $G(x, y) = 0$ .

Ein Beweis, bei dem man den Ansatz mit Spiegelladung sieht (für  $n \geq 3$ ): Wir setzen an:

$$G(x, y) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} [|x-y|^{2-n} - a|bx-y|^{2-n}],$$

mit  $a \in \mathbb{R}$  und  $b > R/|x|$  (die Spiegelladung sitzt außerhalb der Kugel). Dann ist  $G(x, \cdot)$  harmonisch.

Für die Randwerte: Sei  $x \in B_R(0)$  und  $|y| = R$ ,

$$\begin{aligned} G(x, y) = 0 &\iff |x-y|^{2-n} = a|bx-y|^{2-n} \\ &\iff |x-y|^2 = a^{-2/(n-2)}|bx-y|^2 \\ &\iff |x|^2 - 2xy + R^2 = a^{-2/(n-2)}(b^2|x|^2 - 2bxy + R^2) \\ &\iff b = a^{2/(n-2)} \text{ und } b(|x|^2 + R^2) = (b^2|x|^2 + R^2) \\ &\iff b = a^{2/(n-2)} \text{ und } b(b-1)|x|^2 = (b-1)R^2 \\ &\iff b = a^{2/(n-2)} \text{ und } b = \frac{R^2}{|x|^2}. \end{aligned}$$

Falls  $G(x, y) = 0$  für alle  $x, y$  wie oben gelten soll, so sind diese Bedingungen an  $a$  und  $b$  auch notwendig.  $\square$

Mit dieser Green'schen Funktion kann man durch Berechnung der Neumann-Ableitung am Rand wieder eine Darstellungsformel gewinnen. Genauso wie Satz 7.3 erhält man

SATZ 7.5. Zu  $g \in C^0(\partial B_R(0))$  definieren wir für  $x \in B_R(0)$

$$(7.6) \quad u(x) := \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

und setzen  $u := g$  auf  $\partial B_R(0)$ . Dann gilt  $u \in C^\infty(B_R(0)) \cap L^\infty$ ,  $\Delta u = 0$  in  $B_R(0)$ , und  $u \in C^0(\bar{B}_R(0))$ .

Bemerkungen: 1) Wir haben etwas geschafft, was mit Energiemethoden nicht möglich sein wird: Wir haben zu Randwerten  $g$  eine Lösung gefunden, obwohl wir nur vorausgesetzt haben, dass  $g$  stetig ist.

2) Nach Satz 7.2 können wir die Lösung  $u$  von  $-\Delta u = f$  und  $u|_{\partial B_R} = g$  als Summe zweier Integrale schreiben. Manchmal ist auch folgendes Verfahren sinnvoll. Man bildet zunächst  $u_1(x) = (\Phi * f)(x)$  gemäß Corollar 6.4. Dann bildet man  $g_2 := g - u_1|_{\partial B_R}$  und setzt  $u_2$  als gewichtetes Randintegral über  $g_2$  gemäß (7.6). Wegen der Linearität des Laplaceoperators löst dann  $u = u_1 + u_2$  das Ausgangsproblem. Man sieht an diesem Verfahren insbesondere, dass die Regularität von  $u$  im Inneren der Kugel alleine von dem Term  $\Phi * f$  bestimmt wird.

# Energiemethoden

## 8. Variationsmethode und symmetrische Probleme

Unser Ziel ist der Existenzbeweis für Lösungen  $u$  der Gleichung

$$(8.1) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir wollen dafür das Dirichlet-Prinzip aus Satz 2.7 nutzen. Die Ideen des im Folgenden durchgeführten Verfahrens wurden entwickelt von

P.G.L. Dirichlet	1805–1859	“Dirichlet-Prinzip”
Bernhard Riemann	1826–1866	“Riemannscher Abbildungssatz”
Henri Poincaré	1854–1912	“Poincaré Ungleichung”
David Hilbert	1862–1943	“Hilbertraum”
Frigyes Riesz	1880–1956	”Rieszscher Darstellungssatz”

Bis auf Poincaré sind alle Personen zumindest zeitweise in Göttingen gewesen. Zum Namen Dirichlet gibt Wikipedia an: Peter Gustav Lejeune Dirichlets Großeltern stammten aus dem Ort Richelet in Belgien, daher der französisch klingende Name: Le jeune de Richelet. Er bedeutet sinngemäß : Der Junge von Richelet.

Wir definieren dazu das Energiefunktional

$$E : X_g \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u$$

auf  $X_g := \{u \in H^1(\Omega) \mid \text{Spur } u = g\}$ .

Sei  $u \in X_g$  Minimum dieser Energie. Wir können Vergleichsfunktionen  $u_{\varepsilon} := u + \varepsilon\varphi$  mit  $\varphi \in H_0^1$  betrachten, denn diese erfüllen ebenfalls die Randbedingung,  $u_{\varepsilon} \in X_g$ . Für die Energie gilt

$$0 = DE(u) \langle \varphi \rangle \equiv \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} E(u + \varepsilon\varphi) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi - f \varphi.$$

Insbesondere gilt diese Gleichung für  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , also

$$-\Delta u = f$$

im Distributionssinne. Die Randbedingung ist wegen  $u \in X_g$  ebenfalls erfüllt. Es bleibt zu zeigen, dass ein Minimum von  $E$  existiert. Dafür benötigen wir folgende fundamentale Ungleichung.

**SATZ 8.1 (Poincaré-Ungleichung).** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und  $p \in [1, \infty)$ . Dann gibt es  $C_0 = C_0(\Omega, p) > 0$  mit*

$$(8.2) \quad \int_{\Omega} |u|^p \leq C_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^p \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**BEWEIS.** Es genügt, die Ungleichung für  $u \in C_c^\infty(\Omega)$  zu zeigen. Tatsächlich kann nach Definition des Raumes jedes  $v \in W_0^{1,p}$  durch solche glatten  $u_j$  in  $W^{1,p}$  approximiert werden. Die Ungleichung für die  $u_j$  überträgt sich dann auf den  $W^{1,p}$ -Limes  $v$ .

Sei also  $u \in C_c^\infty(\Omega)$ . Wir schreiben  $x \in \mathbb{R}^n$  als  $x = (\tilde{x}, y)$  mit  $y \in \mathbb{R}$ . Wegen der Beschränktheit von  $\Omega$  können wir annehmen, dass  $\Omega \subset Q \times (a, b)$  für  $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Dann gilt

$$u(\tilde{x}, y) = \int_a^y \partial_n u(\tilde{x}, z) dz,$$

also, mit der Hölder-Ungleichung, auch

$$|u(\tilde{x}, y)|^p \leq \left| \int_a^b |\partial_n u(\tilde{x}, z)| dz \right|^p \leq C(a, b, p) \int_a^b |\partial_n u(\tilde{x}, z)|^p dz.$$

Integration über  $y$  ergibt

$$\int_a^b |u(\tilde{x}, y)|^p dy \leq (b-a) C(a, b, p) \int_a^b |\partial_n u(\tilde{x}, z)|^p dz,$$

und Integration über  $\tilde{x} \in Q$  schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^p &\leq \int_Q \int_a^b |u(\tilde{x}, y)|^p dy d\tilde{x} \leq C'(a, b, p) \int_Q \int_a^b |\partial_n u(\tilde{x}, z)|^p dz d\tilde{x} \\ &\leq C'(a, b, p) \int_{\Omega} |\nabla u|^p, \end{aligned}$$

also die Behauptung.  $\square$

Im nächsten Beweis werden wir die sogenannte  $\varepsilon$ -Ungleichung verwenden: Die binomische Formel  $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  liefert mit  $ab = (\varepsilon A)(B/\varepsilon) = AB$

$$AB \leq \varepsilon^2 A^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} B^2.$$

Wir können nun eine Lösbarkeitsbedingung für die Poisson-Gleichung angeben.

SATZ 8.2 (Existenz einer Lösung). Sei  $\Omega$  beschränkt und Lipschitz,  $f \in L^2(\Omega)$  und die Randwerte  $g$  gegeben als Spur einer Funktion  $g \in H^1(\Omega)$ . Dann existiert ein Minimum  $u$  der Energie  $E$  in  $X_g$ . Der Minimierer  $u$  löst die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f$$

im Distributionssinn und die Randbedingung im Spursinn,  $u \in X_g$ .

BEWEIS. Wir behaupten, dass die Energie nach unten beschränkt ist,

$$(8.3) \quad \inf \{E(u) \mid u \in X_g\} > -\infty.$$

Idee: Der (positive) quadratische erste Term gewinnt gegen den linearen zweiten Term.

Wir rechnen für  $u \in X_g$ ,  $u = g + v$  mit  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f u \right| &\leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{L^2} (\|g\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}) \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} + \|f\|_{L^2} C_0 \|\nabla v\|_{L^2} \\ &\leq C(f, g) + C(f) \|\nabla u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir nacheinander verwendet: Cauchy-Schwarz, Dreiecksungleichung in  $L^2(\Omega)$ , Poincaré-Ungleichung, und nochmals die Dreiecksungleichung. Damit können wir für die Energie rechnen

$$\begin{aligned} E(u) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \left| \int_{\Omega} f u \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C_1 - C_2 \|\nabla u\|_{L^2} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C - \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die  $\varepsilon$ -Ungleichung verwendet haben. Das Quadrat ist positiv und es folgt (8.3). (Wir haben sogar etwas mehr bewiesen: Die Energie von  $u$  kontrolliert das Quadrat der  $H^1$ -Norm von  $u$ .)

Wir betrachten nun eine *Minimalfolge*  $u_k$ , also eine Folge  $u_k \in X_g$  mit  $E(u_k) \rightarrow \inf E$ . Eine solche Folge existiert immer nach Definition des Infimums. Allerdings darf der Raum  $X_g$  dabei nicht leer sein. Bei uns:  $g \in X_g$ , also gilt  $X_g \neq \emptyset$  ( $\rightarrow$  berühmter historischer Fehler, die Voraussetzung  $g \in C^0(\partial\Omega)$  reicht nicht aus).

Als Lösung  $u$  kommt ein Limes der Folge  $u_k$  in Betracht. Wir müssen allerdings klären, ob ein solcher Limes existiert. Tatsächlich werden

wir sehen, dass  $u_k$  eine Cauchy-Folge im Banachraum  $H^1(\Omega)$  ist. Wir betrachten das Energiefunktional  $E$  auf ganz  $H^1(\Omega)$  und rechnen

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_k - u_m)\|_{L^2}^2 &= -\|\nabla(u_k + u_m)\|_{L^2}^2 + 2\|\nabla u_k\|_{L^2}^2 + 2\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \\ &= -2E(u_k + u_m) - 2 \int_{\Omega} (u_k + u_m) f \\ &\quad + 4E(u_k) + 4 \int_{\Omega} u_k f + 4E(u_m) + 4 \int_{\Omega} u_m f \\ &= -8E\left(\frac{u_k + u_m}{2}\right) + 4E(u_k) + 4E(u_m) \\ &\leq -8 \inf_{X_g} E + 4E(u_k) + 4E(u_m). \end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir verwendet, dass nach dem Spursatz die Funktion  $(u_k + u_m)/2$  wieder die Randwerte  $g$  hat und damit in  $X_g$  liegt. Die Energien  $E(u_k)$  und  $E(u_m)$  konvergieren gegen  $\inf_{X_g} E$  und damit

$$\|u_k - u_m\|_{H^1}^2 \leq C_0 \|\nabla(u_k - u_m)\|_{L^2}^2 \rightarrow 0.$$

Wegen der Vollständigkeit von  $H^1$  konvergiert die Funktionenfolge  $u_k$  in  $H^1(\Omega)$  gegen eine Funktion  $u \in H^1(\Omega)$ . Der Spursatz liefert  $u \in X_g$ . Die Energie ist stetig unter  $H^1$ -Konvergenz, daher gilt

$$E(u) = \inf_{X_g} E.$$

Dass Minimierer von  $E$  die Poisson-Gleichung lösen, hatten wir bereits zu Beginn dieses Abschnittes gezeigt.  $\square$

**Der Rieszsche Darstellungssatz.** Der Beweis des obigen Existenzsatzes funktioniert auch ohne Angabe eines konkreten Funktionals in einem allgemeinen Hilbertraum.

**SATZ 8.3** (Variante des Riesz'schen Darstellungssatzes). *Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische stetige Bilinearform, die koerziv ist, d.h. es gibt  $C_0 > 0$  mit*

$$(8.4) \quad \|u\|^2 \leq C_0 a(u, u) \quad \forall u \in H.$$

*Weiterhin sei  $\langle f \rangle : H \rightarrow \mathbb{R}$  linear und stetig. Dann gibt es genau ein Element  $u \in H$  mit*

$$(8.5) \quad a(u, \varphi) = \langle f \rangle(\varphi) \quad \forall \varphi \in H.$$

**BEWEIS.** Wir stellen zunächst die Eindeutigkeit fest. Durch Differenzbildung reicht es, die Eindeutigkeit für  $f = 0$  zu zeigen. In diesem Fall liefert Einsetzen von  $\varphi = u$  aber  $a(u, u) = 0$ , also  $u = 0$ .

Der Existenzbeweis ist genau wie der Beweis von Satz 8.2. Man rechnet zunächst für

$$E : H \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \frac{1}{2}a(u, u) - \langle f \rangle (u)$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} E(u) &\geq \frac{1}{2C_0} \|u\|_H^2 - \|f\|_{H'} \|u\|_H \\ &\geq \frac{1}{2C_0} \|u\|_H^2 - C_1 - \frac{1}{2C_0} \|u\|_H^2 \geq -C_1. \end{aligned}$$

Also ist wieder die Energie nach unten beschränkt. Wir betrachten nun eine Minimalfolge  $u_k$ , also  $E(u_k) \rightarrow \inf E$ . Wir behaupten, dass  $u_k$  eine Cauchy-Folge in  $H$  ist. Wir rechnen

$$\begin{aligned} &a(u_k - u_m, u_k - u_m) \\ &= -a(u_k + u_m, u_k + u_m) + 2a(u_k, u_k) + 2a(u_m, u_m) \\ &= -8E\left(\frac{u_k + u_m}{2}\right) + 4E(u_k) + 4E(u_m) \\ &\leq -8 \inf_H E + 4E(u_k) + 4E(u_m) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

wegen  $E(u_k), E(u_m) \rightarrow \inf E$ . Insbesondere also auch

$$\|u_k - u_m\|_H^2 \leq C_0 a(u_k - u_m, u_k - u_m) \rightarrow 0.$$

Wegen der Vollständigkeit von  $H$  existiert  $u \in H$  mit  $u_k \rightarrow u$  in  $H$ . Die Energie ist stetig auf  $H$ , also

$$E(u) = \inf_H E.$$

Im Minimum gilt wegen der Symmetrie von  $a$

$$E(u) \leq E(u + \varepsilon\varphi) = E(u) + \varepsilon a(u, \varphi) - \varepsilon \langle f \rangle (\varphi) + \frac{\varepsilon^2}{2} a(\varphi, \varphi).$$

Subtraktion von  $E(u)$ , Teilen durch  $\varepsilon$  und Limesbildung  $\varepsilon \rightarrow 0$  liefert die Gleichung.  $\square$

**Ein Existenzsatz als Corollar zu Riesz.** Wir wollen nun die Gleichung

$$(8.6) \quad -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

in der Sprache der Hilberträume im Raum  $H = H_0^1(\Omega)$  betrachten. Dabei können wir für  $f$  auch Funktionale zulassen

DEFINITION 8.4. *Wir definieren*

$$(8.7) \quad H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))' = \{ \mu : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear und stetig} \},$$

den Raum der Linearformen auf  $H_0^1(\Omega)$ .

Wir stellen fest, dass jede  $L^2(\Omega)$  Funktion auch kanonisch in  $H^{-1}(\Omega)$  liegt (als die zugehörige Distribution). Ebenso auch jedes  $\partial_i u$ , falls  $u$  in  $L^2(\Omega)$  (wieder als die zugehörige Distribution).

DEFINITION 8.5.  *$u$  heißt schwache Lösung von (8.6), falls  $u - g \in H_0^1(\Omega)$  und für alle  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  gilt*

$$(8.8) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \langle f \rangle (\varphi).$$

Wir stellen zunächst fest, dass  $H := H_0^1(\Omega)$  ein Hilbertraum ist mit dem Skalarprodukt

$$(8.9) \quad \langle u, v \rangle := \int_{\Omega} u v + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

Wir betrachten die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

Die rechte Seite  $f \in H^{-1}(\Omega)$  ist ein Element des Dualraumes  $H'$ , also  $\langle f \rangle : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $g = 0$  sind schwache Lösungen von (8.6) solche  $u \in H$ , für die  $a(u, \varphi) = \langle f \rangle (\varphi)$  für alle  $\varphi \in H$ .

Ein Vorteil der Verallgemeinerung  $f \in H^{-1}(\Omega)$  ist, dass wir die Randwerte  $g$  in die rechte Seite  $f$  stecken können. Falls die Randwerte durch  $g \in H^1(\Omega)$  gegeben sind, so schreiben wir  $u = g + v$  und suchen eine Funktion  $v$  mit  $-\Delta v = -\Delta u + \Delta g = f + \Delta g$  im Distributionssinne und  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Dies gelingt, denn mit

$$\begin{aligned} \langle \Delta g \rangle (\varphi) &:= - \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla \varphi, \\ |\langle \Delta g \rangle (\varphi)| &\leq \|\nabla g\|_{L^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2} \leq C \|\varphi\|_{H^1} \end{aligned}$$

definiert  $\Delta g$  ein Element in  $H^{-1} = (H_0^1)'$ . Bemerke: Die Definition ist sinnvoll, denn der Randterm verschwindet wegen  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ .

Als Corollar zum Darstellungssatz erhalten wir

SATZ 8.6. *Sei  $\Omega$  beschränkt und Lipschitz,  $f \in H^{-1}(\Omega)$  und  $g \in H^1(\Omega)$ . Dann existiert eine schwache Lösung  $u$  von*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

BEWEIS. Wir setzen  $H = H_0^1(\Omega)$  und  $a(u, \varphi) = \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$  wie oben. Die Koerzivität folgt aus der Poincaré Ungleichung,

$$\|u\|_H^2 \leq (\|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2})^2 \leq C_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2 = C_0 a(u, u) \quad \forall u \in H.$$

Mit  $\tilde{f} := f + \Delta g \in H'$  gibt es nach Satz 8.3 eine Lösung  $v \in H$  der Gleichung  $a(v, \varphi) = \langle \tilde{f}, \varphi \rangle$ . Die Gleichung lautet ausgeschrieben

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \varphi = \langle f, \varphi \rangle - \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla \varphi.$$

Mit  $u := g + v$  haben wir das Problem gelöst.  $\square$

**Allgemeinere elliptische Gleichungen in Variationsform.** In unserer physikalischen Herleitung der elliptischen Gleichung tauchen Faktoren auf, nämlich die Wärmeleitfähigkeiten, die den Wärmegradienten  $\nabla u(x)$  und den Wärmestrom  $j(x)$  linear koppeln. Wir haben den einfachsten Fall betrachtet, ein homogenes Medium mit konstanter Leitfähigkeit  $a_0 \in \mathbb{R}_+$ . Dann gilt  $j(x) = -a_0 \nabla u(x)$ . Im allgemeinen Fall hat man jedoch eine Matrix  $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}$  gegeben, so dass

$$j(x) = -A(x) \cdot \nabla u(x).$$

Wir betrachten also Koeffizienten

$$(8.10) \quad A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, x \mapsto A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}, \quad A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n}).$$

Die Tatsache, dass der Wärmestrom nicht „rückwärts läuft“, impliziert, dass die Matrix  $A$  überall positiv ist. Wir fordern, dass für  $\gamma > 0$

$$(8.11) \quad \xi \cdot A(x)\xi \geq \gamma |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega.$$

Für eine elegante Formulierung unseres Problems können wir einen Operator  $L : H^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  definieren durch

$$(8.12) \quad L : u \mapsto -\operatorname{div}(A \cdot \nabla u),$$

also

$$\langle Lu \rangle(\varphi) = \int_{\Omega} (A(x) \cdot \nabla u(x)) \cdot \nabla \varphi(x) dx$$

für alle  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ .

**COROLLAR 8.7.** *Sei  $\Omega$  ein beschränktes Lipschitzgebiet,  $f \in H^{-1}(\Omega)$  und  $g \in H^1(\Omega)$ . Falls das Matrixfeld  $A = (a_{ij}) \in L^\infty(\Omega)$  punktweise symmetrisch ist und die Elliptizitätsbedingung (8.11) mit  $\gamma > 0$  erfüllt, dann gibt es eine Lösung  $u$  von*

$$(8.13) \quad Lu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

BEWEIS. Wir setzen wieder  $H := H_0^1(\Omega)$ . Ohne Einschränkung können wir  $g = 0$  annehmen, da wir andernfalls die neue rechte Seite  $\tilde{f} = f - \Delta g \in H^{-1} = H'$  betrachten können. Als Bilinearform wählen wir  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$a(u, v) := \int_{\Omega} [A(x)\nabla u(x)] \cdot \nabla v(x) dx.$$

Diese Bilinearform kontrolliert die Norm, denn wegen Poincaré und Elliptizität gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_H^2 &= \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (C+1)^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{(C+1)^2}{\gamma} \int_{\Omega} \gamma |\nabla u(x)|^2 dx \leq C' a(u, u) \end{aligned}$$

für alle  $u \in H$ . Der abstrakte Satz 8.3 liefert die Aussage.  $\square$

Zum Namen: Das Problem  $Lu = f$  mit homogenen Randwerten (also Null-Randwerten) heißt symmetrisch, denn

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Wir brauchen die Symmetrie von  $L$ , um die Symmetrie der Bilinearform zu haben. Als nächstes wollen wir diese Einschränkung beseitigen.

## 9. Unsymmetrische Bilinearformen und Lax-Milgram

Das Problem der direkten Variationsmethode ist, dass wir nur Gleichungen in symmetrischer Variationsform behandeln können. Unser Ziel ist es, für  $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$  elliptisch,  $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$  und  $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  zu lösen:

$$(9.1) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(A \cdot \nabla u) + b \cdot \nabla u + cu &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Der Operator zu dieser Gleichung ist nicht symmetrisch. Aber die Gleichung hat wieder eine schwache Formulierung mit Hilfe einer Bilinearform,

$$(9.2) \quad a(u, v) := \int_{\Omega} \{ [A(x)\nabla u(x)] \cdot \nabla v(x) + (b(x) \cdot \nabla u(x))v(x) + c(x)u(x)v(x) \} dx.$$

Diese Bilinearform ist allerdings durch den  $b$ -Teil im Allgemeinen unsymmetrisch. Wir können aber den Riesz-schen Satz auf unsymmetrische Bilinearformen verallgemeinern.

**SATZ 9.1 (Lax-Milgram).** *Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{R}$ , und  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine Bilinearform mit  $\|u\|^2 \leq C_0 a(u, u)$  und  $|a(u, v)| \leq C_1 \|u\| \|v\|$  für alle  $u, v \in H$ . Weiter sei  $\langle f \rangle : H \rightarrow \mathbb{R}$  linear und stetig. Dann gibt es genau ein Element  $u \in H$  mit*

$$(9.3) \quad a(u, \varphi) = \langle f \rangle(\varphi) \quad \forall \varphi \in H.$$

*Es gilt die Abschätzung*

$$(9.4) \quad \|u\|_H \leq C_0 \|f\|_{H'}.$$

**BEWEIS.** 1. *Wir zeigen zunächst (9.4).* Sei also  $u$  Lösung der Variationsungleichung. Wir setzen  $\varphi = u$  und erhalten

$$\frac{1}{C_0} \|u\|_H^2 \leq a(u, u) = \langle f \rangle(u) \leq \|f\|_{H'} \|u\|_H.$$

Teilen durch  $\|u\|_H$  liefert die Abschätzung.

2. *Kontinuitätsansatz.* Wir definieren den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil von  $a$  durch

$$a_{sym}(u, v) := \frac{1}{2} (a(u, v) + a(v, u)),$$

$$a_{asym}(u, v) := \frac{1}{2} (a(u, v) - a(v, u)),$$

so dass  $a(u, v) = a_{sym}(u, v) + a_{asym}(u, v)$ . Wir benutzen eine Kontinuitätsmethode. Dazu sei für  $t \in [0, 1]$

$$a_t(u, v) := a_{sym}(u, v) + t a_{asym}(u, v).$$

Dann gilt  $a_0 = a_{sym}$  und  $a_1 = a$ . Wir betrachten

$$\mathcal{T} := \{t \in [0, 1] : \text{Gleichung } a_t(u, \cdot) = \langle f \rangle \text{ lösbar für alle } f \in H'\}.$$

Es gilt  $0 \in \mathcal{T}$  wegen der Symmetrie von  $a_0 = a_{sym}$  und Satz 8.3. Wir behaupten, dass es  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass gilt

$$(9.5) \quad t \in \mathcal{T} \text{ und } [0, 1] \ni t' \leq t + \varepsilon \Rightarrow t' \in \mathcal{T}.$$

Sobald dies bewiesen ist, folgt  $1 \in \mathcal{T}$  und damit die Lösbarkeit der Gleichung für  $a_1 = a$ .

Sei  $t \in \mathcal{T}$ . Es gilt  $a_t(u, u) = a(u, u)$ , weshalb alle Operatoren  $a_t$  koerziv sind mit der Konstanten  $C_0$ . Insbesondere gilt für alle Lösungen  $u$  von  $a_t(u, \cdot) = f(\cdot)$  die Abschätzung  $\|u\|_H \leq C_0 \|f\|_{H'}$ .

3. *Lösung des  $t'$ -Problems.* Wir zeigen nun (9.5). Es sei also  $t \in \mathcal{T}$  und  $t'$  wie gefordert,  $\langle f \rangle \in H'$  beliebig. Wir wollen  $a_{t'}(u, \cdot) = \langle f \rangle$  lösen. Die Gleichung schreiben wir als

$$(9.6) \quad a_t(u, \cdot) = \langle f \rangle - (t' - t) a_{asym}(u, \cdot).$$

Nun lösen wir (9.6) mit einer Iteration. Für gegebenes  $u^n$  lösen wir

$$(9.7) \quad a_t(u^{n+1}, \cdot) = \langle f \rangle - (t' - t)a_{asym}(u^n, \cdot).$$

nach  $u^{n+1}$ . Dies ist möglich, da  $t \in \mathcal{T}$ . Die Abbildung  $H \ni u^n \mapsto u^{n+1} \in H$  ist kontraktiv, denn für zwei verschiedene  $u^n, \bar{u}^n$  finden wir für die Lösungen  $u^{n+1}$  und  $\bar{u}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \|u^{n+1} - \bar{u}^{n+1}\|_H &\leq C_0 \|(t' - t)(a_{asym}(u^n, \cdot) - a_{asym}(\bar{u}^n, \cdot))\|_{H'} \\ &\leq C_0 |t' - t| \|a_{asym}(u^n - \bar{u}^n, \cdot)\|_{H'} \\ &\leq \varepsilon C_0 C_1 \|u^n - \bar{u}^n\|_H. \end{aligned}$$

Für  $0 < \varepsilon < (C_0 C_1)^{-1}$  ist die Abbildung also kontraktiv. Sie hat daher einen Fixpunkt, und der löst die gewünschte Gleichung für  $t'$ .  $\square$

Bemerkung zum Beweis: Man kann den Satz auch mit Methoden der Funktionalanalysis beweisen. Der obige Beweis hat den Vorteil, dass er sich leicht auf den Fall von Variationsungleichungen mit Nebenbedingungen übertragen lässt.

Wir erwähnen noch die folgende komplexe Version des Satzes von Lax-Milgram.

**SATZ 9.2** (Lax-Milgram im Hilbertraum über  $\mathbb{C}$ ). *Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{C}$ ,  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und sesquilinear, insbesondere  $a(\lambda u, \mu v) = \bar{\lambda}\mu a(u, v)$ . Falls  $a$  die Koerzivität*

$$(9.8) \quad \|u\|^2 \leq C_0 \operatorname{Re} a(u, u)$$

*erfüllt, so gibt es zu jedem linearen, stetigen  $f : H \rightarrow \mathbb{C}$  ein eindeutiges Element  $u \in H$  mit*

$$(9.9) \quad a(u, \varphi) = \langle f \rangle(\varphi) \quad \forall \varphi \in H.$$

*Dieses erfüllt  $\|u\| \leq C_0 \|f\|_{H'}$ .*

**BEWEIS.** *Schritt 1: Symmetrisches  $a$ .* Falls  $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$ , so erhalten wir den Satz als Corollar zum Satz von Riesz, Satz 8.3.

Der Hilbertraum  $H$  ist automatisch auch ein Hilbertraum über  $\mathbb{R}$  mit Skalarprodukt  $\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re} \langle u, v \rangle_{\mathbb{C}}$ . Die Form  $\operatorname{Re} a(\cdot, \cdot)$  ist reell bilinear, wegen  $\operatorname{Re} a(u, u) = a(u, u)$  ist sie koerziv. Mit Satz 8.3 finden wir daher zu der reell linearen Form  $\operatorname{Re} \langle f, \cdot \rangle : H \rightarrow \mathbb{R}$  ein Element  $u \in H$  mit  $\operatorname{Re} a(u, \varphi) = \operatorname{Re} \langle f, \varphi \rangle$ . Für den Imaginärteil rechnen wir, indem wir die Gleichung für  $-i\varphi$  verwenden,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} a(u, \varphi) &= \operatorname{Re}(-i)a(u, \varphi) = \operatorname{Re} a(u, -i\varphi) = \operatorname{Re} \langle f \rangle(-i\varphi) \\ &= \operatorname{Re}(-i) \langle f \rangle(\varphi) = \operatorname{Im} \langle f \rangle(\varphi). \end{aligned}$$

Das Element  $u$  löst also die komplexe Gleichung.

*Schritt 2: Allgemeines a.* Wie im Beweis vom reellen Lax-Milgram symmetrisieren wir  $a$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} a_{sym}(u, v) &:= \frac{1}{2} \left( a(u, v) + \overline{a(v, u)} \right), \\ a_{asym}(u, v) &:= \frac{1}{2} \left( a(u, v) - \overline{a(v, u)} \right). \end{aligned}$$

Auf den symmetrischen Teil können wir Schritt 1 anwenden. Die a priori Schranke für Lösungen gilt wegen

$$\|u\|_H^2 \leq C_0 \operatorname{Re} a(u, u) = C_0 \operatorname{Re} \langle f \rangle (u) \leq C_0 \|f\|_{H'} \|u\|_H.$$

Die Kontinuitätsmethode liefert wieder die Lösbarkeit der Ausgangsgleichung.  $\square$

Wir wollen nun Lax Milgram, Satz 9.1, auf das elliptische Problem (9.1) anwenden.

**COROLLAR 9.3** (Lösung des allgemeinen elliptischen Problems). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit Lipschitz-Rand,  $f \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $g \in H^1(\Omega)$ , das Matrixfeld  $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$  sei positiv wie in (8.11) mit Konstanter  $\gamma > 0$ , weiter sei  $b \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  und  $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  mit*

$$(9.10) \quad c - \frac{1}{2} \operatorname{div} b \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

*Dann existiert eine eindeutige Lösung  $u$  von (9.1).*

**BEWEIS.** Wieder können wir die Randwerte  $g$  in die rechte Seite nehmen. Wir lösen dann im Hilbertraum  $H := H_0^1(\Omega)$  für die Bilinearform (9.2). Es bleiben die Abschätzungen zu prüfen. Die Abschätzung nach oben,

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_H \|v\|_H$$

folgt aus der  $L^\infty$ -Eigenschaft der Koeffizienten und der Poincaré-Ungleichung. Für die Abschätzung nach unten betrachten wir zunächst den Beitrag der höchsten Ableitungen,

$$\int_{\Omega} [A(x) \nabla u(x)] \cdot \nabla u(x) \, dx \geq \gamma \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq C_P \gamma \|u\|_H^2.$$

Mit Hilfe von  $b \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u$  und  $\partial_i u u = \partial_i (|u|^2/2)$  und partieller Integration rechnen wir für den zweiten Teil

$$\int_{\Omega} (b(x) \cdot \nabla u(x)) u(x) + c(x) u(x) u(x) \, dx = \int_{\Omega} -\operatorname{div} b \frac{1}{2} |u|^2 + c |u|^2 \geq 0$$

nach Voraussetzung (9.10). Dabei haben wir in der partiellen Integration verwendet, dass für  $u \in H_0^1(\Omega)$  die Funktion  $|u|^2$  eine Funktion in  $W_0^{1,1}(\Omega)$  ist (Übung).  $\square$

Die Voraussetzung (9.10) und insbesondere die Annahme  $b \in C^1$  ist nicht optimal. Allerdings ist sogar im Falle  $b = 0$  für das Existenzresultat eine Positivitätsannahme an  $c$  notwendig, wie wir im Nachfolgenden sehen.

**Eigenwerte.** Seien  $\Omega$  beschränkt,  $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$  symmetrisch und elliptisch,  $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ . Wir betrachten den Operator  $L : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ ,

$$(9.11) \quad L : u \mapsto -\operatorname{div}(A \cdot \nabla u) + cu,$$

definiert durch

$$\langle Lu \rangle(\varphi) = \int (A(x) \cdot \nabla u(x)) \cdot \nabla \varphi(x) + c(x)u(x)\varphi(x) \, dx$$

für alle  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ .

Für  $\lambda_0 > \|c\|_{L^\infty}$  ist der Operator  $L + \lambda_0$  invertierbar nach Satz 9.1, es gibt also einen Lösungsoperator  $(L + \lambda_0)^{-1} : H^{-1} \rightarrow H_0^1$ , dieser ist linear und wegen der Abschätzung  $\|u\|_{H^1} \leq C\|f\|_{H^{-1}}$  auch stetig. Insbesondere, durch Einschränkung des Operators,

$$(L + \lambda_0)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \text{ linear und stetig.}$$

Wir wollen nun etwas fortgeschrittene Funktionalanalysis anwenden: Die Einbettung  $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  ist kompakt (Rellich). Daher ist auch der Operator

$$(L + \lambda_0)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \text{ kompakt.}$$

Der Spektralsatz für kompakte Operatoren liefert: Der Raum  $L^2(\Omega)$  wird aufgespannt durch die Eigenvektoren von  $(L + \lambda_0)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ . Es gibt also  $\mu_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und Lösungen  $u_k \in L^2(\Omega)$  mit

$$(L + \lambda_0)^{-1}u_k = \mu_k u_k,$$

oder

$$Lu_k = \left(-\lambda_0 + \frac{1}{\mu_k}\right) u_k.$$

Angewandt auf unser Problem in Corollar 9.3 bedeutet dies insbesondere: Für  $\tilde{c}(x) = c(x) + \lambda_0 - \mu_k^{-1}$  ist die zugehörige Gleichung  $\tilde{L}u = f$  nicht eindeutig lösbar. Die Vorzeichenbedingung war also notwendig im Existenzresultat.

**Das Neumann-Problem.** Im Neumann-Problem hat man Randdaten für die Normalableitung von  $u$  vorgegeben. Im Falle des einfachsten Operators will man lösen:

$$(9.12) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ \nu \cdot \nabla u &= \psi && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zwei Beobachtungen:

1) Angenommen,  $u \in H^2(\Omega)$  ist eine Lösung. Dann können wir die Gleichung über  $\Omega$  integrieren und erhalten wegen des Gaußschen Satzes

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} (-\Delta u) = - \int_{\partial\Omega} \nu \cdot \nabla u = - \int_{\partial\Omega} \psi.$$

Wir können also die Existenz einer Lösung nur erwarten, falls die Daten die Bedingung

$$\int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} \psi = 0$$

erfüllen. Wir wollen dies im Folgenden immer voraussetzen.

2) Die Lösung ist nur eindeutig bis auf Konstanten: Falls  $u$  eine Lösung ist und  $c \in \mathbb{R}$ , so ist  $u + c$  auch eine Lösung. Wir sollten also eine Normierung durchführen. Geeignet ist die Einschränkung auf Funktionen mit Mittelwert 0.

Wir wollen nun die Existenz einer Lösung mit Lax-Milgram zeigen. Dazu leiten wir zunächst die schwache Formulierung ab. Formales Testen mit  $\varphi$  liefert

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi + \int_{\partial\Omega} \psi \varphi.$$

Da die Randwerte von  $u$  nicht festgelegt sind, wir aber Mittelwerte festlegen wollen, wählen wir als Hilbertraum

$$H := \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} u = 0 \right\},$$

mit Norm und Skalarprodukt von  $H^1$ . Als Bilinearform und rechte Seite wählen wir nun

$$\begin{aligned} a(u, \varphi) &:= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi, \\ \langle F \rangle(\varphi) &:= \int_{\Omega} f \cdot \varphi + \int_{\partial\Omega} \psi \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Für  $\psi \in L^2(\partial\Omega)$  ist die Form  $\langle F \rangle$  stetig auf  $H$ ; dies folgt aus dem Spursatz. Die Koerzivität (Abschätzung von  $a(u, u)$  nach unten gegen

die Norm) folgt aus einer Variante der Poincaré Ungleichung: Für beschränkte Gebiete gilt mit  $C_p \in \mathbb{R}$

$$(9.13) \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \text{ mit } \int_{\Omega} u = 0.$$

Der Satz von Lax-Milgram 9.1 liefert die Existenz einer schwachen Lösung  $u \in H$  der Gleichung  $a(u, \cdot) = \langle F \rangle$ , also

$$(9.14) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \cdot \varphi + \int_{\partial\Omega} \psi \cdot \varphi$$

für alle  $\varphi \in H$ . Außerdem können wir mit konstanten Funktionen testen, denn für diese verschwinden beide Seiten der Gleichung nach unserer Voraussetzung an  $f$  und  $\psi$ . Wir behaupten, dass Gleichung (9.14) für alle  $\varphi \in H^1(\Omega)$  gilt. Dies folgt sofort aus der Linearität der Gleichung, da wir jede Funktion  $\varphi \in H^1(\Omega)$  schreiben können als

$$\varphi = \int_{\Omega} \varphi + \left\{ \varphi - \int_{\Omega} \varphi \right\}.$$

Speziell für  $\varphi \in \mathcal{D}$  folgt auch  $-\Delta u = f$  im Distributionssinn.

Die Randbedingung ist nicht im starken Sinn (also im Spursinn) erfüllt:  $u$  finden wir nur im Raum  $H^1$ , also  $\nabla u$  in  $L^2$ , und damit hat  $\nabla u$  keine Spur. Ist allerdings die Lösung  $u$  im stärkeren Raum  $H^2(\Omega)$ , so folgt aus der schwachen Gleichung zunächst  $-\Delta u = f$  in  $L^2(\Omega)$ , und dann aus dem Gauß'schen Satz

$$\int_{\partial\Omega} \nu \cdot \nabla u \varphi = \int_{\partial\Omega} \psi \cdot \varphi.$$

Daher ist in diesem Fall die Neumann-Randbedingung im Spursinn erfüllt. Wir nennen (9.14) die schwache Formulierung von (9.12).

## 10. $L^2$ -Regularität

Für viele weiterführende Resultate, speziell in nichtlinearen Anwendungen, sind Regularitätsergebnisse fundamental. Das einfachste Ergebnis ist die  $L^2$ -Regularität, die wir hier angeben und für die wir einen Beweis skizzieren. Für einen anderen Beweis verweisen wir auf Evans, Abschnitt 6.3.

Die Grundidee ist sehr einfach: Der Lösungsoperator  $(-\Delta)^{-1}$  ist stetig von  $H^{-1}(\Omega)$  nach  $H_0^1(\Omega)$ . Insofern hat die Lösung  $u$  gegenüber der rechten Seite  $f$  zwei Ableitungen gewonnen. Dieses Ergebnis wollen wir gerne um eine Ordnung liften: Wir wollen zeigen, dass für  $f \in L^2(\Omega)$  die Lösung  $u$  im Raum  $H^2(\Omega)$  liegt. Dieses Ergebnis kann man durch Durchdifferenzieren erhalten: Gilt

$$-\Delta u = f \in L^2(\Omega),$$

so löst  $v = \partial_k u$  die Gleichung

$$-\Delta v = \partial_k f \in H^{-1}(\Omega).$$

Also folgt  $v \in H^1(\Omega)$  und damit  $u \in H^2(\Omega)$ . Diese Idee wollen wir nun umsetzen. Das einzige Problem dabei sind die Randbedingungen ...

Wir wenden uns zunächst dem einfachsten Fall zu, dem Poisson-Problem auf einem Rechteck.

**SATZ 10.1.** *Sei  $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \times \dots \times (0, l_n) \subset \mathbb{R}^n$  ein Rechteck,  $f \in L^2(\Omega)$  eine rechte Seite und  $u \in H_0^1(\Omega)$  eine Lösung von*

$$-\Delta u = f \text{ auf } \Omega.$$

*Dann gilt  $u \in H^2(\Omega)$  und eine Abschätzung*

$$(10.1) \quad \|u\|_{H^2} \leq C \|f\|_{L^2}.$$

*Die Konstante  $C$  ist unabhängig von  $f$  und  $u$ .*

Wir wollen dieses einfachste und sehr wichtige Regularitätsresultat zweimal beweisen, um verschiedene Beweistechniken aufzuzeigen. Im ersten (kürzeren) Beweis benutzen wir das starke Hilfsmittel der Fourierreihen. Der zweite Beweis ist elementarer, nutzt Fortsetzungen mit einer Spiegelung und beruht im Wesentlichen auf Lax-Milgram. Evans führt einen nochmals anderen Beweis mit Differenzenquotienten.

Vor den Beweisen wollen wir feststellen, dass wir immer annehmen dürfen, dass  $f$  eine glatte Funktion mit kompaktem Träger in  $\Omega$  ist. Ist das Resultat nämlich für solche  $f$  gezeigt, so folgt es durch Approximation für alle  $f \in L^2(\Omega)$ .

**BEWEIS 1: FOURIERREIHEN.** Die Funktion  $f \in L^2(\Omega)$  kann in eine Fourierreihe entwickelt werden. Wir verwenden Indizes  $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$  und Ansatzfunktionen

$$\Psi_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k_1 x_1}{l_1}\right) \cdot \dots \cdot \sin\left(\frac{\pi k_n x_n}{l_n}\right).$$

Dies sind die Basisfunktionen in der Fourierreihe, gleichzeitig aber auch die Eigenfunktionen des Laplaceoperators, denn es gilt

$$(10.2) \quad -\Delta \Psi_k = \left\{ \left(\frac{\pi k_1}{l_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\pi k_n}{l_n}\right)^2 \right\} \Psi_k.$$

Wir entwickeln nun  $f$  in die Reihe

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k \Psi_k(x)$$

mit Konvergenz der Reihe in  $L^2(\Omega)$ . Für die Lösung  $u$  machen wir den Ansatz

$$\tilde{u}(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}^n} b_k \Psi_k(x),$$

wobei wir wegen (10.2) die Koeffizienten

$$b_k := \left\{ \left( \frac{\pi k_1}{l_1} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\pi k_n}{l_n} \right)^2 \right\}^{-1} a_k$$

wählen. Es gilt  $|k| |b_k| \leq C |a_k|$  und auch  $|k|^2 |b_k| \leq C |a_k|$  für alle  $k$ , mit  $C$  abhängig nur von  $l_1, \dots, l_n$ . Daher können wir zum Beispiel rechnen

$$\partial_1 \tilde{u}(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} k_1 b_k \cos \left( \frac{\pi k_1 x_1}{l_1} \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi k_2 x_2}{l_2} \right) \cdot \dots \cdot \sin \left( \frac{\pi k_n x_n}{l_n} \right)$$

oder

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_2 \tilde{u}(x) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^n} k_1 k_2 b_k \cos \left( \frac{\pi k_1 x_1}{l_1} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi k_2 x_2}{l_2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sin \left( \frac{\pi k_3 x_3}{l_3} \right) \cdot \dots \cdot \sin \left( \frac{\pi k_n x_n}{l_n} \right). \end{aligned}$$

Beide Reihen konvergieren in  $L^2(\Omega)$ , denn die Koeffizienten sind in  $l^2(\mathbb{N}^n)$ . Damit ist  $\tilde{u} \in H^2(\Omega)$  mit der Abschätzung

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(\Omega)}^2 = c_0 \sum_k (1 + |k| + |k|^2) |b_k|^2 \leq C c_0 \sum_k |a_k|^2 = C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Insbesondere kann man überprüfen, dass  $\tilde{u}$  eine Lösung der Gleichung ist. Da die Lösung eindeutig ist, gilt  $\tilde{u} = u$  und damit die Behauptung für  $u$ .  $\square$

## BEWEIS 2: SPIEGELUNG UND DURCHDIFFERENZIEREN.

*Schritt 1: Fortsetzung von  $u$  und  $f$ .* Wir wollen  $u$  fortsetzen auf eine Umgebung von  $\bar{\Omega}$ . Dies soll so geschehen, dass glatte  $u$  zu glatten Funktionen fortgesetzt werden. Wir setzen, für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} u(-x_1, x_2, \dots, x_n) &:= -u(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ u(x_1, -x_2, x_3, \dots, x_n) &:= -u(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Damit ist  $u$  zu einer Funktion auf  $\Omega' := (-l_1, l_1) \times \dots \times (-l_n, l_n)$  fortgesetzt. Wir können nun die Funktion  $u$  zusätzlich  $2l$ -periodisch fortsetzen durch

$$\begin{aligned} u(x_1 + 2l_1, x_2, \dots, x_n) &:= u(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ u(x_1, x_2 + 2l_2, x_3, \dots, x_n) &:= u(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

für  $x \in \Omega'$ . Die Funktion  $f$  setzen wir ebenso fort (ungerade auf  $\Omega'$  und dann periodisch). Damit sind nun  $u$  und  $f$  zu Funktionen auf  $\hat{\Omega} := (-l_1, 2l_1) \times \dots \times (-l_n, 2l_n)$  fortgesetzt.

*Schritt 2: Gleichung für die fortgesetzten Funktionen.* Wir behaupten, dass die Gleichung auf dem vergrößerten Gebiet gilt,

$$(10.3) \quad -\Delta u = f \text{ auf } \hat{\Omega}.$$

Formal rechnen wir wie folgt. Wir führen die Spiegelung  $R_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$  ein und berechnen für die gespiegelte Funktion  $v := -u \circ R_1$

$$\begin{aligned} \partial_1 v &= \partial_1 u \circ R_1, \partial_k v = -\partial_k u \circ R_1 \text{ für } k \geq 2, \\ \partial_1^2 v &= -\partial_1^2 u \circ R_1, \partial_k^2 v = -\partial_k^2 u \circ R_1 \text{ für } k \geq 2, \\ \Rightarrow \Delta v &= -(\Delta u) \circ R_1. \end{aligned}$$

Für einen echten Beweis dürfen wir keine zweiten Ableitungen von  $u$  verwenden. Wir betrachten also eine Testfunktion  $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega'_1)$  für das Gebiet  $\Omega'_1 = (-l_1, l_1) \times (0, l_2) \times \dots \times (0, l_n)$ . Wir führen zur Funktion  $\varphi$  noch deren ungeraden Anteil ein,

$$\begin{aligned} \varphi_{as}(x) &= \frac{1}{2}(\varphi(x) - \varphi(R_1 x)) \text{ mit} \\ 2\nabla \varphi_{as}(x) &= \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi(x) \\ \partial_2 \varphi(x) \\ \vdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\partial_1 \varphi(R_1 x) \\ \partial_2 \varphi(R_1 x) \\ \vdots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen  $u \circ R_1 = -u$  können wir damit nun rechnen

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'_1} \nabla u \cdot \nabla \varphi &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{R_1 \Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \\
&= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} \nabla(u \circ R_1) \cdot \nabla(\varphi \circ R_1) \\
&= 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_{as} = 2 \int_{\Omega} f \varphi_{as} \\
&= \int_{\Omega} f \varphi + \int_{R_1 \Omega} f \varphi = \int_{\Omega'_1} f \varphi.
\end{aligned}$$

da  $u$  in  $\Omega$  schwach  $-\Delta u = f$  löst und  $\varphi_{as}$  eine zulässige Testfunktion ist. Die anderen Spiegelungen  $R_k$  werden wie die Spiegelung in der ersten Koordinatenrichtung  $R_1$  behandelt. Damit ist die Gleichung (10.3) nachgewiesen.

*Schritt 3: Abschneiden der Lösung und Beweisschluss.* Nun schneiden wir die Lösung  $u$  ab. Mit einer Funktion  $\eta \in \mathcal{D}(\hat{\Omega})$  mit  $\eta \equiv 1$  auf  $\Omega$  setzen wir  $U := u\eta$ . Diese neue Funktion erfüllt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \nabla U \cdot \nabla \varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^n} u \nabla \eta \cdot \nabla \varphi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla(\eta \varphi) - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot (\nabla \eta) \varphi + \int_{\mathbb{R}^n} u \nabla \eta \cdot \nabla \varphi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot (\eta \varphi) - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot (\nabla \eta) \varphi + \int_{\mathbb{R}^n} u \nabla \eta \cdot \nabla \varphi.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite beschreibt die Anwendung einer Linearform auf  $\varphi$ . Daher löst  $U$  die Gleichung

$$-\Delta U = f\eta - \nabla u \cdot \nabla \eta - \nabla \cdot (u \nabla \eta) =: F$$

in der schwachen Form auf  $\hat{\Omega}$ . Wegen  $u \in H^1(\hat{\Omega})$  ist die rechte Seite  $F$  eine  $L^2(\hat{\Omega})$ -Funktion.

Wir müssen nun also die Behauptung nur noch für eine Funktion mit kompaktem Träger nachweisen, sind also das Problem der Randbedingungen losgeworden. Nach Lax-Milgram gilt  $U \in H^1(\hat{\Omega})$ . Wir differenzieren in eine Richtung  $k \leq n$  und erhalten für die Distributionsableitung  $V = \partial_k U \in L^2(\hat{\Omega})$  die Gleichung (im Distributionssinn)

$$-\Delta V = \partial_k F \in H^{-1}(\hat{\Omega}).$$

Wieder nach Lax-Milgram (und wegen der Eindeutigkeit von Distributionslösungen von  $-\Delta u = f$ ,  $u$  mit kompaktem Träger) ist dann  $V \in H^1(\hat{\Omega})$ . Da dies für alle  $k \leq n$  gilt, erhalten wir gerade  $U \in H^2(\hat{\Omega})$ .

In allen Schritten gelten die jeweils zugehörigen Abschätzungen, insbesondere

$$\|u\|_{H^1(\hat{\Omega})} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \Rightarrow \|F\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leq C\|f\|_{L^2} \Rightarrow \|V\|_{H^1(\hat{\Omega})} \leq C\|f\|_{L^2},$$

also auch die behauptete Abschätzung (10.1), denn auf  $\Omega$  gilt  $U = u$ .  $\square$

**BEMERKUNG 10.2.** *Wir betrachten kleine Rechteckgebiete variabler Größe,  $\Omega_\lambda := \lambda\Omega$ , mit  $\lambda \in (0, 1]$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein festes Gebiet. Dann gilt*

$$(10.4) \quad \|u\|_{H^2(\Omega_\lambda)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega_\lambda)},$$

mit  $C$  unabhängig von  $\lambda$ .

**BEWEIS.** Für  $u \in H_0^1(\Omega_\lambda)$  setzen wir  $U(x) = u(\lambda x)$ ,  $U \in H_0^1(\Omega)$  und  $F(x) = \lambda^2 f(\lambda x)$ ,  $F \in L^2(\Omega)$ . Dann gilt

$$-\Delta U = F \text{ in } \Omega.$$

Also finden wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega_\lambda)}^2 &= \lambda^n \lambda^{-2} \|D^2 U\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \lambda^n \lambda^{-2} \|F\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Die Norm der zweiten Ableitungen ist also von der Gebietsgröße unabhängig. Die Normen der niedrigeren Ableitungen werden durch die Poincaré-Konstante kontrolliert und diese wird kleiner für kleinere Gebiete.  $\square$

Wir wollen nun allgemeine elliptische Differentialoperatoren betrachten. Sei also  $L : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  definiert durch

$$(10.5) \quad L : u \mapsto -\operatorname{div}(A \cdot \nabla u) + b \cdot \nabla u + c u.$$

Wieder wollen wir die  $H^2$ -Regularität von Lösungen feststellen.

**SATZ 10.3.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit Lipschitz-Rand und  $\partial\Omega$  von der Klasse  $C^2$ . Für die Koeffizienten gelte  $A \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $b, c \in L^\infty$ , und  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann gilt für Lösungen  $u \in H^1(\Omega)$  von*

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

die Regularität  $u \in H^2(\Omega)$  und die Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

mit  $C = C(\|\partial\Omega\|_{C^2}, \|A\|_{C^1}, \|b\|_{L^\infty}, \|c\|_{L^\infty})$  unabhängig von  $u$  und  $f$ .

BEWEIS. *Schritt 1:*  $L = -\Delta$ . Wir überdecken  $\Omega$  mit Rechtecken  $U_j$ . Diese sollen entweder keinen Rand enthalten, oder sie sollen so gewählt sein, dass  $\partial\Omega \cap U_j$  der Graph einer  $C^2$ -Funktion  $g$  ist mit  $|\nabla g|$  klein. Welche Kleinheit wir für  $\nabla g$  fordern, legen wir später fest (unabhängig von  $u$  und  $f$ ). Wir lokalisieren das Problem mit einer zugehörigen Teilung der 1,  $\eta_j$ . Die Funktionen  $u\eta_j$  erfüllen homogene Dirichlet-Bedingungen in  $U_j$ . Die rechten Seiten  $f_j$  sind

$$-\Delta(u\eta_j) = f_j := f\eta_j - 2\nabla\eta_j \cdot \nabla u - \Delta\eta_j u,$$

also beschränkt in  $L^2(U_j)$ , denn  $u \in H^1(\Omega)$  folgte schon aus Lax-Milgram. Wir wollen nun die  $H^2$ -Abschätzung im Rechteck  $U_j$  nachweisen. Ist dies geschehen, so folgt die  $H^2$ -Abschätzung auf  $\Omega$  wegen der Dreiecksungleichung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left\| \sum_j u\eta_j \right\|_{H^2(\Omega)} \leq C \sum_j \|u\eta_j\|_{H^2(U_j)}.$$

Für Rechtecke  $U$ , die den Rand nicht treffen, ist die Aussage bereits in Satz 10.1 gezeigt worden.

Sei nun also  $U$  ein Rechteck, welches den Rand trifft. Mit der Transformation  $\Phi : (\tilde{x}, x_n) \mapsto (\tilde{x}, g(\tilde{x}) + x_n)$  können wir den Rand geradebiegen: Die Funktion  $v := u \circ \Phi$  lebt auf einem Rechteck und erfüllt homogene Dirichlet-Randbedingungen. Die Gleichung  $-\Delta u = f$  transformiert sich in die folgende Gleichung für  $v$  (mit Summationskonvention)

$$\begin{aligned} -\Delta v &= -\partial_i \partial_j u \partial_k \Phi_i \partial_k \Phi_j - \partial_i u \partial_k^2 \Phi_i \\ &= -\partial_i \partial_j u (\partial_k \Phi_i \partial_k \Phi_j - \delta_{ik} \delta_{jk}) - \partial_i u \partial_k^2 \Phi_i + f. \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen  $\partial_k^2 \Phi_i$  sind beschränkt, weil  $\partial\Omega \in C^2$ . Satz 10.1 liefert für  $v$  (wir verwenden, dass die  $H^2$ -Norm von  $u$  abschätzbar ist durch die  $H^2$ -Norm von  $v$ )

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^2} &\leq C \|f - \partial_i u \partial_k^2 \Phi_i\|_{L^2} + C \|\partial_k \Phi_i \partial_k \Phi_j - \delta_{ik} \delta_{jk}\|_{L^\infty} \|u\|_{H^2} \\ &\leq C \|f\|_{L^2} + C\varepsilon \|v\|_{H^2}, \end{aligned}$$

falls  $\|\nabla g\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$ . Dabei ist wichtig, dass die Konstante  $C$  weder von  $f$  und  $u$ , noch von der Kleinheit der Rechtecke abhängt; dies folgt aus Bemerkung 10.2. Für kleines  $\varepsilon > 0$  können wir den letzten Term absorbieren und finden das Ergebnis. Dies zeigt die Aussage für  $L = -\Delta$  in allgemeinen  $C^2$ -Gebieten.

Wir wollen noch bemerken, dass man das formal korrekte Argument etwas anders formulieren muss, denn wir wissen ja  $v \in H^2$  noch nicht. Streng genommen muss man die obige  $v$ -Gleichung mit einer Iteration

lösen und findet dadurch eine Lösung  $\tilde{v} \in H^2$ . Wegen der Eindeutigkeit gilt dann  $v = \tilde{v}$  und damit  $v \in H^2$ .

*Schritt 2:*  $a_{ij}(x) = a_{ij}^0$  konstant, allgemeiner Fall für  $b, c, \Omega$ . Zunächst stellen wir fest, dass wir wieder  $H^1$ -Abschätzungen für  $u$  haben. Daher sind die Terme  $b \cdot \nabla u$  und  $c u$  beschränkt in  $L^2(\Omega)$  und können als Modifikation von  $f$  aufgefasst werden. Wir erwarten von Lösungen, dass  $\partial_i \partial_j u = \partial_j \partial_i u$ , also ersetzen wir die Matrix  $A^0 = a_{ij}^0$  durch ihren symmetrischen Anteil  $A_{sym}$ . Nun wählen wir eine orthogonale Basis des  $\mathbb{R}^n$  bestehend aus den Eigenvektoren  $e_k$  von  $A_{sym}$  zu den (positiven, wegen Elliptizität) Eigenwerten  $\lambda_k^2$ . Bezüglich dieser Basis ist  $A_{sym}$  diagonal. Indem wir das Gebiet in Richtung  $e_k$  um den Faktor  $\lambda_k$  stauchen, transformieren wir das Problem in ein Problem für den Laplace-Operator. Für diesen wurde das Ergebnis in Schritt 1 gezeigt.

Man verwendet nun, dass für die  $H^2$ -Lösung  $u$  des symmetrischen Problems tatsächlich  $\partial_i \partial_j u = \partial_j \partial_i u$  in schwachem Sinne gilt. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung hat man also das Ausgangsproblem betrachtet.

*Schritt 3: Allgemeiner Fall,  $a_{ij} = a_{ij}(x)$ .* Wieder überdecken wir  $\Omega$  mit kleinen Gebieten  $U_j$  und lokalisieren. Wir nutzen diesmal aus, dass  $a_{ij}$  wegen  $a_{ij} \in C^1$  fast konstant ist in jedem kleinen Gebiet  $U$ . Wir schreiben für  $x_0 \in U$  und die (lokalisierte) Lösung  $u$

$$-a_{ij}(x_0) \partial_i \partial_j u + b \cdot \nabla u + c u = f + (a_{ij}(\cdot) - a_{ij}(x_0)) \partial_i \partial_j u.$$

Schritt 2 für Rechtecke liefert

$$\|u\|_{H^2} \leq C (\|f\|_{L^2} + \|a_{ij}(\cdot) - a_{ij}(x_0)\|_{L^\infty} \|u\|_{H^2}).$$

Wieder kann für kleine Gebiete der zweite Term in die linke Seite absorbiert werden. Wieder verwenden wir das Argument aus Schritt 2 und finden das gewünschte Ergebnis.  $\square$

Man kann das obige Verfahren  $k$  mal durchführen und erhält dann eine um  $k$  Stufen höhere Regularität.

**COROLLAR 10.4.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit Lipschitz-Rand und  $\partial\Omega$  von der Klasse  $C^{k+2}$ . Für die Koeffizienten gelte  $A \in C^{k+1}(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $b, c \in W^{k, \infty}$ , und  $f \in H^k(\Omega)$ . Dann gilt für Lösungen  $u$  von*

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

die Regularität

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C (\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

**10.1. Regularität in anderen Funktionenräumen.** Grob gesprochen haben wir gesehen, dass

$$f \in L^2 \quad \Rightarrow \quad D^2u \in L^2$$

mit zugehörigen Abschätzungen gilt. Andere Regularitätsaussagen werden meistens über eine Darstellungsformel wie in (6.2) nachgewiesen, also über

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \Phi(x-y) dy.$$

Man kann mit dieser Formel für  $f$  mit kompaktem Träger die Hölder-Norm von  $u$  abschätzen. Man findet für jedes  $R > 0$  und  $\alpha \in (0, 1)$  eine Konstante  $C = C(R, \alpha)$ , so dass

$$(10.6) \quad \|D^2u\|_{C^\alpha(B_R(0))} \leq C \|f\|_{C^\alpha}.$$

Dies ist eine *Schauder-Abschätzung* für Lösungen des inhomogenen Problems. Für die entsprechende Rechnung verweisen wir auf das Buch von DiBenedetto.

Im Vergleich zu unserer Regularitätsabschätzung in Satz 10.3 ist lediglich der Grundraum  $L^2(\Omega)$  durch den Raum  $C^\alpha(\Omega)$  ersetzt worden. Tatsache ist, dass die innere Abschätzung für zweite Ableitungen, analog zu (10.6), in vielen Grundräumen gilt, interessant sind dabei die  $C^\alpha$ - und die  $L^p$ -Räume. Allerdings gilt auch: in vielen natürlich erscheinenden Grundräumen ist die Abschätzung falsch.

**Abschätzung gilt in:**  $C^\alpha(\Omega)$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ .

**Abschätzung gilt nicht in:**  $C^0(\Omega)$ ,  $C^{0,1}(\Omega)$ ,  $L^1(\Omega)$ ,  $L^\infty(\Omega)$ .

Begründung, dass keine Abschätzung der Form

$$\|D^2u\|_{L^1(B_R(0))} \leq C \|f\|_{L^1}$$

gelten kann: Wir betrachten eine Diracfolge  $f_k \rightarrow \delta_0$  mit zugehörigen Lösungen  $u_k$ . Die  $f_k$  sind beschränkt in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Für alle  $\varepsilon > 0$  gilt aber

$$u_k \rightarrow \Phi \quad \text{in } C^2(\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)),$$

also insbesondere

$$\partial_1 \partial_2 u_k(x) \rightarrow \partial_1 \partial_2 \Phi(x) = \frac{1}{\omega_n} \frac{x_1 x_2}{|x|^{n+2}}.$$

für alle  $x \neq 0$ . Die rechte Seite hat unbeschränkte  $L^1$ -Norm, insbesondere divergiert also auch die  $L^1$ -Norm der  $D^2u_k$ .

## Weitere Eigenschaften und Verfahren

### 11. Weitere Aussagen über harmonische Funktionen

Wir betrachten in diesem Abschnitt offene Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und Funktionen  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  mit  $\Delta u = 0$ . Mit der Voraussetzung  $u$  *harmonisch* meinen wir solche Funktionen.

Zur Regularität: Wir haben in den Übungen nachgewiesen, dass schwach harmonische Funktionen  $u \in H^1$  auch im klassischen Sinne harmonisch sind. Da wir in diesem Abschnitt nur Aussagen für das Gebietsinnere beweisen, gelten alle Aussagen also auch für (zunächst) nur schwach harmonische Funktionen.

#### 11.1. Innere Gradientenabschätzung.

**SATZ 11.1.** *Sei  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ ,  $B_R(x_0) \subset \Omega$  und  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  ein Multiindex mit  $k = |\alpha| \geq 0$ . Dann gilt mit  $C = C(n, k)$  die Abschätzung*

$$(11.1) \quad |D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C}{R^{n+k}} \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Für die Konstante  $C(n, k)$  gilt  $C(n, k) \leq (C_0(n)k)^k$ .

**BEWEIS.** Wir können  $x_0 = 0$  annehmen und gehen für  $r = R/2$  auf die Kugel  $B_r(0)$  über. Dann gilt für  $y$  auf dem Rand,  $y \in \partial B_r(0)$ ,

$$u(y) = \int_{B_r(y)} u \leq \frac{1}{r^n \omega_n} \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

In Punkten  $x$  nahe 0 verwenden wir nun die Green'sche Funktion,

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

die Ableitungen lauten daher mit  $y_0 = (r, 0, \dots, 0) = r e_1$

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(0)| &\leq \sup_{\partial B_r(0)} |u| \cdot \int_{\partial B_r(0)} \left| D^\alpha \left( \frac{r^2 - |x|^2}{|x - y_0|^n} \right) \right| \frac{1}{n\omega_n r} d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &\leq C r^{-n} \|u\|_{L^1(\Omega)} r^{-n-k+2} r^{n-1-1} \\ &= C' R^{-n-k} \|u\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Abschätzung. Der Faktor  $C(n, k)$  enthält den Vorfaktor, der bei  $k$ -facher Differentiation entsteht. Dieser wächst höchstens wie  $k^k$ .  $\square$

Die “typische harmonische Funktion” in zwei Dimensionen ist  $u = r^m \sin(m\varphi)$ . Diese Funktion ist harmonisch für alle  $m$  wegen  $\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 + \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r)$ . Es gilt auf Kugeln  $B_R(0)$  und  $x = R/2 e_1 \in B_R$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^1(B_R)} &\sim R^n \cdot R^m, \\ |D^\alpha u(x)| &\sim R^{m-|\alpha|}. \end{aligned}$$

### 11.2. Liouville Theorem.

**SATZ 11.2.** *Sei  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch und beschränkt. Dann ist  $u$  konstant.*

**BEWEIS.** Sei  $|u|$  beschränkt durch  $M > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Die Abschätzung (11.1) liefert für jedes  $R > 0$

$$(11.2) \quad |\nabla u(x)| \leq \frac{C(n, 1)}{R^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_R(0))} \leq CR^{-1}M.$$

Wir betrachten  $R \rightarrow \infty$  und schließen  $\nabla u(x) = 0$ .  $\square$

**11.3. Analytizität.** Eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *analytisch*, falls zu jedem Punkt  $x_0 \in \Omega$  eine Umgebung  $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$  existiert, in welcher die Taylorreihe von  $u$  zum Entwicklungspunkt  $x_0$  gegen  $u$  konvergiert, also

$$u(x) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x_0) (x - x_0)^\alpha \quad \forall x \in B_\varepsilon(x_0).$$

**SATZ 11.3.** *Sei  $u$  harmonisch in  $\Omega$ . Dann ist  $u$  analytisch in  $\Omega$ .*

**BEWEIS.** Wir wählen  $x_0 \in \Omega$  mit  $B_r(x_0) \subset \Omega$ . Wir wollen zunächst zeigen, dass die Taylor-Reihe für  $u$  im Entwicklungspunkt  $x_0$ ,

$$T_{x_0}^u(x) := \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x_0) (x - x_0)^\alpha,$$

für  $x$  in einer Kugel  $B_\varepsilon(x_0)$  konvergiert. Dafür müssen wir die Koeffizienten der Potenzreihe abschätzen.

Von der Differenzierbarkeitsordnung  $|\alpha| = k$  gibt es weniger als  $n^k$  verschiedene  $\alpha$ . Der Term  $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$  hat immer  $k$  Faktoren, und  $\alpha!$  ist mindestens  $([k/n]!)^n$  (minimal für gleichmäßige Verteilung der Einträge, die eckige Klammer bedeutet den ganzzahligen Anteil), also

$$\sum_{|\alpha|=k} \left| \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x_0) (x - x_0)^\alpha \right| \leq \frac{n^k}{([k/n]!)^n} (C_0(n)k)^k r^{-n-k} |x - x_0|^k.$$

Die Stirling-Formel liefert  $k^{k+1/2} \sim k!e^k$ . Damit sind die Faktoren  $([k/n]!)^n$  und  $k^k$  vergleichbar bis auf Faktoren der Form  $\lambda^k$ . Falls wir annehmen, dass  $|x - x_0| \leq \varepsilon$  für ein kleines  $\varepsilon > 0$ , so erhalten wir

$$\sum_{|\alpha|=k} \left| \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x_0) (x - x_0)^\alpha \right| \leq C \lambda^k \varepsilon^k,$$

also die absolute Konvergenz der Reihe.

Wir müssen nun zeigen, dass die Reihe tatsächlich gegen  $u$  konvergiert. Nach der Restgliedformel für die Taylorreihe (siehe z.B. Forster II) gilt

$$\begin{aligned} R_K(x) &:= u(x) - \sum_{|\alpha| < K} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x_0) (x - x_0)^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=K} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x_0 + \Theta(x - x_0)) (x - x_0)^\alpha \end{aligned}$$

für ein  $\Theta \in [0, 1]$ . Die obigen Abschätzungen bleiben aber auch gültig, falls  $D^\alpha u$  in Punkten  $x_0 + \Theta(x - x_0) \in B_\varepsilon(x_0)$  ausgewertet wird. Daher gilt

$$|R_K| \leq C \lambda^K \varepsilon^K \rightarrow 0 \text{ für } K \rightarrow \infty,$$

falls  $\varepsilon > 0$  klein genug gewählt wurde. Dies war zu zeigen.  $\square$

**11.4. Harnack Ungleichung.** Wir sagen, dass  $\Omega_0$  kompakt in  $\Omega$  enthalten ist, wenn der Abschluss  $\bar{\Omega}_0$  kompakt ist und  $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ .

**SATZ 11.4.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  zusammenhängend und  $\Omega_0$  kompakt in  $\Omega$  enthalten. Dann gilt für eine Konstante  $C = C(\Omega, \Omega_0)$  folgende Aussage. Für jede harmonische Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u \geq 0$  in  $\Omega$  gilt*

$$(11.3) \quad \sup_{\Omega_0} u \leq C \inf_{\Omega_0} u.$$

**BEWEIS.** Wir wollen zunächst zeigen, dass man Werte in benachbarten Punkten immer vergleichen kann. Wir wählen  $r < \frac{1}{2} \text{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$ . Für zwei Punkte  $x, y \in \Omega_0$  mit  $|x - y| \leq r$  gilt dann unter Verwendung der Nichtnegativität

$$u(x) = \int_{B_{2r}(x)} u \geq \frac{1}{(2r)^n \omega_n} \int_{B_r(y)} u = \frac{1}{2^n} \int_{B_r(y)} u = \frac{1}{2^n} u(y).$$

Wir können  $\bar{\Omega}_0$  mit endlich vielen Kugeln  $B_{r/2}(x_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$  überdecken und die Werte in zwei Punkten einer beliebigen Kugel vergleichen. Für zwei beliebige Punkte  $x, y \in \Omega_0$  wenden wir diesen Vergleich maximal  $N$ -mal an und erhalten  $u(y) \leq (2^n)^N u(x)$ .  $\square$

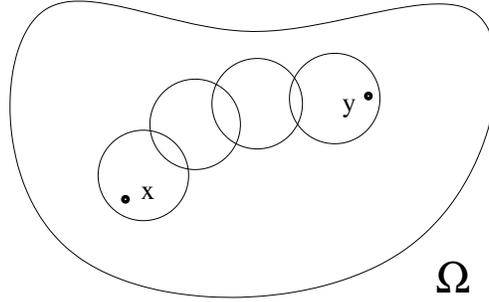


ABBILDUNG 13. Zum Beweisschluss der Harnack-Ungleichung.

## 12. Das Perron-Verfahren

**12.1. Subharmonische Funktionen.** Wir wollen nun den Begriff einer subharmonischen Funktion einführen. Dafür gibt es mindestens zwei Möglichkeiten. Zum einen den differentiellen Ansatz: Ein  $u \in C^2$  nennen wir subharmonisch, falls  $-\Delta u \leq 0$ . Zum anderen gibt es den geometrischen Ansatz: Eine Funktion heißt subharmonisch, falls sie unterhalb von vergleichbaren harmonischen Funktionen liegt.

- (i) Ein  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  nennen wir subharmonisch *im Distributions-sinn*, falls  $-\Delta \langle u \rangle \leq 0$  im Distributionssinn. Dies bedeutet

$$-\Delta \langle u \rangle (\varphi) \leq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \varphi \geq 0.$$

- (ii) Eine Funktion  $u \in C^0$  heißt subharmonisch *im Mittelwertsinn*, falls für alle  $B_r(x) \subset \Omega$  gilt

$$u(x) \leq \int_{\partial B_r(x)} u.$$

- (iii) Eine Funktion  $u \in C^0$  heißt subharmonisch *im Viskositätssinn*, falls sie lokal unterhalb von harmonischen Vergleichsfunktionen liegt.

Wir verwenden hier Konzept (iii).

**DEFINITION 12.1 (Subharmonische Funktionen).** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u \in C^0(\Omega)$ . Wir nennen  $u$  subharmonisch (im Viskositätssinn), falls für jede Kugel  $B_r(x_0) \subset \Omega$  und jede harmonische Funktion  $h \in C^2(B_r(x_0)) \cap C^0(\bar{B}_r(x_0))$  mit  $h \geq u$  auf  $\partial B_r(x_0)$  gilt

$$u \leq h \quad \text{auf } B_r(x_0).$$

Für glatte Funktionen sind die drei Konzepte äquivalent. Wir wollen zunächst zeigen, dass wieder ein Maximumprinzip gilt.

**SATZ 12.2.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend,  $u \in C^0(\Omega)$  subharmonisch. Falls  $u$  sein Maximum in einem inneren Punkt  $x_0 \in \Omega$  annimmt, so gilt:  $u$  ist konstant auf  $\Omega$ .*

**BEWEIS.** Sei  $x \in \Omega$  das Maximum, also  $u(x) = M := \sup\{u(y) | y \in \Omega\}$  (insbesondere existiert das Supremum und ist endlich). Wir wählen  $r > 0$  mit  $\bar{B}_{2r}(x) \subset \Omega$ . Zu den stetigen Randwerten von  $u$  auf  $\partial B_r(x)$  gibt es eine harmonische Fortsetzung  $h : B_r(x) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert mit der Green'schen Funktion. Wir vergleichen nun  $u$  mit  $h$ .

Da  $u$  subharmonisch ist, gilt  $u \leq h$  auf  $B_r(x)$ . Dann gilt insbesondere  $h(x) \geq u(x) = M$ . Wegen der Mittelwertegenschaft für die Funktion  $h$  (gilt für die Green'sche Lösung) gilt

$$M \leq h(x) = \int_{\partial B_r(x)} h = \int_{\partial B_r(x)} u \leq M.$$

Die Gleichheit impliziert aber, dass  $u$  konstant gleich  $M$  ist auf  $\partial B_r(x)$ . Da  $r$  auch kleiner gewählt werden kann, also  $u \equiv M$  in einer Umgebung von  $x$ . Die Menge  $\{x \in \Omega | u(x) = M\}$  ist dann offen und abgeschlossen in  $\Omega$ , also ganz  $\Omega$ .  $\square$

**12.2. Die Perron-Methode.** In diesem Abschnitt sei immer  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Wir definieren zunächst die harmonische Liftung einer Funktion.

**DEFINITION 12.3** (Harmonische Liftung). *Sei  $u \in C^0(\Omega)$  viskositäts-subharmonisch und  $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$ . Wir definieren die harmonische Liftung als die Funktion  $U \in C^0(\Omega)$ ,*

$$(12.1) \quad U(x) := \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \setminus B_r(x_0), \\ h(x) & x \in B_r(x_0), \end{cases}$$

wobei  $h \in C^0(B_r(x_0))$  die harmonische Funktion zu den Randwerten  $h|_{\partial B_r} = u|_{\partial B_r}$  ist.

**Bemerkung:** Die Funktion  $h$  wird mit der Green'schen Funktion auf Kugeln definiert. Wegen  $u$  subharmonisch gilt  $U \geq u$ .

**SATZ 12.4.** *Für  $u$  und  $U$  wie in Definition 12.3 gilt:  $U$  ist ebenfalls viskositäts-subharmonisch.*

**BEWEIS.** Wir müssen zwei Kugeln betrachten. Auf  $B_r := B_r(x_0)$  haben wir  $u$  durch  $h$  ersetzt. Als Testkugel betrachten wir  $B_\rho := B_\rho(\xi_0)$ . Dort müssen wir  $U$  mit harmonischen Funktionen  $\eta : B_\rho(\xi_0) \rightarrow \mathbb{R}$  vergleichen, wobei  $\eta \geq U$  auf  $\partial B_\rho$ .

1) Zeige: Auf  $B_\rho \setminus B_r$  gilt  $\eta \geq U$ .

Tatsächlich gilt dort  $U = u$ . Auf  $\partial B_\rho$  gilt  $\eta \geq U \geq u$ . Nach Definition der Subharmonizität von  $u$  also  $\eta \geq u$ .

2) Zeige: Auf  $\Sigma := B_\rho \cap B_r$  gilt  $\eta \geq U$ .

Hier gilt  $U = h$ , insbesondere sind sowohl  $\eta$  als auch  $U$  harmonisch. Wir müssen also lediglich die jeweiligen Randwerte vergleichen.

Auf dem Rand  $\partial B_\rho \cap B_r$  gilt  $\eta \geq U$  nach Wahl von  $\eta$ . Auf dem Rand  $\partial B_r \cap B_\rho$  gilt  $\eta \geq u$  nach 1). Wir wenden auf der Menge  $\Sigma$  das Maximumprinzip auf die harmonische Funktion  $h - \eta$  an und finden  $\eta \geq h$  auf  $\Sigma$ .  $\square$

Zu stetigem  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir die Perron-Klasse

$$(12.2) \quad \mathcal{P}_g = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v \text{ visk.-subharmonisch und } v \leq g \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Zunächst stellen wir fest, dass die konstante Funktion  $v$  mit Wert  $v \equiv \inf_{\partial\Omega} g$  in  $\mathcal{P}_g$  liegt. Tatsächlich ist  $v$  subharmonisch und  $v \leq g$  auf  $\partial\Omega$  ist ebenfalls erfüllt. Weiterhin haben wir für alle  $v \in \mathcal{P}_g$  eine obere Abschätzung. Wegen des Maximumprinzips aus Satz 12.2 gilt  $v \leq \sup_{\partial\Omega} g$ . Das Supremum im Perron-Satz unten ist also wohldefiniert und endlich.

**BEMERKUNG 12.5.** *Das Maximum zweier subharmonischer Funktionen ist wieder subharmonisch.*

**BEWEIS.** Seien  $u$  und  $v$  subharmonisch auf  $\Omega$ ,  $w = \max\{u, v\}$  und  $B_r(x)$  eine Testkugel. Für eine harmonische Funktion  $h : B_r(x) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h \geq w$  auf  $\partial B_r(x)$  gilt:

$$h \geq u \text{ auf } \partial B_r(x), \text{ also } h \geq u \text{ in } B_r(x).$$

Ebenso für  $v$ . Es folgt  $h \geq w$  in  $B_r(x)$ .  $\square$

**SATZ 12.6 (Perron-Lösung).** *Sei  $\Omega$  beschränkt und  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist die Funktion  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$(12.3) \quad u(x) := \sup \{v(x) \mid v \in \mathcal{P}_g\},$$

*von der Klasse  $C^2(\Omega)$  und harmonisch.*

**BEWEIS.** Wir betrachten einen beliebigen Punkt  $x \in \Omega$ . Zu  $u(x)$  gibt es Funktionen  $v_k \in \mathcal{P}_g$  mit  $v_k(x) \rightarrow u(x)$ . Indem wir jeweils zum Supremum zweier Funktionen übergehen, können annehmen, dass alle  $v_k$  die Schranken

$$\inf_{\partial\Omega} g \leq v_k \leq u \leq \sup_{\partial\Omega} g$$

erfüllen, und zusätzlich  $v_{k+1} \geq v_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Nun betrachten wir  $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$  und die harmonischen Liftungen  $V_k$  von  $v_k$ . Nach Satz 12.4 gilt  $V_k \in \mathcal{P}_g$ , außerdem gilt  $v_k \leq V_k \leq u$  und  $V_k(x) \rightarrow u(x)$ . Die Funktionenfolge  $V_k : \partial B_r(x) \rightarrow \mathbb{R}$  ist gleichmäßig beschränkt und monoton wachsend, konvergiert also nach dem Satz von Beppo Levi in

$L^1(\partial B_r(x))$  gegen eine beschränkte Grenzfunktion  $\tilde{V}$ . Damit konvergieren auch die harmonischen Fortsetzungen im Inneren in  $C_{loc}^2$  gegen die harmonische Fortsetzung  $V$  von  $\tilde{V} \in L^1(\partial B_r(x))$  (Darstellung mit Green'scher Funktion). Wenn wir zeigen, dass  $u = V$  in  $B_r(x)$ , dann ist  $u$  harmonisch und  $C^2$  im Inneren.

Annahme: Sei  $y \in B_r(x)$  mit  $V(y) < u(y)$ . Dann existiert zu  $u(y)$  eine subharmonische Funktion  $w \in \mathcal{P}_g$  mit  $w(y) > V(y)$ . Wir betrachten nun die Folge subharmonischer Funktionen  $w_k := \max\{w, V_k\}$  und deren harmonische Liftungen  $W_k$  auf  $B_r(x)$ . Nach den obigen Argumenten finden wir wieder eine harmonische Grenzfunktion  $W$  auf  $B_r(x)$ . Wir stellen fest, dass  $W$  und  $V$  beide harmonisch sind auf  $B_r(x)$ , dass  $W \geq V$  auf  $B_r(x)$  nach Konstruktion von  $w_k$ , und zusätzlich wegen  $V_k(x) \rightarrow u(x)$  auch  $W(x) = u(x) = V(x)$ . Das starke Maximumprinzip impliziert  $W \equiv V$  auf  $B_r(x)$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $W(y) \geq w(y) > V(y)$ .  $\square$

**12.3. Reguläre Randpunkte.** Es bleibt zu klären, ob die Perron-Lösung  $u$  tatsächlich auch die Randbedingung  $u = g$  erfüllt. Tatsächlich muss dies nicht der Fall sein.

BEISPIEL 12.7. Sei  $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  die Einheitskugel,  $n \geq 3$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann ist

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} -(1 - \varepsilon^{2-n})^{-1}(1 - |x|^{2-n}) & \varepsilon < |x| \leq 1, \\ -1 & |x| \leq \varepsilon \end{cases}$$

subharmonisch in  $B$ . Es folgt: Die Perronlösung auf  $\Omega := B \setminus \{0\}$  zu den Randwerten

$$g(x) := \begin{cases} 0 & x \in \partial B, \\ -1 & x = 0, \end{cases}$$

lautet  $u \equiv 0$ , nimmt also die Randbedingung in  $x = 0$  nicht an.

BEWEIS.  $u_\varepsilon$  subharmonisch: Übung. Eleganter Weg: Zeige zunächst, dass Subharmonizität eine lokale Eigenschaft ist, d.h. es reicht, sich beim Testen auf kleine Kugeln zu beschränken. Dann: Auf  $B \setminus \{0\}$  ist  $u_\varepsilon$  Maximum zweier subharmonischer Funktionen, auf  $B_\varepsilon$  ist  $u_\varepsilon$  konstant. Also ist  $u_\varepsilon$  in beiden Bereichen subharmonisch.

Zur Folgerung: Alle  $u_\varepsilon$  sind in der Perron-Klasse, es gilt also

$$u(x) \geq \sup_\varepsilon u_\varepsilon(x) = 0$$

in jedem Punkt  $x \in \Omega$ . Das Maximumprinzip für subharmonische Funktionen liefert  $u \leq 0$ .  $\square$

Das Gegenbeispiel läßt sich mit  $\log$  auch in  $n = 2$  konstruieren.

Wir wollen nun ein positives Resultat angeben. Das Beispiel zeigt, dass man eine Eigenschaft der Randpunkte voraussetzen muss.

DEFINITION 12.8. *Eine Funktion  $w \in C^0(\bar{\Omega})$  heißt Barrierenfunktion für  $x_0 \in \partial\Omega$ , falls*

- a)  $-w$  ist subharmonisch in  $\Omega$ ,
- b)  $w(x_0) = 0$  und  $w > 0$  in  $\Omega \setminus \{x_0\}$ .

*Ein Randpunkt  $x_0 \in \partial\Omega$  heißt regulär, falls eine Barrierenfunktion für  $x_0$  existiert.*

Einfacher handhabbar ist die nachfolgende Bedingung.

DEFINITION 12.9. *Wir sagen, dass  $\partial\Omega$  in  $x_0 \in \partial\Omega$  eine äußere Kugelbedingung erfüllt, falls es  $r > 0$  und  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  gibt mit*

$$B_r(\bar{x}) \cap \bar{\Omega} = \{x_0\}.$$

Man sieht leicht ein, dass jedes  $C^1$ -berandete Gebiet in jedem Randpunkt eine äußere Kugelbedingung erfüllt. Dagegen erfüllen Lipschitz-Gebiete in einspringenden Ecken keine äußere Kugelbedingung.

BEMERKUNG 12.10. *Falls  $\partial\Omega$  in  $x_0 \in \partial\Omega$  eine äußere Kugelbedingung erfüllt, so ist  $x_0$  ein regulärer Randpunkt.*

BEWEIS. In diesem Fall liefert die Fundamentallösung zum Punkt  $\bar{x}$  eine Barrierenfunktion für  $x_0$ .  $\square$

SATZ 12.11. *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet,  $g \in C^0(\partial\Omega)$  und  $x_0$  ein regulärer Randpunkt. Dann erfüllt die Perron-Lösung  $u$  aus Satz 12.6 die Randbedingung*

$$(12.4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = g(x_0).$$

BEWEIS. Idee: Wir können die Barriere  $w$  mit einem großen Faktor  $K \in \mathbb{R}$  multiplizieren um  $u$  nach oben und unten abzuschätzen.

Seien  $\varepsilon > 0$  und  $x_k \rightarrow x_0$  fest. Wähle  $r > 0$  so klein, dass

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in \partial\Omega \cap B_r(x_0).$$

Wähle nun  $K > 0$  so groß, dass

$$Kw(x) \geq 2 \sup_{\partial\Omega} |g| \quad \forall x \in \partial\Omega \setminus B_r(x_0).$$

Dann gilt  $g \geq g(x_0) - \varepsilon/2 - Kw$  auf  $\partial\Omega$ , die rechte Seite ist aber subharmonisch, also in der Perronklasse. Es folgt

$$u(x_k) \geq g(x_0) - \varepsilon/2 - Kw(x_k) \geq g(x_0) - \varepsilon \quad \forall k \geq k_0,$$

für  $k_0$  groß (Stetigkeit von  $w$  und  $w(x_0) = 0$ ).

Ähnlich die umgekehrte Ungleichung: Für alle  $v \in \mathcal{P}_g$  ist die Funktion  $v - [g(x_0) + \varepsilon/2 + Kw]$  subharmonisch und  $\leq 0$  auf dem Rand, also  $\leq 0$  in  $\Omega$  nach dem Maximumprinzip. Es folgt

$$\begin{aligned} u(x_k) &= \sup_{v \in \mathcal{P}_g} v(x_k) \leq g(x_0) + \varepsilon/2 + Kw(x_k) \\ &= [g(x_0) + \varepsilon/2 + Kw(x_k)] \leq g(x_0) + \varepsilon \quad \forall k \geq k_0, \end{aligned}$$

für  $k_0$  groß.  $\square$

Eine direkte Folgerung des Satzes lautet:

Falls alle Randpunkte von  $\partial\Omega$  regulär sind, so besitzen alle stetigen  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine harmonische Fortsetzung.

In dieser Form läßt sich die Aussage sogar umkehren:

Falls alle stetigen  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine harmonische Fortsetzung besitzen, so sind alle Randpunkte von  $\partial\Omega$  regulär.

Tatsächlich kann die Lösung zu  $g \geq 0, g(x_0) = 0$  als Barrierenfunktion für  $x_0$  gewählt werden.

### 13. Maximumprinzipien für elliptische Gleichungen

Wir betrachten hier immer beschränkte Mengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . In einem ersten Abschnitt 13.1 betrachten wir klassische Beweismethoden, die auf der Untersuchung von Krümmung und Steigung beruhen. Im nachfolgenden Abschnitt 13.2 werden wir eine Beweismethode kennenlernen, die auf dem Testen der Gleichung beruht.

Geometrische Idee für Maximumprinzipien: Falls  $u$  in  $x_0$  ein Maximum hat, so erwarten wir, dass dort zweite Ableitungen negativ sind und erste Ableitungen verschwinden, also  $Lu(x_0) > 0$ . Ein inneres Maximum ist damit für Lösungen  $u$  von  $Lu = 0$  unmöglich.

Das einzige Problem liegt darin, dass man zwar wie oben  $Lu(x_0) \geq 0$  schließen kann, aber nicht unbedingt die strikte Ungleichung ...

**13.1. Klassische Beweise für Maximumprinzipien.** Wieder untersuchen wir elliptische Differentialoperatoren  $L : H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , diesmal nicht in Divergenzform, sondern definiert durch

$$(13.1) \quad Lu(x) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_i \partial_j u(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u(x) + c(x) u(x).$$

Wieder setzen wir für ein  $\gamma > 0$  die Elliptizität voraus,

$$(13.2) \quad \xi \cdot A(x)\xi \geq \gamma|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega.$$

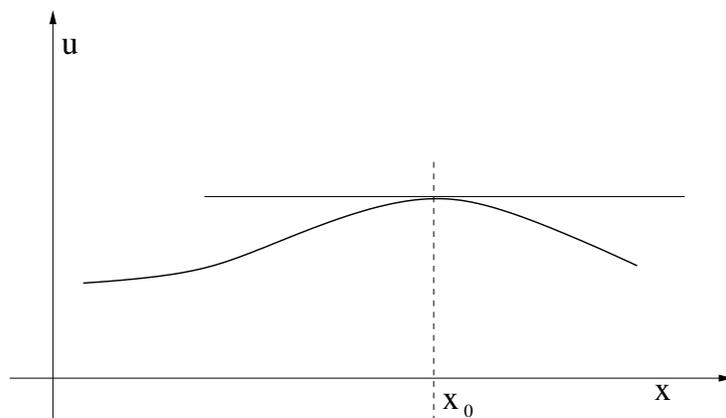


ABBILDUNG 14. Im Maximum sind zweite Ableitungen negativ und erste Ableitungen verschwinden.

Die Koeffizienten  $A = (a_{ij})$ ,  $b = (b_i)$  und  $c$  seien stetig auf  $\Omega$  und beschränkt,  $A$  sei symmetrisch. Die Symmetrie ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da wir für Lösungen  $\partial_i \partial_j u = \partial_j \partial_i u$  erhalten.

Wir haben bereits gesehen, dass wir ohne Voraussetzung an  $c$  kein Maximumprinzip erwarten können: Die Eigenfunktionen verschwinden am Rand, sind aber im Inneren nicht-trivial. Aber für  $c \geq 0$  können wir Maximumprinzipien erwarten.

**SATZ 13.1 (Schwach Maximumprinzip).** Sei  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  und  $L$  wie in (13.1) mit  $c \geq 0$ . Falls  $Lu \leq 0$  auf  $\Omega$  und  $\max_{\bar{\Omega}} u \geq 0$ , so gilt

$$\max_{\partial\Omega} u = \max_{\Omega} u.$$

Zum Namen: Ein *schwaches* Maximumprinzip erlaubt ein inneres lokales Maximum.

**BEWEIS.** Wir wollen einen Widerspruch finden zu der Annahme, dass für  $x \in \Omega$  gilt: In  $x$  ist  $u$  maximal mit  $u(x) \geq 0$  und  $u > m := \max_{\partial\Omega} u$ .

*Schritt 1:* Wir nehmen zunächst an, dass  $Lu(x) < 0$  (strikt). Wir wählen eine orthogonale Basis  $S = (v_1, \dots, v_n)$  des  $\mathbb{R}^n$ , so dass  $A(x) \cdot v_k = \lambda_k v_k$ , also

$$S^T \cdot A(x) \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \Lambda,$$

oder  $A = SAS^T$ , bzw.  $a_{ij} = \sum_k s_{ik} \lambda_k s_{jk}$ . Im Punkt  $x$  gilt (da Maximum)

$$\begin{aligned} c(x)u(x) &\geq c(x)m \geq 0, \quad b_i(x)\partial_i u(x) = 0, \\ - \sum_{i,j} a_{ij}(x)\partial_i \partial_j u(x) &= - \sum_{i,j,k} s_{ik} \lambda_k s_{jk} \partial_i \partial_j u(x) \\ &= - \sum_k \lambda_k \partial_{v_k} \partial_{v_k} u(x) \geq 0. \end{aligned}$$

Insgesamt also  $Lu(x) \geq 0$ , ein Widerspruch.

*Schritt 2: Allgemeiner Fall  $Lu(x) \leq 0$ .* Wir betrachten die Funktion  $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\mu v_1 \cdot x}$  zu  $v_1 = e_1$ . Es gilt

$$\begin{aligned} Lu_\varepsilon &= Lu + \varepsilon L(e^{\mu v_1 \cdot x}) \leq \varepsilon e^{\mu v_1 \cdot x} (-v_1 \cdot A(x)v_1 \mu^2 + b \cdot v_1 \mu + c) \\ &\leq \varepsilon e^{\mu v_1 \cdot x} (-\lambda_{\min} \mu^2 + b \cdot v_1 \mu + c), \end{aligned}$$

wobei  $\lambda_{\min} \geq \gamma$  das Minimum über  $\bar{\Omega}$  der  $v_1 \cdot A(x)v_1$  ist. Für großes  $\mu > 0$  ist der Ausdruck in den Klammern überall negativ.

Da die Funktion  $u$  ein lokales Maximum  $x$  mit  $u(x) > m$  hat, gilt für kleines  $\varepsilon > 0$  auch, dass die Funktion  $u_\varepsilon$  ein inneres Maximum größer  $m$  hat,

$$\exists \varepsilon > 0, m_\varepsilon \in (m, u(x)) \quad \exists y \in \Omega : \quad u_\varepsilon(y) > m_\varepsilon, \quad u_\varepsilon|_{\partial\Omega} \leq m_\varepsilon.$$

Wegen  $Lu_\varepsilon < 0$  auf  $\Omega$  ist dies ein Widerspruch nach Teil 1) des Beweises.  $\square$

**LEMMA 13.2** (Lemma von Hopf). *Sei  $B \subset \mathbb{R}^n$  eine Kugel und  $u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$  mit  $Lu \leq 0$ ,  $c \geq 0$ . Falls für einen Randpunkt  $x \in \partial B$  gilt*

$$u(x) \geq 0, \quad u(y) < u(x) \forall y \in B,$$

*dann gilt mit Normalenvektor  $\nu$  an  $\partial B$  auch*

$$\partial_\nu u(x) > 0.$$

*Bemerkungen:* 1) Das Vorzeichenresultat  $\partial_\nu u \geq 0$  folgt trivialerweise aus der Maximalität von  $u$  im Randpunkt. Das Ergebnis des Lemmas ist die strikte Ungleichung. 2) Im Falle  $c = 0$  muss die Nichtnegativität des Maximums nicht vorausgesetzt werden.

**BEWEIS.** Ohne Einschränkung sei  $B = B_r(0)$ .

*Schritt 1: Angabe einer Sublösung  $v$ .* Wir setzen für  $\mu > 0$

$$v(x) := e^{-\mu|x|^2} - e^{-\mu r^2} \geq 0,$$

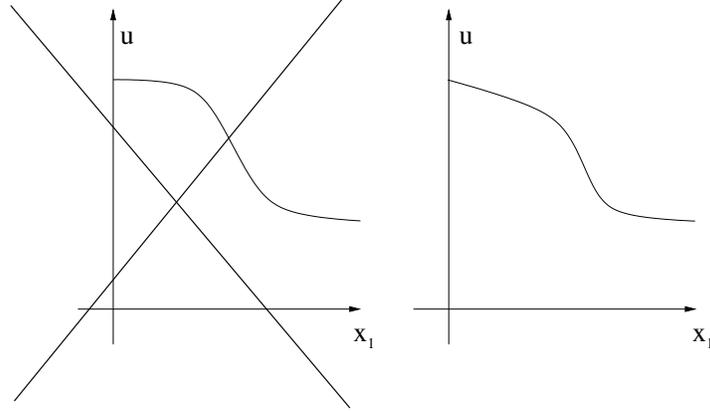


ABBILDUNG 15. Illustration des Lemmas von Hopf, dargestellt ist  $u$  entlang einer Gerade in einem zweidimensionalen Gebiet. Falls der Randpunkt ein Maximum der Funktion  $u$  ist, so muss  $u$  mit einer positiven Steigung in diesen Punkt laufen.

und berechnen (mit Summationskonvention)

$$Lv = -a_{ij}\partial_i\partial_jv + b_i\partial_iv + cv$$

$$Lv(x) = e^{-\mu|x|^2} [-4\mu^2a_{ij}(x)x_ix_j - 2\mu a_{ij}(x)\delta_{ij} + 2\mu b_i(x)x_i + c(x)] - c(x)e^{-\mu r^2}.$$

Für  $\mu$  groß und  $|x| > r/2$  ist dies negativ, also  $Lv < 0$  auf  $B_r \setminus B_{r/2}$ .

*Schritt 2: Vergleichslösung  $w = u + \varepsilon v$  unterhalb von  $u$ .* Wir betrachten nun  $w(y) := u(y) + \varepsilon v(y)$ . Wegen  $Lw \leq 0$  auf  $B_r \setminus B_{r/2}$  können wir das schwache Maximumprinzip anwenden. Auf  $\partial B_r$  gilt  $w(y) = u(y) + \varepsilon v(y) = u(y)$  mit nichtnegativem Maximum  $w(x) = u(x)$ . Auf  $\partial B_{r/2}$  gilt  $w(y) = u(y) + \varepsilon v(y) \leq u(x)$ , falls  $\varepsilon$  hinreichend klein gewählt wird. Aus dem schwachen Maximumprinzip schließen wir  $w \leq u(x)$  auf  $B_r \setminus B_{r/2}$ .

*Schritt 3: Beweisschluss.*  $w \leq u(x)$  zusammen mit  $w(x) = u(x)$  liefert die geometrische Bedingung  $\nu \cdot \nabla w \geq 0$  (Differenzierbarkeit von  $w$  liegt nach Voraussetzung vor). Wir schließen

$$\nu \cdot \nabla u = \nu \cdot \nabla w - \varepsilon \nu \cdot \nabla v \geq -\varepsilon \nu \cdot \nabla v = 2\varepsilon \mu r e^{-\mu r^2} > 0.$$

Damit ist die strikte Ungleichung gezeigt.  $\square$

**SATZ 13.3** (Starkes Maximumprinzip). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  zusammenhängend und  $L$  wie oben mit  $c \geq 0$ . Dann gilt für  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$*

mit  $Lu \leq 0$ :

$$u(x) = \max_{\bar{\Omega}} u \geq 0 \text{ für } x \in \Omega \quad \Rightarrow \quad u \text{ ist konstant.}$$

**BEWEIS.** Wir betrachten für das Maximum  $M := \max_{\bar{\Omega}} u$  die Menge  $\Sigma = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$ . Wir müssen zeigen, dass  $\Sigma = \Omega$ . Angenommen, nicht. Dann wählen wir  $z \in \Omega \setminus \Sigma$  so, dass  $r := \text{dist}(z, \Sigma) < \text{dist}(z, \partial\Omega)$ . Die Kugel  $B_r(z)$  ist dann kompakt in  $\Omega$  enthalten,  $Lu \leq 0$  gilt auf  $B_r(z)$  und  $u$  ist maximal in einem Randpunkt  $x \in \partial B_r(z)$ . Das Hopf'sche Lemma 13.2 liefert, dass in dieser Situation notwendigerweise  $\partial_\nu u(x) > 0$ . Dies ist aber im Widerspruch zur Maximalität  $u(x) = M$ .  $\square$

**13.2. Maximumprinzipien durch Testen.** Für Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir die folgende Funktion  $\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\chi(x) := \mathbf{1}_{\{u>0\}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } u(x) > 0, \\ 0 & \text{falls } u(x) \leq 0. \end{cases}$$

Weiterhin können wir den positiven Teil einer Funktion betrachten,  $(u)_+ : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(u)_+(x) := u(x) \mathbf{1}_{\{u>0\}}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{falls } u(x) > 0, \\ 0 & \text{falls } u(x) \leq 0. \end{cases}$$

Wir benötigen die folgende Aussage aus der Funktionalanalysis.

**PROPOSITION 13.4.** *Sei  $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R})$ . Dann gilt  $(u)_+ = u \chi \in H^1(\Omega)$  mit*

$$\nabla(u)_+ = (\nabla u) \chi.$$

Damit können wir nun direkt durch Testen ein Maximumprinzip beweisen.

**SATZ 13.5.** *Der elliptische Operator  $L : H^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  sei definiert durch*

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \int_{\Omega} a_{ij}(x) \partial_i u(x) \partial_j \varphi(x) + c(x) u(x) \varphi(x) \, dx \quad \forall u, \varphi,$$

*$u \in H^1(\Omega)$ ,  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , mit  $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$ ,  $c \geq 0$  und  $a_{ij}$  elliptisch.*

*Sei  $u \in H^1(\Omega)$  eine Lösung von  $Lu \leq 0$  in  $\Omega$  mit Randwerten  $u - g \in H_0^1(\Omega)$ . Für die Randbedingung gelte  $g \leq m$  fast überall für ein  $m > 0$ . Dann gilt*

$$u \leq m \quad \text{fast überall.}$$

BEWEIS. Für einen Beweis genügt es, die Gleichung mit der Funktion  $\varphi := (u - m)_+ \geq 0$  zu testen. Wir nutzen nacheinander  $Lu \leq 0$ , die Definition von  $L$ , Proposition 13.4,  $u \geq (u - m)_+$  für  $u \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
0 &\geq \langle Lu, \varphi \rangle \\
&= \int_{\Omega} a_{ij}(x) \partial_i u(x) \partial_j \varphi(x) + c(x) u(x) \varphi(x) \, dx \\
&= \int_{\Omega} a_{ij}(x) \partial_i u(x) \partial_j (u - m)(x) \chi(x) + c(x) u(x) (u - m)(x) \chi(x) \, dx \\
&= \int_{\Omega} a_{ij}(x) \partial_i (u - m)(x) \partial_j (u - m)(x) \chi(x) \\
&\quad + c(x) (u - m)(x) (u - m)(x) \chi(x) \, dx \\
&= \int_{\Omega} a_{ij}(x) \partial_i \varphi(x) \partial_j \varphi(x) + c(x) |\varphi(x)|^2 \, dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Die Gleichheit überall impliziert wegen des letzten Ausdrucks und der Elliptizität von  $a$ , dass  $\varphi$  verschwindet,  $\varphi \equiv 0$ . Dies bedeutet  $(u - m)_+ \equiv 0$ , also  $u \leq m$  fast überall.  $\square$

Teil 3

Parabolische  
Differentialgleichungen



# Darstellungsformeln

## 14. Existenz von Lösungen im Ganzraum

Das einfachste zeitabhängige Problem ist die Wärmeleitungsgleichung

$$(14.1) \quad \partial_t u - \Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \times (0, \infty).$$

Der physikalische Hintergrund (und auch das Maximumprinzip aus Teil 1, Abschnitt 2.8) legen nahe, dass wir als Daten die Wärmeverteilung  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zu Beginn und die Temperatur am Rand  $g : \partial\Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  benötigen,

$$\begin{aligned} u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{auf } \Omega, \\ u(\cdot, t) &= g(\cdot, t) && \text{auf } \partial\Omega, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Im Ganzraumproblem  $\Omega = \mathbb{R}^n$  entfällt die Angabe von  $g$ , beziehungsweise wird ersetzt durch eine Beschränktheitsforderung an  $u(\cdot, t)$ .

**Der Begriff der Halbgruppe.** Wir betrachten hier zunächst den Fall  $f = 0$ . Dann liefert eine Lösbarkeitsaussage (mit Eindeutigkeit) zum homogenen Problem eine Abbildung

$$S(t) : u_0 \mapsto u(t), \quad \text{wobei } u \text{ die Lösung der homogenen Gleichung} \\ \text{zu Startwerten } u(t=0) = u_0.$$

$S(t)$  ist der Evolutionsoperator: Für ein System im Zustand  $u_0$  gibt der Operator an, in welchem Zustand das System eine Zeit  $t$  später sein wird. Es gilt  $S(t+s) = S(t) \circ S(s)$ , denn die homogene Gleichung enthält keine explizite  $t$ -Abhängigkeit. Wegen dieser Eigenschaft heißt die Familie  $S(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  auch die *Halbgruppe* zur Evolutionsgleichung.

### Die Fundamentallösung im Ganzraum.

DEFINITION 14.1. *Wir setzen für  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $t > 0$*

$$(14.2) \quad \Phi(x, t) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

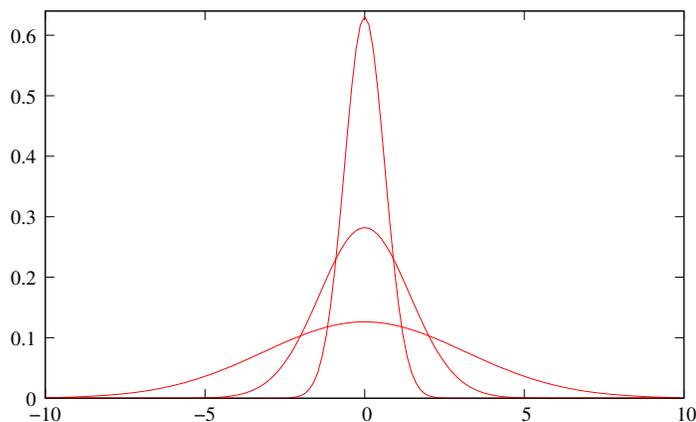


ABBILDUNG 16. Die Fundamentallösung  $\Phi(\cdot, t)$  für drei verschiedene Werte von  $t$ .

Wir setzen  $\Phi(x, t) := 0$  für  $t \leq 0$ . Die Funktion  $\Phi$  heißt die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Das Konzept ist wie bei der Fundamentallösung zum Laplaceoperator. Zunächst einmal rechnet man nach, dass  $\Phi$  Lösung außerhalb des singulären Punktes ist.

$$\begin{aligned}\nabla e^{-\frac{|x|^2}{4t}} &= -\frac{1}{2t} x e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ \Delta e^{-\frac{|x|^2}{4t}} &= \frac{1}{4t^2} |x|^2 e^{-\frac{|x|^2}{4t}} - n \frac{1}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ \partial_t \left( \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) &= -\frac{n}{2t} \left( \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) - \frac{|x|^2}{4} \frac{-1}{t^2} \left( \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right).\end{aligned}$$

Es gilt also tatsächlich  $(\partial_t - \Delta)\Phi(x, t) = 0$  im klassischen Sinne für alle  $t > 0$ .

Für den Zeitpunkt  $t = 0$  fordert man, dass  $\Phi$  die Anfangsbedingung

$$\Phi(\cdot, 0) = \delta_0$$

erfüllt. Dies ist so nicht definiert. Unser Ziel ist:  $\Phi(\cdot, t)$  beschreibt die Wärmeverteilung zur Zeit  $t$ , wenn zur Zeit  $t = 0$  die Wärmemenge 1 in dem Punkt 0 konzentriert war. Dies wird mathematisch durch das folgende Lemma ausgedrückt.

LEMMA 14.2. Die Funktion  $\Phi$  ist Lösung der Wärmeleitungsgleichung zur Anfangsbedingung

$$(14.3) \quad \Phi(\cdot, t_k) \rightarrow \delta_0 \text{ in } \mathcal{D}' \quad \text{für } 0 < t_k \rightarrow 0.$$

BEWEIS. Schritt 1:  $\Phi$  löst die Wärmeleitungsgleichung auf  $\{t > 0\}$ . Dies wurde bereits nachgerechnet.

*Schritt 2: Wir behaupten, dass für alle  $t > 0$  die Gesamtwärmemenge gleich 1 ist. Tatsächlich gilt für alle  $t > 0$  mit der Substitution  $z = x/(2\sqrt{t})$*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\cdot, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z_i^2} dz_1 \dots dz_n \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2} dz_i = 1. \end{aligned}$$

Wir erinnern an die Berechnung des letzten Integrals. Mit obiger Rechnung und Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2} dz_i &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|z|^2} dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\phi \\ &= 2\pi \frac{-1}{2} \int_0^\infty \partial_r(e^{-r^2}) dr = \pi. \end{aligned}$$

*Schritt 3: Diracverteilung für  $t_k \rightarrow 0$ .* Sei  $t_k \rightarrow 0$  eine feste Folge,  $\varphi$  eine Testfunktion, wobei wir nur annehmen müssen, dass  $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir finden zunächst  $\rho > 0$  mit  $|\varphi(y) - \varphi(0)| \leq \varepsilon/2$  für alle  $y \in B_\rho(0)$ . Für  $k$  groß gilt zusätzlich  $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\rho(0)} \Phi(\cdot, t) \leq \varepsilon/(4 \sup |\varphi|)$  für alle  $t \in (0, 1)$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \left| \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\cdot, t_k) \varphi(\cdot) \right] - \varphi(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\cdot, t_k) [\varphi(\cdot) - \varphi(0)] \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\rho(0)} \Phi(\cdot, t_k) [\varphi(\cdot) - \varphi(0)] \right| + \left| \int_{B_\rho(0)} \Phi(\cdot, t_k) [\varphi(\cdot) - \varphi(0)] \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es gilt also  $|\langle \Phi(\cdot, t_k) \rangle (\varphi) - \varphi(0)| \leq \varepsilon$ . Dies zeigt (14.3).  $\square$

**Lösung der homogenen Gleichung im Ganzraum.** Wir nutzen nun physikalische Intuition, um eine Lösung zu erraten. In jedem Punkt  $y \in \mathbb{R}^n$  ist zu Beginn die Wärmemenge  $u_0(y)$  (als 'Wärmedichte'). Diese Wärmemenge ergibt nach Zeit  $t$  eine Wärmezunahme am Ort  $x$  um  $u_0(y)\Phi(x - y, t)$ , denn  $\Phi(\cdot, t)$  gibt für eine anfängliche Punktwärme die Verteilung nach Zeit  $t$  an. Die Gesamtlösung ergibt sich durch Superposition dieser Einzellösungen, also als Integral.

SATZ 14.3. *Eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$(14.4) \quad \partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

$$(14.5) \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n$$

für  $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty$  ist gegeben durch

$$(14.6) \quad u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy.$$

Genauer haben wir

(1)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  und es gilt (14.4).

(2)  $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  und es gilt (14.5).

BEWEIS. *Schritt 1: Lösungseigenschaft.* Wegen  $u_0 \in L^\infty$  ist das Integral in (14.6) wohldefiniert. Alle Ableitungen von  $\Phi(\cdot, t)$  sind wieder integrierbar und wir können die Funktion  $\Phi$  unter dem Integral differenzieren. Insbesondere ist  $u(\cdot, t)$  von der Klasse  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und es gilt

$$(\partial_t - \Delta)u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t - \Delta)\Phi(x - y, t) u_0(y) dy = 0,$$

$u$  ist also Lösung von (14.4).

*Schritt 2: Anfangswerte.* In der Rechnung  $\langle \Phi(\cdot, t_k) \rangle (\varphi) \rightarrow \varphi(0)$  haben wir nur die Stetigkeit und Beschränktheit von  $\varphi$  ausgenutzt. Insbesondere können wir  $\varphi = u_0$  einsetzen. Mit derselben Rechnung erhalten wir für  $x_k \rightarrow x_0$  und  $t_k \rightarrow 0$

$$u(x_k, t_k) = \langle \Phi(\cdot - x_k, t_k) \rangle (u_0) \rightarrow \delta_{x_0}(u_0) = u_0(x_0).$$

Dies zeigt die Stetigkeit und (14.5).  $\square$

**Die Lösung des inhomogenen Problems.** Eine rechte Seite  $f(x, t)$  bedeutet physikalisch einen Quellterm, also eine Wärmequelle. Man sollte sich die Situation so vorstellen: Zur Zeit  $t$  wird an der Stelle  $x$  dem System eine Wärmemenge  $f(x, t)$  zugeführt. Dabei ist  $f$  als Dichte der Quelle zu sehen, die über Raum und Zeit verteilt ist. Wir setzen dann die Lösung zusammen aus den Einzellösungen, die zu diesen Quellen gehören. Wir erraten

$$(14.7) \quad u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(y, s) \Phi(x - y, t - s) dy ds.$$

Formal folgt diese Aussage sofort aus dem nachfolgenden Resultat über die Fundamentallösung.

LEMMA 14.4. *Die Funktion  $\Phi$ , trivial fortgesetzt auf  $\mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty)$ , erfüllt im Distributionssinn auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*

$$(\partial_t - \Delta)\Phi = \delta_0.$$

BEWEIS. Wir betrachten  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  und einen Raum-Zeit Zylinder  $Q_{\delta,\tau} := B_\delta(0) \times (-\tau, \tau)$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta) \langle \Phi \rangle (\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \cdot (-\partial_t - \Delta) \varphi \\ &= - \int_{Q_{\delta,\tau}} \Phi \cdot (\partial_t + \Delta) \varphi - \int_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus Q_{\delta,\tau}} \Phi \cdot (\partial_t + \Delta) \varphi \\ &= - \int_{Q_{\delta,\tau}} \Phi \cdot (\partial_t + \Delta) \varphi + \int_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus Q_{\delta,\tau}} (\partial_t - \Delta) \Phi \cdot \varphi \\ &\quad + \left[ \int_{B_\delta} \Phi \cdot \varphi \right]_{-\tau}^{\tau} - \int_{-\tau}^{\tau} \int_{\partial B_\delta} (\Phi \partial_\nu \varphi - \partial_\nu \Phi \varphi). \end{aligned}$$

Dabei können wir nun  $\delta, \tau > 0$  beliebig wählen.

a) Im ersten Integral ist  $(\partial_t + \Delta) \varphi$  beschränkt und  $\Phi$  hat beschränkte  $x$ -Integrale. Für  $\tau > 0$  klein ist also der erste Term nahe an 0.

b) Das zweite Integral verschwindet, weil  $\Phi$  klassische Lösung außerhalb des Nullpunktes ist.

c) Das dritte Integral konvergiert für  $\delta \gg \tau \rightarrow 0$  gegen  $\varphi(0)$  wie in Lemma 14.2. Dies liefert den gewünschten Term.

d) Für das vierte Integral schließlich fordern wir wiederum  $\delta \gg \tau$ .  $\square$

Mit den obigen Methoden läßt sich folgender Satz zeigen. Dabei folgt der Satz für  $f \in C_0^2$  sofort aus obigen Aussagen, ein allgemeines  $f$  muss mit einem Approximationsargument behandelt werden.

SATZ 14.5. *Eine klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f && \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

für  $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  und  $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty$  ist gegeben durch

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(y, s) \Phi(x - y, t - s) dy ds.$$

## 15. Maximumprinzip und Regularität

Wir verwenden den Begriff der *klassischen Lösung* wie folgt: Damit die Gleichung im klassischen Sinne gelten kann, fordern wir, dass die erste Zeitableitung und alle zweiten Ortsableitungen als stetige Funktionen existieren. Damit die Randwerte etwas mit der Funktion im Inneren zu tun haben, fordern wir, dass  $u$  stetig ist auf dem in  $t = 0$  abgeschlossenen Raum-Zeit Zylinder,  $u \in C^0(\Omega \times [0, T))$ .

In Satz 2.9 haben wir ein Maximumprinzip für klassische Lösungen der parabolischen Gleichung auf beschränkten Gebieten hergeleitet.

Auf unbeschränkten Gebieten finden wir sofort:

**BEMERKUNG 15.1.** *Die Lösung des homogenen Problems aus (14.6) erfüllt*

$$u(x, t) \leq \max_{\mathbb{R}^n} u_0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

*Dies folgt aus der Darstellung. Für  $M := \max_{\mathbb{R}^n} u_0$  gilt*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy \leq M \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) dy = M.$$

Wir ersehen hierbei sogar das starke Maximumprinzip. Wenn  $u_0$  nicht konstant gleich  $M$  ist, dann gilt  $u(x, t) < M$  strikt. Man sagt,

die Wärmeleitungsgleichung hat eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Denn: Ein einzelner Punkt  $x$  mit Wert  $u_0(x) < M$  bewirkt, dass für beliebig kleine  $t > 0$  überall  $u(\cdot, t) < M$  gilt.

Für die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems benötigen wir allerdings eine andere Aussage, nämlich dass *jede Lösung* des Problems ein Maximumprinzip erfüllt. Dies ist im allgemeinen falsch.

**BEMERKUNG 15.2.** *Es gibt unendlich viele klassische Lösungen  $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0, \infty), \mathbb{R})$  von*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

*Siehe z.B. John, Partial Differential Equations, Kapitel 7, S. 211 ff.*

**SATZ 15.3** (Maximumprinzip für das Ganzraumproblem). *Sei  $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  mit stetigen ersten Zeit- und stetigen zweiten Ortsableitungen auf  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  Lösung von*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

*Weiter erfülle  $u$  für Konstanten  $A, a > 0$  die Wachstumsabschätzung*

$$(15.1) \quad u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2} \quad \forall x, t.$$

*Dann gilt*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} u_0.$$

BEWEIS. Es genügt, die Aussage für ein kleines Zeitintervall zu zeigen. Eine Iteration liefert dann die Aussage für alle Zeiten. Wir nehmen also an, dass  $8aT < 1$ , und zeigen das Maximumprinzip auf  $(0, T)$ . Wegen der strikten Ungleichung finden wir dann  $\varepsilon > 0$  und  $\gamma > 1$ , so dass auch noch gilt  $8a(T + \varepsilon) = 1/\gamma$ .

Sei  $\mu > 0$  beliebig. Wir wollen das Maximumprinzip für den (beliebigen) Punkt  $y \in \mathbb{R}^n$  nachweisen und setzen

$$v(x, t) := u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}.$$

Wie für die Fundamentallösung rechnet man nach, dass  $v$  die Wärmeleitungsgleichung löst. Nun wollen wir das Maximumprinzip aus Satz 2.9 für beschränkte Gebiete auf  $v$  anwenden. Wir betrachten eine große Kugel  $B_r(y)$  um  $y$ . Für die Anfangswerte stellen wir fest

$$v(x, 0) \leq u(x, 0) = u_0(x).$$

Für die Randwerte in  $x \in \partial B_r(y)$  finden wir

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}} \\ &\leq Ae^{2a(r^2+|y|^2)} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{n/2}} e^{\gamma 2ar^2} \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0. \end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Ungleichung für große  $r \geq r_0(T, \varepsilon, a, A, \mu, \gamma)$  wegen  $\gamma > 1$ . Das Maximumprinzip auf  $B_r(y)$  liefert  $v(y, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} u_0$ . Dabei war  $\mu$  beliebig und für  $\mu \rightarrow 0$  erhalten wir das gewünschte Ergebnis.

□

COROLLAR 15.4 (Eindeutigkeit für das Ganzraumproblem). *Für  $T > 0$  gibt es höchstens eine klassische Lösung  $u$  des Ganzraumproblems aus Satz 14.5 mit einer Wachstumsabschätzung*

$$(15.2) \quad |u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad \forall x, t.$$

BEWEIS. Es genügt, die Differenz  $w$  zweier Lösungen  $u$  und  $v$  zu betrachten.  $w$  ist von derselben Klasse und erfüllt die Wachstumsabschätzung. Das Maximumprinzip, angewandt auf  $w$  und  $-w$  zeigt  $w \equiv 0$ . □

**Die Halbgruppe für den Ganzraum.** Die eindeutige Lösbarkeit liefert uns die Existenz eines Lösungsoperators, also einer Halbgruppe.

COROLLAR 15.5. *Die Wärmeleitungsgleichung im Ganzraum,*

$$(\partial_t - \Delta)u = 0, \text{ mit Anfangsbedingung } u(\cdot, 0) = u_0$$

erzeugt im Funktionenraum  $X := C_b^0(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^0(\mathbb{R}^n) \mid \|u\|_\infty < \infty\}$  mit Norm  $\|u\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^n} |u|$  eine Halbgruppe,

$$S(t) : X \ni u_0 \mapsto u(t) \in X.$$

Es gilt  $S(t) \circ S(s) = S(t+s)$  für  $t, s > 0$ ,  $S(0) = \text{id}$  und die Abbildung  $[0, \infty) \ni t \mapsto S(t)u_0 \in X$  ist stetig für alle  $u_0 \in X$ .

BEWEIS. Wir definieren  $S$  als  $S(0) := \text{id}$  und  $S(t)$  durch die Darstellungsformel (14.6). Dies liefert sofort die Stetigkeit. Für die Halbgruppeneigenschaft stellen wir fest, dass

$$S(\cdot) \circ S(s)u_0 \text{ und } S(\cdot + s)u_0$$

beide Lösungen zu demselben Anfangswertproblem sind, also nach dem Eindeutigkeitssatz übereinstimmen.  $\square$

**Regularität.** Wir wollen schließlich noch feststellen, dass alle klassischen Lösungen glatt sind.

SATZ 15.6. *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beliebig und  $u$  eine klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit beliebigen Anfangsbedingungen. Dann gilt*

$$(15.3) \quad u \in C^\infty(\Omega \times (0, \infty)).$$

BEWEIS. Wir betrachten einen Punkt  $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$ . Wir wählen nun eine Abschneidefunktion  $\eta \in C_0^\infty(\Omega \times (0, \infty))$ , für die gilt

$$\eta(y, s) = 1 \forall (y, s) \in B_\varepsilon(x, t) \subset \Omega \times (0, \infty).$$

Die Funktion  $v(x, t) = u(x, t) \cdot \eta(x, t)$  löst dann

$$v(y, 0) = 0, \quad (\partial_t - \Delta)v = (\partial_t u - \Delta u)\eta + u\partial_t \eta - 2\nabla u \cdot \nabla \eta - u\Delta \eta.$$

Die Funktion  $v$  kann trivial auf ganz  $\mathbb{R}^n \times [0, t]$  fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung  $v$  löst dann eine Wärmeleitungsgleichung auf dem Ganzraum mit Anfangswerten 0, mit beschränkter rechter Seite, und die Anfangswerte erfüllen die Wachstumannahme (15.2). Diese Lösung ist eindeutig nach Corollar 15.4 und stimmt also mit der Darstellungsformel aus Satz 14.5 überein. In der Umgebung von  $(x, t)$  verschwindet  $f$  und wir können in der Formel unendlich oft unter dem Integral differenzieren. Dies liefert das Ergebnis.  $\square$

## Energiemethoden

### 16. Existenz von Lösungen mit Rothe-Methode

Ähnlich wie in der Laplace-Gleichung finden wir mit der Fundamentallösung eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung im Ganzraum. Die Frage ist: Wie lösen wir auf beschränkten Gebieten?

Die nachfolgende Methode ist von enormer Wichtigkeit, denn sie erlaubt sofort die Behandlung inhomogener Probleme, also mit rechter Seite und mit nichttrivialen Randbedingungen. Weiterhin erlaubt die Methode auch die Behandlung allgemeiner elliptischer Operatoren und sogar die Behandlung nichtlinearer Probleme. Wir werden sie jetzt allerdings für den einfachsten Fall vorstellen.

Wir wollen die Methoden am einfachsten Fall darstellen. Sei also  $\Omega$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Wir wollen folgendes Problem (P) lösen,

$$\begin{aligned}\partial_t u - \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \times (0, \infty), \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u &= u_0 \text{ auf } \Omega \times \{0\}.\end{aligned}$$

Zunächst eine fundamentale Feststellung.

**BEMERKUNG 16.1.** *Jede klassische Lösung  $u$  von (P) erfüllt für alle  $t \in [0, T]$*

$$(16.1) \quad \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2.$$

**BEWEIS.** Es genügt, die Gleichung mit  $u$  zu multiplizieren, und über  $\Omega$  und über  $(0, t)$  zu integrieren,

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^t \int_{\Omega} (\partial_t u - \Delta u) \cdot u = \int_0^t \int_{\Omega} \left[ \partial_t \frac{1}{2} |u|^2 + |\nabla u|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(t)|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0|^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u|^2.\end{aligned}$$

Dies war die Behauptung.  $\square$

Auf der *a priori Abschätzung* (16.1) beruhen viele Methoden, mit denen die Existenz von Lösungen gezeigt werden kann.

**16.1. Programm für Existenzresultate und Funktionenräume.** Ein allgemeines Schema für Existenzresultate ist das folgende. Das Schema kann mit unterschiedlichen Approximationsmethoden in Schritt 1 ausgeführt werden. Bei einer Ortsdiskretisierung spricht man von einem *Galerkin-Verfahren*, bei einer Zeitdiskretisierung auch von der *Rothe-Methode*.

- (1) Konstruiere für  $N \in \mathbb{N}$  approximative Lösungen  $u^N$ .
- (2) Zeige die Abschätzung (16.1), also

$$\|u^N\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C,$$

mit  $C$  unabhängig von  $N$ .

- (3) Finde einen Limes  $u$  im Raum  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ .
- (4) Zeige, dass  $u$  die Gleichung löst.

**Sobolevräume.** In obigem 'Programm' haben wir schon symbolisch den Raum  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  verwendet, den wir nun definieren müssen.

$$L^2(0, T; L^2(\Omega)) := L^2((0, T) \times \Omega),$$

$$L^2(0, T; H^1(\Omega)) := \{u \in L^2((0, T) \times \Omega) : \nabla_x u \in L^2((0, T) \times \Omega)\}.$$

Dazu wird die natürliche Norm definiert, also

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 := \|u\|_{L^2(\Omega \times (0,T))}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega \times (0,T))}^2.$$

Beide Räume sind Hilberträume (mit dem kanonischen Skalarprodukt für den zweiten Raum).

Um das Bochner-Integral (s.u.) zu vermeiden, definieren wir noch die folgenden zeitabhängigen Funktionenräume elementar.

$$L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) := \{u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), u(t) \in H_0^1(\Omega) \text{ für f.a. } t\}$$

$$L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) := L^2(0, T; H_0^1(\Omega))'.$$

Falls die Parameter  $T$  und  $\Omega$  fixiert sind benutzen wir auch die Abkürzungen  $L^2L^2$  und  $L^2H_0^1$  und  $L^2H^{-1}$ .

**Bochner-Integral.** Man kann auch einen anderen Standpunkt einnehmen. In der Denkweise der Halbgruppentheorie würde man z.B. eine quadratintegrierbare Funktion  $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  auffassen als eine Abbildung  $u : (0, T) \rightarrow L^2(\Omega)$ . Es handelt sich also um eine Funktion mit Werten in einem Banachraum. Solche Räume lassen sich mit

dem Begriff des Bochner-Integrals definieren, alle obigen zeitabhängigen Funktionenräume sind damit in natürlicher Weise definiert. Dieser Zugang wird im Appendix kurz vorgestellt.

### 16.2. Existenz von Lösungen der homogenen Gleichung.

**Approximative Lösungen.** Die Rothe-Methode ist eine Diskretisierung der Zeit. Wir geben uns ein Zeitintervall  $[0, T]$  vor. Nun wählen wir eine große Zahl  $N \in \mathbb{N}$  und unterteilen das Intervall  $[0, T]$  in Intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  mit  $t_k = k \cdot \Delta t$  und  $\Delta t = T/N$ . Die Lösung  $u$  soll in den Zeitpunkten  $t_k$  approximiert werden durch  $u(t_k) \approx u_k \in L^2(\Omega)$ . Dafür definieren wir die Familie  $u_k$  durch die Vorschrift (implizite Zeitdiskretisierung)

$$(16.2) \quad \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} = \Delta u_{k+1}, \quad u_{k+1} \in H_0^1(\Omega).$$

Der Existenzsatz für elliptische Gleichungen in Corollar 9.3, liefert die Lösbarkeit von Gleichung (16.2). Tatsächlich ist das  $c$  in dem Satz gleich  $+1/\Delta t$ , also insbesondere positiv.

**A priori Abschätzungen.** Wir testen die Vorschrift (16.2) mit  $u_{k+1}$  und erhalten mit der  $L^2(\Omega)$ -Norm  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2}$

$$\frac{1}{\Delta t} (\|u_{k+1}\|^2 - \langle u_k, u_{k+1} \rangle) = -\|\nabla u_{k+1}\|^2.$$

Wir multiplizieren mit  $\Delta t$  und summieren über alle  $k$ . Wir verwenden außerdem  $\langle u_k, u_{k+1} \rangle \leq (\|u_{k+1}\|^2 + \|u_k\|^2)/2$ .

$$(16.3) \quad \begin{aligned} -\Delta t \sum_{k=1}^N \|\nabla u_k\|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \|u_{k+1}\|^2 - \langle u_k, u_{k+1} \rangle \\ &\geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} (\|u_{k+1}\|^2 - \|u_k\|^2) = \frac{1}{2} \|u_N\|^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|^2. \end{aligned}$$

Wir haben damit das diskrete Analogon zur Abschätzung in (16.1) erhalten.

*Auf  $[0, T]$  definierte Funktionen.* Zu den Werten  $(u_k)_{k=1, \dots, N}$  kann man nun eine stückweise konstante Funktion  $\bar{u}^N$  definieren. Man erhält eine Funktion  $\bar{u}^N : [0, T] \rightarrow H_0^1(\Omega)$  durch die Definition

$$\bar{u}^N(t) = u_{k+1} \quad \text{für } t \in (t_k, t_{k+1}].$$

Ähnlich kann man auch die lineare Interpolation definieren. Man erhält eine Funktion  $u^N : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$  durch die Definition

$$u^N(t) = \mu u_k + (1 - \mu) u_{k+1} \quad \text{für } t = \mu t_k + (1 - \mu) t_{k+1}, \quad \mu \in [0, 1].$$

Diese Funktion erfüllt dann

$$\partial_t u^N(t) = \frac{u_{k+1} - u_k}{t_{k+1} - t_k} \quad \text{für } t \in (t_k, t_{k+1}).$$

Das nachfolgende Lemma fasst unsere Resultate zusammen.

LEMMA 16.2. Für  $u_0 \in H_0^1$  sind die Funktionen  $u^N$  und  $\bar{u}^N$  beschränkt im Raum  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , die schwache Zeitableitung  $\partial_t u^N$  existiert in  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  und es gilt

$$(16.4) \quad \partial_t u^N(\cdot, t) = \Delta \bar{u}^N(\cdot, t) \quad \text{in } H^{-1}(\Omega) \text{ für fast alle } t \in (0, T).$$

Insbesondere ist  $\partial_t u^N$  beschränkt im Raum  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .

**Limesbildung.** Wir wollen nun Limiten  $u^N \rightarrow u$  und  $\bar{u}^N \rightarrow u$  für  $N \rightarrow \infty$  bilden. Die Funktion  $u$  ist dann ein Kandidat für die Lösung. An dieser Stelle müssen wir einen abstrakten Satz aus der Funktionalanalysis verwenden.

SATZ 16.3. Sei  $Z$  ein reflexiver Banachraum und  $z_N \in Z$  eine Folge mit  $\|z_N\|_Z \leq C$  unabhängig von  $N$ . Dann existiert eine Teilfolge mit einem schwachen Limes  $z$ . Dies bedeutet, dass ein  $z \in Z$  und eine Teilfolge  $(N_k)_k$  existiert, so dass für jedes  $\langle \varphi \rangle \in Z' = \mathcal{L}(Z, \mathbb{R})$  gilt

$$\langle \varphi \rangle(z_{N_k}) \rightarrow \langle \varphi \rangle(z) \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

BEMERKUNG 16.4. Die zeitabhängigen Funktionenräume aus Abschnitt 16.2 sind alle Hilberträume und damit reflexiv. Insbesondere haben alle beschränkten Folgen schwach konvergente Teilfolgen.

Insbesondere gilt für die approximativen Lösungen  $u^N \in L^2 H_0^1$  und  $\bar{u}^N$ : Es gibt eine Teilfolge (wieder  $u^N$  und  $\bar{u}^N$  genannt) und schwache Limiten  $u \in L^2 H_0^1$  und  $\bar{u} \in L^2 H_0^1$  mit

$$\bar{u}^N \rightharpoonup \bar{u}, u^N \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2 H_0^1 \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Wir wollen nun zeigen, dass  $\bar{u} = u$ .

Dazu betrachten wir eine Testfunktion  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T))$ .

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}^N \rangle(\varphi) &= \int_0^T \langle \bar{u}^N(t), \varphi(t) \rangle dt = \sum_{k=1}^N \Delta t \langle u_k, \varphi(t_k) \rangle + O\left(\frac{1}{N}\right), \\ \langle u^N \rangle(\varphi) &= \sum_{k=1}^N \Delta t \int_0^1 \langle (1-s)u_{k-1} + su_k, \varphi(t_{k-1} + s\Delta t) \rangle ds \\ &= \sum_{k=1}^N \Delta t \left\{ \frac{1}{2} \langle u_{k-1}, \varphi(t_{k-1}) \rangle + \frac{1}{2} \langle u_k, \varphi(t_k) \rangle \right\} + O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

Dabei kommt der Fehlerterm durch Differenzen  $\varphi(t) - \varphi(t_k)$  im Intervall  $(t_{k-1}, t_k)$  zustande. Die formale Rechnung für den ersten Term lautet

$$\begin{aligned} \left| \langle \bar{u}^N \rangle (\varphi) - \sum_{k=1}^N \Delta t \langle u_k, \varphi(t_k) \rangle_{L^2(\Omega)} \right| &= \left| \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle u_k, \varphi - \varphi(t_k) \rangle_{L^2(\Omega)} \right| \\ &\leq \|u_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \cdot \frac{C}{N} \leq C \frac{1}{N}, \end{aligned}$$

wobei  $C$  von  $\varphi$  abhängt, aber nicht von  $N$ . Unser Ergebnis ist, dass die Ausdrücke für  $\langle \bar{u}^N \rangle (\varphi)$  und  $\langle u^N \rangle (\varphi)$  bis auf einen Term der Ordnung  $1/N$  übereinstimmen.

Schwache Limiten sind automatisch auch Limiten im Distributionsinn auf  $\Omega \times (0, T)$  (denn die Anwendung auf eine glatte Testfunktion definiert ein lineares Funktional). Im Limes gilt

$$\langle \bar{u} \rangle (\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \bar{u}^N \rangle (\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle u^N \rangle (\varphi) = \langle u \rangle (\varphi),$$

also  $\bar{u} = u$ .

Wir können nun nachweisen, dass  $u$  Lösung der Gleichung im Distributionssinn ist: Für jedes  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T))$  gilt

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \partial_t u \rangle &= - \langle \partial_t \varphi, u \rangle \leftarrow - \langle \partial_t \varphi, u^N \rangle = \langle \varphi, \partial_t u^N \rangle \\ &\stackrel{(16.4)}{=} \langle \varphi, \Delta \bar{u}^N \rangle = \langle \Delta \varphi, \bar{u}^N \rangle \rightarrow \langle \Delta \varphi, u \rangle = \langle \varphi, \Delta u \rangle. \end{aligned}$$

Also gilt  $\partial_t u = \Delta u$  im Distributionssinn.

Wir stellen schließlich noch fest, dass für  $u \in L^2 H_0^1$  der Ausdruck  $\Delta u$  ein lineares stetiges Funktional auf  $L^2 H_0^1$  definiert. Also gilt  $\Delta u \in L^2 H^{-1}$  und wegen der Gleichung also auch  $\partial_t u \in L^2 H^{-1}$ .

**Limesbildung in der Anfangsbedingung.** Es bleibt noch die Gleichung  $u(\cdot, 0) = u_0$  zu klären. Tatsächlich hat die gefundene Funktion  $u$  (zunächst) keine Anfangswerte im klassischen Sinn.

**DEFINITION 16.5.** Für  $u_0 \in L^2(\Omega)$  und  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  mit  $\partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  definieren wir:

$$\begin{aligned} &u \text{ erfüllt die Anfangsbedingung } u(\cdot, 0) = u_0 \text{ im schwachen Sinne} \\ : \iff &\int_0^T \langle \partial_t u(t), \varphi(\cdot, t) \rangle + \langle u(t), \partial_t \varphi(\cdot, t) \rangle dt = - \langle u_0, \varphi(\cdot, 0) \rangle \\ &\text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega \times [0, T]). \end{aligned}$$

Mit dieser Definition können wir die Annahme der Anfangswerte problemlos nachweisen. Insgesamt haben wir eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems gefunden.

SATZ 16.6. Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt,  $u_0 \in L^2(\Omega)$  und  $T > 0$  gibt es eine Lösung  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  von

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ u \text{ erfüllt } u(\cdot, 0) &= u_0 \text{ im schwachen Sinne.} \end{aligned}$$

BEWEIS. *Schritt 1: Approximation der Anfangswerte.* Wir haben zuvor die Existenz einer Lösung für  $u_0 \in H_0^1$  gezeigt. Ein allgemeines  $u_0 \in L^2(\Omega)$  wird approximiert durch  $H_0^1(\Omega) \ni u_0^N \rightarrow u_0$  in  $L^2(\Omega)$  ( $C_c^\infty(\Omega)$  ist dicht in  $L^2(\Omega)$ , vergleiche auch den Dichtheitssatz 5.2). Wir nennen nun die zugehörigen Lösungen  $u^N$ . Dann sind die  $u^N$  ebenfalls wie in der a priori Abschätzung (16.3) beschränkt. Mit Satz 16.3 finden wir einen schwachen Limes  $u$ , der die Gleichung im Distributionssinn löst.

*Schritt 2: Annahme der Anfangswerte.* Für festes  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times [0, T])$  gilt die Integralgleichung aus Definition 16.5 für  $u^N$ , da diese Funktion stückweise affin ist.

$$\int_0^T \langle \partial_t u^N(t), \varphi(\cdot, t) \rangle + \langle u^N(t), \partial_t \varphi(\cdot, t) \rangle dt = - \langle u_0^N, \varphi(\cdot, 0) \rangle.$$

Die Funktionen  $\partial_t u^N$  sind beschränkt in  $L^2 H^{-1}$  und nach Auswahl einer Teilfolge können wir annehmen, dass die Funktionenfolge  $\partial_t u^N$  in  $L^2 H^{-1}$  schwach konvergiert; dann automatisch gegen den Distributionllimes  $\partial_t u$ . Da  $\varphi$  als Element des Dualraumes von  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  aufgefasst werden kann, können wir den Limes bilden. Dieselbe Gleichung gilt also auch für  $u$ , was bedeutet, dass die Anfangswerte im schwachen Sinne angenommen werden.  $\square$

**16.3. Verallgemeinerungen.** Die Methode funktioniert mit Variationen auch

- auf unbeschränkten Gebieten,
- für rechte Seiten  $f \neq 0$ ,
- für Randwerte  $g \neq 0$ ,
- für allgemeine elliptische Differentialoperatoren.

**Rechte Seite  $f$ .** Zunächst stellen wir fest, dass die a priori Abschätzungen mit Modifikation erhalten bleibt. Wir multiplizieren die Gleichung  $\partial_t u - \Delta u = f$  mit  $u$  und integrieren über  $\Omega$  und über

$(0, T)$ .

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} f \cdot u &= \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t u - \Delta u) \cdot u = \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \partial_t \frac{1}{2} |u|^2 + |\nabla u|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(T)|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0|^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Die Abschätzung lautet damit

$$(16.5) \quad \|u(t)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^T \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds = \|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^T \langle f(s), u(s) \rangle_{L^2} ds.$$

Für  $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  finden wir insbesondere für beliebiges  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^T \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds &\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \cdot \|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \\ &\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\delta} \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 + \delta \|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Mit der Poincaré Abschätzung finden wir

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 &\leq C \int_0^T \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds \\ &\leq C \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\delta} \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 + \delta C \|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Wir wählen  $\delta$  kleiner als die Inverse der Poincaré Konstanten  $C$ , absorbieren die rechte Seite in die linke und finden mit einer neuen Konstanten  $C$  die endgültige Abschätzung

$$(16.6) \quad \|u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq C \|u_0\|_{L^2}^2 + C \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2.$$

Die Zeitdiskretisierung wir nun in natürlicher Weise abgeändert auf

$$(16.7) \quad \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} = \Delta u_{k+1} + f_k, \quad u_{k+1} \in H_0^1(\Omega).$$

Dabei setzen wir allerdings für  $f_k$  nicht den Wert in  $t_k$ , denn wir haben keine punktweise Kontrolle für  $f$ . Wir wählen stattdessen den Mittelwert

$$f_k := \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s) ds.$$

Wir schreiben  $f^N$  für die stückweise konstante Funktion, die auf dem Intervall  $(t_k, t_{k+1})$  mit  $f_k$  übereinstimmt, in Formeln  $f^N(t) = \sum_k f_k \chi_{(t_k, t_{k+1})}(t)$ . Die wichtige Eigenschaft der Funktion  $f^N$  ist, dass

wir die Norm nicht vergrößert haben. Wir schreiben  $X$  für  $H^{-1}(\Omega)$  und rechnen

$$\begin{aligned}
\|f^N\|_{L^2(0,T;X)}^2 &= \sum_k \Delta t \|f_k\|_X^2 = \sum_k \Delta t (\Delta t)^{-2} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f \right\|_X^2 \\
&\leq \sum_k (\Delta t)^{-1} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f\|_X \right|^2 \\
&\leq \sum_k (\Delta t)^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f\|_X^2 \cdot \Delta t \\
&= \|f\|_{L^2(0,T;X)}^2.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in den Ungleichungen Satz 18.2 und die Hölder-Ungleichung verwendet. Nach Satz 16.3 hat die Folge  $f^N$  einen schwachen Limes  $\bar{f}$ . Durch Anwendung auf glatte Testfunktionen verifiziert man wieder  $f$  mit  $\bar{f}$  und erhält

$$f^N \rightarrow f \text{ schwach in } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Die Iterationsvorschrift aus Gleichung (16.7) ist lösbar nach dem Existenzsatz für elliptische Gleichungen in Corollar 9.3.

Wieder wollen wir für die diskreten Gleichungen die a priori Abschätzungen ableiten. Wir testen die Vorschrift (16.7) mit  $u_{k+1}$  und erhalten

$$\frac{1}{\Delta t} (\|u_{k+1}\|^2 - \langle u_k, u_{k+1} \rangle) = -\|\nabla u_{k+1}\|^2 + \langle f_k, u_{k+1} \rangle.$$

Wir multiplizieren mit  $\Delta t$  und summieren über alle  $k$ . Wir verwenden wieder  $\langle u_k, u_{k+1} \rangle \leq (\|u_{k+1}\|^2 + \|u_k\|^2)/2$ ,

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \langle f_k, u_{k+1} \rangle - \Delta t \sum_{k=1}^N \|\nabla u_k\|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \|u_{k+1}\|^2 - \langle u_k, u_{k+1} \rangle \\
&\geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} (\|u_{k+1}\|^2 - \|u_k\|^2) = \frac{1}{2} \|u_N\|^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|^2.
\end{aligned}$$

Wir sammeln positive Terme auf die linke Seite und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|u_N\|^2 + \Delta t \sum_{k=1}^N \|\nabla u_k\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \langle f_k, u_{k+1} \rangle \\
&\leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \left( \Delta t \sum_{k=1}^N \|u_k\|_{H_0^1}^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \Delta t \sum_{k=1}^N \|f_k\|_{H^{-1}}^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + C\delta\Delta t \sum_{k=1}^N \|\nabla u_k\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\delta}\Delta t \sum_{k=1}^N \|f_k\|_{H^{-1}}^2,$$

wobei wir die Poincaré Konstante  $C$  verwendet haben. Für kleines  $\delta > 0$  können wir wieder den  $u$ -Term in die linke Seite absorbieren und finden

$$(16.8) \quad \|u_N\|^2 + \Delta t \sum_{k=1}^N \|u_k\|_{H^1}^2 \leq C\|u_0\|^2 + C\Delta t \sum_{k=1}^N \|f_k\|_{H^{-1}}^2.$$

Wir haben damit das diskrete Analogon zur Abschätzung (16.6) erhalten.

In der Limesbildung muß man auch den Limes der diskretisierten  $f$  bilden. Wir verwenden die oben gezeigte schwache Konvergenz  $f^N \rightarrow f$  schwach in  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Die Limesbildung für  $u^N$  funktioniert wie im homogenen Fall und liefert wieder die Gleichung für den schwachen Limes  $u$ .

**Allgemeine elliptische Operatoren.** Dieser Punkt bezieht sich auf die parabolischen Probleme

$$(16.9) \quad \partial_t u + Lu = f \quad \text{auf } \Omega \times (0, \infty),$$

$L$  wie in Abschnitt 9 ein elliptischer Differentialoperator in Divergenzform,

$$(16.10) \quad Lu(x) = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u(x)) + \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x)$$

mit beschränkten Koeffizienten, die  $(a_{ij}(x))$  elliptisch wie in (8.11) mit einer Konstanten  $\gamma > 0$ . Der Existenzbeweis für diesen allgemeinen Fall ist fast wörtlich (bis auf längere Formeln) wie der Beweis für den Laplaceoperator.

## 17. Eindeutigkeit und Regularität

Wir haben Lösungen konstruiert mit der Regularität

$$(17.1) \quad u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Wir werden feststellen, dass Funktionen mit diesen Eigenschaften noch die zusätzliche Eigenschaft  $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$  haben. Dies ist ein Interpolationsergebnis: Die räumliche und zeitliche Regularität aus (17.1) liefern zusammen die 'gemischte Raum-Zeit-Regularität'. Der Satz ist ganz abstrakt und nutzt nicht aus, dass  $u$  Lösung einer Gleichung ist.

### 17.1. Der Interpolationssatz für Raum-Zeit Funktionen.

SATZ 17.1 (Stetigkeit in  $L^2$ ). Sei  $u$  gegeben mit

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Dann gilt nach Abänderung von  $u$  auf einer Nullmenge von  $t$ 's:

(1)  $u$  ist von der Klasse

$$u \in C^0((0, T), L^2(\Omega)).$$

(2) Die Abbildung

$$t \mapsto \|u(t)\|_{L^2}^2$$

ist absolut stetig mit schwacher Ableitung

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 = 2 \langle u(t), \partial_t u(t) \rangle.$$

BEWEIS. Wir setzen  $u$  trivial auf  $\mathbb{R}$  fort, d.h. wir setzen  $u(t) = 0$  für  $t \in (-\infty, 0) \cup (T, \infty)$ . Für eine Dirac-Folge  $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\langle \eta_\varepsilon \rangle \rightarrow \delta_0$  im Distributionssinn betrachten wir die geglätteten Funktionen

$$u_\varepsilon(t) := (u * \eta_\varepsilon)(t) := \int_{\mathbb{R}} u(s) \eta_\varepsilon(t - s) ds.$$

1.) Es gilt  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dies folgt wie die analoge Aussage über Faltungen oder aus dem abstrakten Satz über das Bochner-Integral, 18.2. Insbesondere gibt es einen Punkt  $t_0 \in (0, T)$ , so dass  $u_\varepsilon(t_0) \rightarrow u(t_0)$  in  $L^2(\Omega)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . (Es gilt sogar die Konvergenz für fast alle  $t_0$  und Konvergenz in  $H^1(\Omega)$ ). Weiterhin können wir differenzieren,

$$\partial_t u_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} u(s) \partial_t \eta_\varepsilon(t - s) ds = \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(s) \eta_\varepsilon(t - s) ds = ((\partial_t u) * \eta_\varepsilon)(t).$$

Für voneinander verschiedene Werte von  $\varepsilon$ , nämlich  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ , können wir berechnen

$$\frac{d}{dt} \|u_{\varepsilon_1}(s) - u_{\varepsilon_2}(s)\|_{L^2}^2 = 2 \langle u_{\varepsilon_1}(s) - u_{\varepsilon_2}(s), \partial_t u_{\varepsilon_1}(s) - \partial_t u_{\varepsilon_2}(s) \rangle,$$

also auch

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon_1}(t) - u_{\varepsilon_2}(t)\|_{L^2}^2 &= \|u_{\varepsilon_1}(t_0) - u_{\varepsilon_2}(t_0)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + 2 \int_{t_0}^t \langle u_{\varepsilon_1}(s) - u_{\varepsilon_2}(s), \partial_t u_{\varepsilon_1}(s) - \partial_t u_{\varepsilon_2}(s) \rangle \\ &\leq \|u_{\varepsilon_1}(t_0) - u_{\varepsilon_2}(t_0)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + 2 \|u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \cdot \|\partial_t [u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}]\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ , gleichmäßig in  $t$ . Die Funktionen  $u_\varepsilon$  konvergieren also punktweise gegen eine Grenzfunktion  $\tilde{u}$ . Da dieser Limes gleichzeitig auch der  $L^2(\Omega \times (0, T))$ -Limes ist, gilt  $\tilde{u} = u$ , die Folge  $u_\varepsilon$  konvergiert also in  $C^0((0, T), L^2(\Omega))$  gegen  $u$ . Als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist dann auch  $u$  stetig (Stichwort:  $\frac{\varepsilon}{3}$ -Beweis).

2.) Wir können für beliebige Punkte  $t_1, t_2 \in (0, T)$  schreiben

$$\|u_\varepsilon(t_2)\|_{L^2}^2 - \|u_\varepsilon(t_1)\|_{L^2}^2 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \|u_\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 ds = 2 \int_{t_1}^{t_2} \langle u_\varepsilon(s), \partial_t u_\varepsilon(s) \rangle ds.$$

Wir können den Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  auf beiden Seiten bilden, wobei wir auf der linken Seite 1.) ausnutzen. Es folgt

$$\|u(t_2)\|_{L^2}^2 - \|u(t_1)\|_{L^2}^2 = 2 \int_{t_1}^{t_2} \langle u(s), \partial_t u(s) \rangle ds.$$

Dies ist die gewünschte Absolutstetigkeit und liefert auch die Formel für die schwache Ableitung.  $\square$

**17.2. Folgerungen für Lösungen.** Wir betrachten Lösungen  $u$  des nachfolgenden Problems (P):

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega \times (0, T)), \\ u \text{ erfüllt } u(., 0) &= u_0 \text{ im schwachen Sinne,} \\ u &\in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \end{aligned}$$

für gegebenes  $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  und  $u_0 \in L^2(\Omega)$ .

**LEMMA 17.2 (Energiegleichung).** *Sei  $u$  eine Lösung von (P). Dann hat  $u$  einen stetigen Repräsentanten  $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$ . Dieser erfüllt  $u(0) = u_0$  klassisch und zusätzlich die Energiegleichung*

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle_{L^2(\Omega)} ds.$$

**BEWEIS.** *Stetigkeit in  $t = 0$ .* Zunächst stellen wir fest, dass  $u$  als Lösung der Gleichung auch  $v := \partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  erfüllt. Um den Interpolationssatz 17.1 anwenden zu können, müssen wir allerdings noch  $0 \in [0, T)$  zu einem inneren Punkt machen. Wir setzen dafür  $u$  und  $v$  auf  $(-T, T)$  fort durch

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{für } t > 0, \\ u(-t) & \text{für } t < 0, \end{cases} \quad \tilde{v}(t) = \begin{cases} v(t) & \text{für } t > 0, \\ -v(-t) & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Die Fortsetzungen erfüllen  $\tilde{u} \in L^2(-T, T; H_0^1(\Omega))$  und  $\tilde{v} \in L^2(-T, T; H^{-1}(\Omega))$ . Wir behaupten, dass für die Distributionsableitung

die Gleichung  $\partial_t \tilde{u}(t) = \tilde{v}(t)$  gilt. Tatsächlich, für  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times (-T, T))$  und  $\psi(t) := \varphi(-t)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \tilde{u}, \varphi \rangle &= - \langle \tilde{u}, \partial_t \varphi \rangle \\ &= - \int_{-T}^0 \langle u(-s), \partial_t \varphi(s) \rangle ds - \int_0^T \langle u(s), \partial_t \varphi(s) \rangle ds \\ &= \int_0^T \langle u(s), \partial_t \psi(s) \rangle ds - \int_0^T \langle u(s), \partial_t \varphi(s) \rangle ds \\ \langle \tilde{v}(\cdot), \varphi \rangle &= - \int_0^T \langle v(s), \psi(s) \rangle ds + \int_0^T \langle v(s), \varphi(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Ausdrücke liefert gerade die Terme, wie sie in der Definition der schwachen Anfangswerte vorkommen, einmal für  $\varphi$  und einmal für  $\psi$ . Wegen  $\varphi(0) = \psi(0)$  sind die Ausdrücke identisch. Damit ist gezeigt, dass tatsächlich  $\partial_t u(t) = \tilde{v}(t) \in L^2(-T, T; H^{-1})$  und wir können nun  $0 \in (-T, T)$  als einen inneren Punkt von  $u$  auffassen. Nach Satz 17.1 hat  $u$  einen stetigen Repräsentanten  $u \in C([0, T], L^2(\Omega))$ .

*Klassische Annahme der Anfangswerte.* Wir wählen eine spezielle Testfunktion,  $\varphi(x, t) = \varphi_0(x)\eta_\varepsilon(t)$  mit  $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$  und  $\eta_\varepsilon(t) = \eta_1(t/\varepsilon)$  mit  $\eta_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  und  $\eta_1(0) = 1$ . Dann gilt nach Definition der schwachen Anfangswerte

$$\int_0^T \langle \partial_t u(t), \varphi_0 \rangle \eta_\varepsilon(t) dt + \int_0^T \langle u(t), \varphi_0 \rangle \partial_t \eta_\varepsilon(t) dt = - \langle u_0, \varphi_0 \rangle.$$

Wir bilden den Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Das erste Integral verschwindet im Limes, weil  $\langle \partial_t u(t), \varphi_0 \rangle$  integrierbar ist. Für das zweite Integral gilt

$$\int_0^T \langle u(t), \varphi_0 \rangle \partial_t \eta_\varepsilon(t) dt - \int_0^T \langle u(0), \varphi_0 \rangle \partial_t \eta_\varepsilon(t) dt \rightarrow 0$$

wegen der  $L^2(\Omega)$ -Stetigkeit von  $u$  in  $t$ . Schließlich konvergiert, wegen  $\int_0^T \partial_t \eta_\varepsilon = -1$ , das letzte Integral gegen das Gewünschte,

$$\int_0^T \langle u(0), \varphi_0 \rangle \partial_t \eta_\varepsilon(t) dt \rightarrow - \langle u(0), \varphi_0 \rangle.$$

Wir erhalten die gewünschte Relation  $u(0) = u_0$ .

*Energiegleichung.* Für die Energiegleichung müssen wir nur die Absolutstetigkeit der Norm ausnutzen.

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2}^2 - \|u(0)\|_{L^2}^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds = \int_0^t 2 \langle u(s), \partial_t u(s) \rangle ds \\ &= \int_0^t 2 \langle u(s), \Delta u(s) + f(s) \rangle ds \end{aligned}$$

$$= - \int_0^t 2 \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 + 2 \langle u(s), f(s) \rangle ds.$$

Dies ist die behauptete Energiegleichung.  $\square$

**SATZ 17.3** (Existenz und Eindeutigkeit). *Zu  $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  und  $u_0 \in L^2(\Omega)$  existiert eine eindeutige Lösung  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  der Wärmeleitungsgleichung (P). Nach Abänderung auf einer Nullmenge ist die Abbildung  $u : [0, T) \ni t \mapsto u(t) \in L^2(\Omega)$  stetig. Es gilt die Energiegleichung und die Anfangsbedingung im klassischen Sinne.*

**BEWEIS.** Die Existenz einer Lösung wurde mit Satz 16.6 und den Verallgemeinerungen in 16.3 bereits gezeigt, die Stetigkeit in Lemma 17.2. Wir müssen noch die Eindeutigkeit feststellen. Diese folgt, indem man die Differenz  $w$  zweier Lösungen betrachtet. Die Funktion  $w$  löst in demselben Lösungsraum die homogene Gleichung ( $f = 0$ ) mit Anfangsbedingung  $u_0 = 0$ . Die Energieungleichung gilt für  $w$  und impliziert  $w = 0$ .  $\square$

Wir können auch die Sprache der Halbgruppen benutzen, um die Ergebnisse zusammenzustellen. Dabei entnehmen wir der Energiegleichung die Abschätzung  $\|u(t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}$ .

**SATZ 17.4.** *Die homogene Wärmeleitungsgleichung definiert eine Halbgruppe*

$$S(t) : L^2(\Omega) \ni u_0 \mapsto u(t) \in L^2(\Omega), \quad \|S(t)\| \leq 1.$$

*Für jedes  $u_0 \in L^2(\Omega)$  definiert die Halbgruppe eine stetige Abbildung  $[0, \infty) \ni t \mapsto S(t)u_0 \in L^2(\Omega)$ .*

Wir fassen noch die Resultate für allgemeine elliptische Operatoren  $L$  mit Elliptizitätskonstante  $\gamma > 0$  zusammen. Wenn wir Corollar 9.3 für die Lösbarkeit der Zeitschrittprobleme ausnutzen wollen, so müssen wir  $b \in C^1$  voraussetzen. Der Satz gilt aber allgemeiner für beschränkte Koeffizienten  $b$ .

**SATZ 17.5.** *Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt,  $u_0 \in L^2(\Omega)$  und  $T > 0$  gibt es eine eindeutige Lösung  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  mit  $\partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  von*

$$\partial_t u + Lu = 0,$$

$$u \text{ erfüllt die schwache Anfangsbedingung } u(\cdot, 0) = u_0.$$

*Der elliptische Operator definiert eine Halbgruppe*

$$S(t) : L^2(\Omega) \ni u_0 \mapsto u(t) \in L^2(\Omega), \quad \|S(t)\| \leq e^{ct}.$$

BEWEIS. Die Lösung wird konstruiert wie in 16.3 angedeutet. Lemma 17.2 gilt für Lösungen und liefert die Eindeutigkeit. Es bleiben die a priori Abschätzung nachzuprüfen. Dies folgt wieder durch Testen der Gleichung mit der Lösung, Lemma 17.2 erlaubt diese Rechnung für fast alle  $t$ .

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 &= - \langle Lu(t), u(t) \rangle \\ &= - \sum_{ij} \langle a_{ij} \partial_i u(t), \partial_j u(t) \rangle - \sum_i \langle b_i \partial_i u(t), u(t) \rangle - \langle cu(t), u(t) \rangle \\ &\leq -\gamma \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + C_0 \|u(t)\|_{H^1} \|u(t)\|_{L^2} \end{aligned}$$

Wir integrieren von 0 bis  $t$  und finden mit der Poincaré Abschätzung (Konstante  $C_P$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{C_P} \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds \\ \leq \delta \int_0^t \|u(s)\|_{H^1}^2 ds + \frac{C_0^2}{\delta} \int_0^t \|u(s)\|_{L^2}^2 ds. \end{aligned}$$

Dies gilt für beliebiges  $\delta > 0$ . Wir wählen  $\delta = \frac{\gamma}{C_P}$  und können das erste Integral der rechten Seite in die linke Seite absorbieren. Wir erhalten für eine neue Konstante  $C$  die folgende Abschätzung für  $y(t) := \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2$  und  $y_0 := \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2$ .

$$(17.2) \quad y(t) \leq y_0 + C \int_0^t y(s) ds.$$

Eine Anwendung der Gronwallschen Ungleichung liefert

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 e^{Ct}.$$

Mit  $c = C/2$  ist dies das gewünschte Resultat.  $\square$

**17.3. Methode als Energieminimierung.** Die Lösung des elliptischen Problems haben wir erhalten, indem wir ein Energiefunktional minimiert haben. Die Lösung des parabolischen Problems haben wir erhalten, indem wir in jedem Zeitschritt ein elliptisches Problem gelöst haben. Wir haben also in jedem Zeitschritt eine Energie minimiert.

Wir haben die Gleichung

$$\frac{1}{\Delta t} v - \Delta v = \frac{1}{\Delta t} u_k$$

mit  $v \in H_0^1(\Omega)$  gelöst, und die Lösung  $u_{k+1}$  genannt. Dafür haben wir die Gleichung geschrieben als

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} v \cdot \varphi + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} u_k \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dies wiederum ist die Euler-Lagrange Gleichung für die Energie

$$F_1(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{\Delta t} |v|^2 + |\nabla v|^2 \right] - \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} u_k \cdot v.$$

Tatsächlich haben wir die elliptische Gleichung gelöst, indem wir diese Energie minimiert haben. Äquivalent kann man auch minimieren

$$F_2(v) := \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} |v - u_k|^2 + |\nabla v|^2.$$

Mit der Dirichlet-Energie  $E(v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2$  haben wir also

$$F_2(v) = E(v) + \frac{1}{\Delta t} \|v - u_k\|_{L^2(\Omega)}^2$$

minimiert. In jedem Schritt soll also die Dirichlet-Energie möglichst klein gemacht werden, mit der Nebenbedingung, dass wir in  $L^2(\Omega)$  keine zu großen Abweichungen vom letzten Zeitschritt haben. Man kann dies abstrakt fassen und sagt dann: *Die Wärmeleitungsgleichung ist der Gradientenfluss der Dirichlet-Energie in der  $L^2(\Omega)$ -Metrik.*



Teil 4

Appendix

## 18. Bochner-Integral

Das Ziel ist die Analyse zeitabhängiger Funktionen in einem Banachraum. Dabei ist uns  $T > 0$  und ein Banachraum  $X$  gegeben und wir wollen Funktionen  $u : [0, T] \rightarrow X$  untersuchen. Dafür soll ein Begriff der (zeitlichen) Integrierbarkeit eingeführt werden.

**DEFINITION 18.1** (Bochner-Integrierbare Funktionen). *Zu einem Banachraum  $X$ , zu  $T > 0$  und  $p \in [1, \infty)$  definieren wir  $Y := L^p((0, T), X)$  als der Raum der stark meßbaren Funktionen  $u : [0, T] \rightarrow X$  mit*

$$\|u\|_Y := \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

*Wir identifizieren dabei Funktionen, die für fast alle  $t \in [0, T]$  übereinstimmen. Die starke Meßbarkeit bedeutet, dass eine Folge von Treppenfunktionen  $u_k : [0, T] \rightarrow X$  existiert mit  $u_k(t) \rightarrow u(t)$  in  $X$  für alle  $t \in [0, T]$ .*

*Bemerkung 1.* Man zeigt leicht, dass für ein stark messbares  $u$  tatsächlich  $\|u\| : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-messbar ist (sh. Ruzicka, Lemma 1.7 in 2.1). Damit ist die Definition sinnvoll.

*Bemerkung 2.* Der Messbarkeitsbegriff ist sehr stark. Im Falle separabler Zielräume  $X$  vereinfacht sich der Begriff jedoch erheblich. Der Satz von Pettis besagt: Sei  $X$  separabel und  $u : (0, T) \rightarrow X$ . Falls für alle  $\lambda \in X'$  die Funktion  $\lambda(u(\cdot)) : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-messbar ist, so ist  $u$  stark messbar (sh. Yosida, Abschnitt V 4).

Wir fassen nun alle von uns benötigten Resultate in einem Satz zusammen.

**SATZ 18.2** (Eigenschaften des Bochner-Integrals). *Sei  $X$  ein Banachraum,  $p \in [1, \infty)$  und  $Y = L^p((0, T), X)$  wie in Definition 18.1. Dann gilt:*

- (1) *Für alle  $u \in Y$  ist das Integral*

$$\int_0^T u(t) dt \in X$$

*wohldefiniert.*

- (2)  *$Y$  ist ein Banachraum. Es gilt der Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue.*
- (3) *Für  $u \in Y$  gilt*

$$\left\| \int_0^T u(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt,$$

und für  $\lambda \in X'$  gilt

$$\left\langle \lambda, \int_0^T u(t) dt \right\rangle = \int_0^T \langle \lambda, u(t) \rangle dt.$$

- (4) Für Diracfolgen  $\eta_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\langle \eta_\varepsilon \rangle \rightarrow \delta_0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $u \in Y$  gilt  $u * \eta_\varepsilon \rightarrow u$  in  $Y$ .
- (5) Für einen reflexiven Banachraum  $X$  und  $p \in (1, \infty)$  ist  $Y = L^p((0, T), X)$  reflexiv.

*Bemerkungen zum Satz.* 1. Dem klassischen Satz von Bochner entspricht der erste Punkt, für Beweise siehe z.B. Ruzicka, Abschnitt 2.1 oder Yosida, Abschnitt V 5. Der Beweis funktioniert elementar durch Approximation mit Treppenfunktionen.

2. Die Banachraumeigenschaft wird z.B. von Ruzicka skizziert, er verweist allerdings auch auf Rechnungen aus der Lebesgue-Theorie. Mit dem Satz der majorisierten Konvergenz ist folgende Aussage gemeint: Seien  $u_k$  mit  $\|u_k(t)\|_X \leq g(t)$  für alle  $t$ ,  $g \in L^1((0, T), \mathbb{R})$  und  $u_k(t) \rightarrow u(t)$  in  $X$  für alle  $t$ . Dann folgt  $u \in Y$  und  $u_k \rightarrow u$  in der  $Y$ -Norm. Der Beweis ist elementar, denn

$$\|u_k - u\|_X^p(\cdot) \rightarrow 0 \text{ gilt punktweise und } g\text{-majorisiert auf } (0, T).$$

Nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz also auch

$$\int_0^T \|u_k - u\|_X^p(t) dt \rightarrow 0.$$

Dies ist aber gerade die  $Y$ -Konvergenz.

3. Diese Eigenschaft hat wiederum einen elementaren Beweis, siehe z.B. Ruzicka 2.1.14.

4. Die Approximationseigenschaft kann in der hier angegebenen schwachen Form wiederum elementar gezeigt werden. Man wähle zunächst eine hinreichend gute Approximation von  $u$  mit einer Treppenfunktion, glätte diese und verwende 2.

5. Man beweist eine explizite Charakterisierung des Dualraums,  $L^p((0, T), X)' = L^{p'}((0, T), X')$  für  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**DEFINITION 18.3.** Die schwache Ableitung ist im Distributionssinn definiert. Für  $u, v \in Y$  sagen wir  $v = \partial_t u$ , falls

$$-\int_0^T u(t)\Phi'(t) dt = \int_0^T v(t)\Phi(t) dt$$

für alle  $\Phi \in C_0^\infty((0, T), \mathbb{R})$ .

Abschliessend stellen wir fest, dass jedes Element  $u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  auch eine Distribution definiert,

$$C_0^\infty(\Omega \times (0, T)) \ni \varphi \xrightarrow{\langle u \rangle} \langle u, \varphi \rangle := \int_0^T \langle u(t), \varphi(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt \in \mathbb{R}.$$

Die schwache Ableitung aus Definition 18.3 stimmt mit der früheren Distributionsableitung überein.

## 19. Variation der Konstanten

Wir wollen diese wichtige Formel nicht unerwähnt lassen, verwenden jedoch die Variation-der-Konstanten-Formel nicht in Beweisen.

Wir betrachten wieder die inhomogene Gleichung

$$(19.1) \quad \partial_t u + Lu = f, \quad u(0) = u_0$$

und nehmen nun einen abstrakteren Standpunkt ein. Angenommen, wir wissen über  $L$  nur, dass die homogene Gleichung  $\partial_t u + Lu = 0$  eine Halbgruppe  $S(t)$  auf einem Banachraum  $X$  erzeugt (wie in Satz 17.5).

*Schreibweise:* Für die Halbgruppe  $S(t) : X \rightarrow X$ ,  $t \in [0, \infty)$  schreiben wir auch

$$e^{-Lt} = S(t) : X \rightarrow X.$$

Die Schreibweise ist suggestiv, schliesslich gilt mit  $u(t) = S(t)u_0$

$$\partial_t e^{-Lt} u_0 = \partial_t u(t) = -Lu(t) = (-L)e^{-Lt} u_0,$$

es gilt also die übliche Ableitungsregel für die Exponentialfunktion (insbesondere stimmt für Matrizen  $L$  die neue Definition mit der Definition über die Reihe überein).

**Variation-der-Konstanten-Formel.** Wir erwarten (vergleiche die Lösungsformel in Satz 14.5), dass eine Lösung von (19.1) konstruiert werden kann durch folgende Darstellung (Variation-der-Konstanten-Formel):

$$(19.2) \quad u(t) = e^{-Lt} u_0 + \int_0^t e^{-L(t-s)} f(s) ds.$$

Wichtig ist dabei, dass wir lediglich die Halbgruppe benutzen, um die Lösung des inhomogenen Problems zu konstruieren.

Tatsächlich liefert formales Einsetzen  $u(0) = e^{-A0} u_0 = u_0$  und die Zeitableitung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) &= -Le^{-At} u_0 + \int_0^t (-L)e^{-L(t-s)} f(s) ds + e^{-L(t-s)} f(s)|_{s=t} \\ &= -Lu(t) + f(t). \end{aligned}$$

Ob die Funktion  $u$  aus (19.2) tatsächlich eine Lösung von (19.1) definiert, ist im Einzelfall nachzuweisen.